Master M2

Correction de l'examen de Cosmologie C1 - Jeudi 13 mars 2008

2 heures — Document autorisé: cours

I. Univers statique

On suppose un univers homogène, isotrope dont les propriétés sont décrites par les équations de Friedmann.

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho + \dfrac{3P}{c^2}\right) R + \dfrac{\Lambda c^2}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dfrac{\Lambda c^2}{3} R^2 & (b) \end{cases} \tag{1}$$

I.1 Préliminaires

- **Rappeler le sens des termes des équations 1.**

  Voir le cours.

- **On suppose que la pression peut s'écrire sous la forme $P = \omega\rho\, c^2$. Quels arguments pourraient justifier cette forme pour l'équation d'état?**

  Voir le cours: si l'univers est homogène et isotrope, alors chaque composante se comporte comme un fluide parfait et dans ce cas l'équation d'état doit prendre la forme $P = \omega\rho\, c^2$.

- **Ecrivez alors les équations 1 pour un univers statique.**

  Pour un univers statique on a $\ddot{R} = 0$ et $\dot{R} = 0$.

  Par exemple, on peut les écrire sous cette forme:

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi G}{3}\rho\,(1+3\omega) = \dfrac{\Lambda c^2}{3} & (a) \\ kc^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dfrac{\Lambda c^2}{3} R^2 & (b) \end{cases} \tag{2}$$

I.2 L'univers statique d'Einstein

- **Calculez Λ en fonction de ρ et montrez que dans le cas $\omega > -1/3$ on a nécessairement $k = +1$ et $\Lambda > 0$,**

  C'est évident d'après la question précédente:

$$\frac{4\pi G}{3}\rho\,(1+3\omega) = \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{3}$$

  Comme $\omega > -1/3$, $\rho > 0$ alors $\Lambda > 0$.

  De plus, on a de même:

$$kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 \tag{4}$$

  Comme $\rho > 0$ et $\Lambda > 0$ alors $k > 0$, soit $k = +1$

- **L'univers étant statique, il peut être caractérisé par son facteur d'échelle constant R_c. Montrez que dans ce cas Λ peut s'écrire uniquement en fonction de R_c et ω**

  Les équations précédentes conduisent très facilement à

$$\rho = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{1}{1+\omega}\frac{1}{R_c^2} \tag{5}$$

  et

$$\Lambda = \frac{1+3\omega}{1+\omega}\frac{1}{R_c^2} \tag{6}$$

I.3 La critique d'Eddington

On s'intéresse maintenant à la stabilité de cet univers statique. Pour cela, on analyse les effets de perturbations en ρ et en R autour de la position statique R_c.

- **Ecrivez la première équation de Friedmann perturbée en fonction de Λ, ω, $R + \delta R$ et $\rho + \delta\rho$.**

  Il suffit de reprendre la première équation et de calculer les termes au premier ordre des perturbations

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R + \frac{\Lambda c^2}{3}R - \frac{4\pi G}{3}(1+3\omega)(\delta\rho\ R + \rho\delta R) + \frac{\Lambda c^2}{3}\delta R \tag{7}$$

- **Compte tenu des relations entre la densité perturbée ρ et R_c, et la constante fixe Λ et R_c, montrez que la perturbation sur l'accélération ne dépend que de ω, R_c et δR.**

  Les premiers termes correspondent à la solution statique et sont donc nuls. De plus, comme

  $$\rho = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{1}{R_c^2} \frac{1}{1+\omega} \tag{8}$$

  on en déduit immédiatement $\delta\rho$ en fonction de δR, et donc

  $$\ddot{R} = \frac{2c^2}{3} \frac{1+3\omega}{1+\omega} \frac{1}{R_c^2} \delta R \tag{9}$$

- **Que se passe t-il alors si $\delta R > 0$ ou $\delta R < 0$? Que peut on en conclure sur la stabilité de cet univers statique?**

  Eddington a utilisé ce résultat pour argumenter que lorsque $\delta R > 0$ alors $\ddot{R} > 0$ et lorsque $\delta R < 0$ alors $\ddot{R} < 0$, ce qui signifie que tout écart à la solution statique engendre une accélération qui écarte inévitablement l'univers statique de son l'équilibre initial. Le modèle d'univers statique d'Einstein est donc instable.

I.4 L'univers statique faces aux observations

- **L'univers statique d'Eintein est incomptablible avec les observations. Rappelez l'ensemble des faits observationnels qui l'attestent.**

  Voir le cours, sur les preuves de l'expansion de l'univers.

- **Rappelez les observations qui montrent que l'univers est accéléré.**

  Voir le cours: il s'agit de l'accéération de l'univers révélée par l'observation des courbes de lumières des Supernovae Ia.

- **Si l'on décrivait la source de cette accélération par une équation d'état $P = \omega\rho c^2$ quelle serait alors la valeur de ω la plus vraisemblable aujourd'hui? Pourquoi?**

  Voir le cours: l'ensemble des contraintes observationnelles (supernovae, CMB, weak lensing, amas de galaxies, effet Sach Wofle intégré) est compatible avec $\omega = -1$. C'est à dire à une énergie sombre qui serait la constante cosmologique.

II. Masse des neutrinos fossiles.

A la suite du Big Bang, une très grande quantité de neutrinos a été produite pendant l'ère leptonique. Si au moins une des espèces i de neutrinos a une masse $m_{\nu i}$, alors ces espèces sont aujourd'hui non relativistes. En supposant qu'il existe trois espèces de neutrinos on a alors

$$\rho_\nu = \frac{3}{11} n_\gamma \sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \tag{10}$$

où n_γ est la densité numérique de photons du rayonnement cosmologique fossile aujourd'hui.

II.1 Densité de neutrinos fossiles

- **Compte tenu de la densité de photons fossiles aujourd'hui, donnez la densité numérique de neutrinos fossiles.**

  Voir le cours ou les résultats de COBE ou WMAP: $n_\gamma = 428$ photons cm^{-3}. Donc $n_\nu = 112$ neutrinos cm^{-3}.

II.2 Masse limite supérieure des familles de neutrinos

- **En supposant que la courbure de l'univers est nulle et que la contribution en matière $\Omega_m = 0.233$ (hors baryons, avec $h = 0.71$), montrez que**

$$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \leq 12 \text{ eV} . \tag{11}$$

On a nécessairement

$$\Omega_\nu \leq \Omega_m \tag{12}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \leq \frac{\Omega_m}{112} \rho_c . \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \leq \frac{0.233}{112} \times 2 \times 10^{-29}\ h^2 \times \frac{(2 \times 10^{10})^2}{1.602 \times 10^{-12}} . \tag{14}$$

soit, pour $h = 0.71$;

$$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \leq 12 \text{ eV} . \tag{15}$$

II.3 Neutrinos et matière noire chaude

- **Les neutrinos sont des candidats à la matière chaude dans l'univers, mais on pense qu'elle ne peut pas être une contribution dominante. Rappelez les arguments qui conduisent à cette conclusion.**

  Voir le cours: les neutrinos comme matière noire chaude altèrent la formation des petites structures au profit des grandes. Le spectre de puissance des fluctuations de densité est donc un indicateur de leurs contributions. Les données actuelles aux petites échelles (amas de galaxies, weak lensing, forêt Lyman alpha, galaxies) ne sont pas comptatibles avec une matière noire chaude dominante.