Master M2

Examen de Cosmologie C1 - Jeudi 16 mars 2006

2 heures

Document autorisé: cours

Effets de l'énergie sombre.

On suppose un univers homogène et isotrope, de courbure nulle, dont les propriétés sont définies par $H(z)$, $R(t)/R_0 = 1/(1+z)$. Cet univers est uniquement constitué de matière, caractérisée par ρ_m Ω_m et par une énergie sombre, caractérisée par ρ_X et Ω_X. Les paramètres décrivant l'univers à t_0 s'écriront H_0, $\rho_{0,m}$ et $\rho_{0,X}$. Dans tout le problème on prendra pour la célérité de la lumière $c = 1$.

Effets de l'énergie sombre sur l'expansion.

1. On considère que la composante énergie sombre peut être caractérisée par une équation d'état de la forme

$$P_X = \omega_X \rho_X. \tag{1}$$

Rappelez ce que cela signifie sur les propriétés de la composante énergie sombre.

On fait l'hypothèse que l'energie sombre se comporte comme un fluide parfait.

2. Dans ce cas, les équations de Friedmann conduisent à une relation entre la densité et la facteur d'échelle de la forme

$$R^3 \mathrm{d}\rho + 3\rho\,(1+\omega)\,R^2 \mathrm{d}R = 0 \tag{2}$$

Rappelez ce que signifie cette équation.

Elle illustre la conservation de l'énergie. La variation de la densité d'énergie, dρ, correspond au travail pour modifier le volume de dR.

3. En déduire que

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 3\,(1+\omega)\,\frac{\mathrm{d}z}{1+z} \tag{3}$$

et donc que la densité d'énergie sombre s'écrit et l'expression de la la densité d'énergie sombre en fonction de z et ω

On a

$$\mathrm{d}\rho = -3\rho\,(1+\omega)\,\frac{\mathrm{d}R}{R} \tag{4}$$

En utilisant la relation entre R et le redshift z

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z} \tag{5}$$

on obtient

$$\mathrm{d}\rho = -3\,(1+\omega)\left(\frac{1+z}{R_0}\right)\left(-\frac{R_0}{(1+z)^2}\right)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 3\,(1+\omega)\,\frac{\mathrm{d}z}{1+z} \tag{7}$$

qui s'intègre immédiatement pour donner l'expersion de ρ_X:

$$\rho_X = \rho_{0,X}\,\exp\left[3\int_0^z (1+\omega(z'))\;\mathrm{d}ln\,(1+z')\,\mathrm{d}z'\right] \tag{8}$$

3. En utilisant la relation entre $\dot{R}/R$ et les densités des composantes de l'univers, montrez alors que

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\,(1+z)^3 + \Omega_X \exp\left[3\int_0^z (1+\omega(z'))\,\mathrm{d}ln\,(1+z')\,\mathrm{d}z'\right] \tag{9}$$

On a (voir le cours)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{H_0^2}{\rho_{0,c}}\sum \rho_i \tag{10}$$

soit

$$\left(\frac{H\,(z)}{H_0}\right)^2 = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_X}{\rho_c} = \Omega_m + \Omega_X \tag{11}$$

et donc

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\,(1+z)^3 + \Omega_X \exp\left[3\int_0^z (1+\omega(z'))\,\mathrm{d}ln\,(1+z')\,\mathrm{d}z'\right] \tag{12}$$

4. Déterminez le comportement de $(H(z)/H_0)^2$ pour les deux cas simples

- **Constante cosmologique et**
- **$\omega = -1/3$.**

Discutez leur comportement en fonction du redshift et ce qu'ils impliquent sur l'histoire de l'univers relativement à un univers sans énergie sombre, notamment lorsqu'on ajoute aussi la contribution des photons.

- Constante cosmologique: $\omega = -1$. Dans ce cas

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\,(1+z)^3 + \Omega_X \tag{13}$$

- $\omega = -1/3$. Dans ce cas

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\,(1+z)^3 + \Omega_X\,(1+z)^2 \tag{14}$$

Ces deux modèles montrent une dépendance de $\Omega + m$ et Ω_X en fonction du redshift différente. Dans les deux cas, la contribution de Ω_m décroit progressivement ce qui permet de prédire que ces univers seront dominés par deux grandes phases, l'une dominée par la matière, l'autre dominée par l'énergie sombre. Comme par ailleurs on sait que l'équation d'état pour les photons est en $(1+z)^4$, l'histoire de notre univers, s'il contient effectivement une composante d'énergie sombre significative, aurait trois grandes périodes qui chronologiquement seraient la période dominée par la rayonnement, puis par la matière , puis enfin par une énergie sombre.

5. On s'intéresse à une évolution temporelle de ω. Pour cela, on modélise l'évolution par une paramétrisation de la forme

$$\omega(z) = -\frac{1}{2} + k\ z \tag{15}$$

où k est petit et peut être positif ou négatif.

Quels sont les avantages et les inconvénients d'une telle représentation de l'évolution temporelle?

Une représentation comme celle-ci de l'évolution temporelle a l'avantage d'être simple et tente de produire des modèle empiriques qui permettent de cerner de façon rudimentaire les tendances concernant l'évolution temporelle de l'énergie sombre. C'est une véritable exploration de l'inconnue. L'inconvénient c'est que la dépendance en redshift est totalement arbitraire et n'a aucun fondement théorique. Aucun modèle physique tels que ceux que proposent la physique des hautes énergie n'est véritablement exploré.

6. Montrez que dans ce cas

$$\left(\frac{H\left(z\right)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X\left(1+z\right)^{\frac{3}{2}-3k} \quad e^{3kz} \tag{16}$$

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X \exp\left[3\int_0^z \left(1-\frac{1}{2}+k\ z\right) \mathrm{d}ln\left(1+z'\right)\mathrm{d}z'\right] \tag{17}$$

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X \exp\left[\frac{3}{2}\int_0^z \mathrm{d}ln\left(1+z'\right)\mathrm{d}z' \ + 3\int_0^z \left(k\ z\right)\mathrm{d}ln\left(1+z'\right)\mathrm{d}z'\right] \tag{18}$$

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X\left(1+z\right)^{3/2} \exp\left[3\int_0^z \left(k\ z\right)\mathrm{d}ln\left(1+z'\right)\mathrm{d}z'\right] \tag{19}$$

qui s'intègre par parties. Sachant que

$$\int_0^z \ln\left(1+u\right)\mathrm{d}u = \left(1+z\right)\ln\left(1+z\right) - z \tag{20}$$

on déduit que

$$\left(\frac{H\left(z\right)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X\left(1+z\right)^{\frac{3}{2}-3k} \quad e^{3kz} \tag{21}$$

7. Tracez l'écart avec un modèle à constante cosmologique pour $k = 0.1$ **et** $k = -0.05$**. On se limitera aux petits redshifts (**$i.e.\ \ 0.0 \le z \le 0.5$**) et on calculera jusqu'aux termes en** z^2**. Qu'en concluez vous?**

on a donc

$$\left[\left(\frac{H\left(z\right)}{H_0}\right)^2\right]_X - \left[\left(\frac{H\left(z\right)}{H_0}\right)^2\right]_\Lambda = \Omega_X\left(\left(1+z\right)^{\frac{3}{2}-3k} \quad e^{3k\ z} - 1\right) \tag{22}$$

Le développement en série de Taylor pour les petits redshifts qu'il faut faire pour atteindre les termes en z^2 est:

$$\left(1+z\right)^{\frac{3}{2}-3k} \quad e^{3k\ z} = \left[1+\left(\frac{3}{2}-3k\right)z + \left(\frac{3}{2}-3k\right)\left(\frac{1}{2}-3k\right)\frac{z^2}{2}\right]\left[1+3kz+\frac{9k^2z^2}{2}\right] - 1 \tag{23}$$

Aux petits redshift, l'écart Δ_{H^2} par rapport à un modèle à constante cosmologique a donc la forme

$$\Delta_{H^2} = \frac{3}{2}z + 3z^2\left(\frac{1}{8} + \frac{k}{2}\right) \tag{24}$$

soit des différences de l'ordre de 10% vis à vis du modèle à constante cosmologique, mais en général de moins de 1% entre les deux modèles avec une variation temporelle. On peut donc éventuellement détecter la variation, mais en définir les propriétés est vraiment difficile. Il faut atteindre des redshifts plutôt élevés pour que l'effet permette de séparer des modèles.

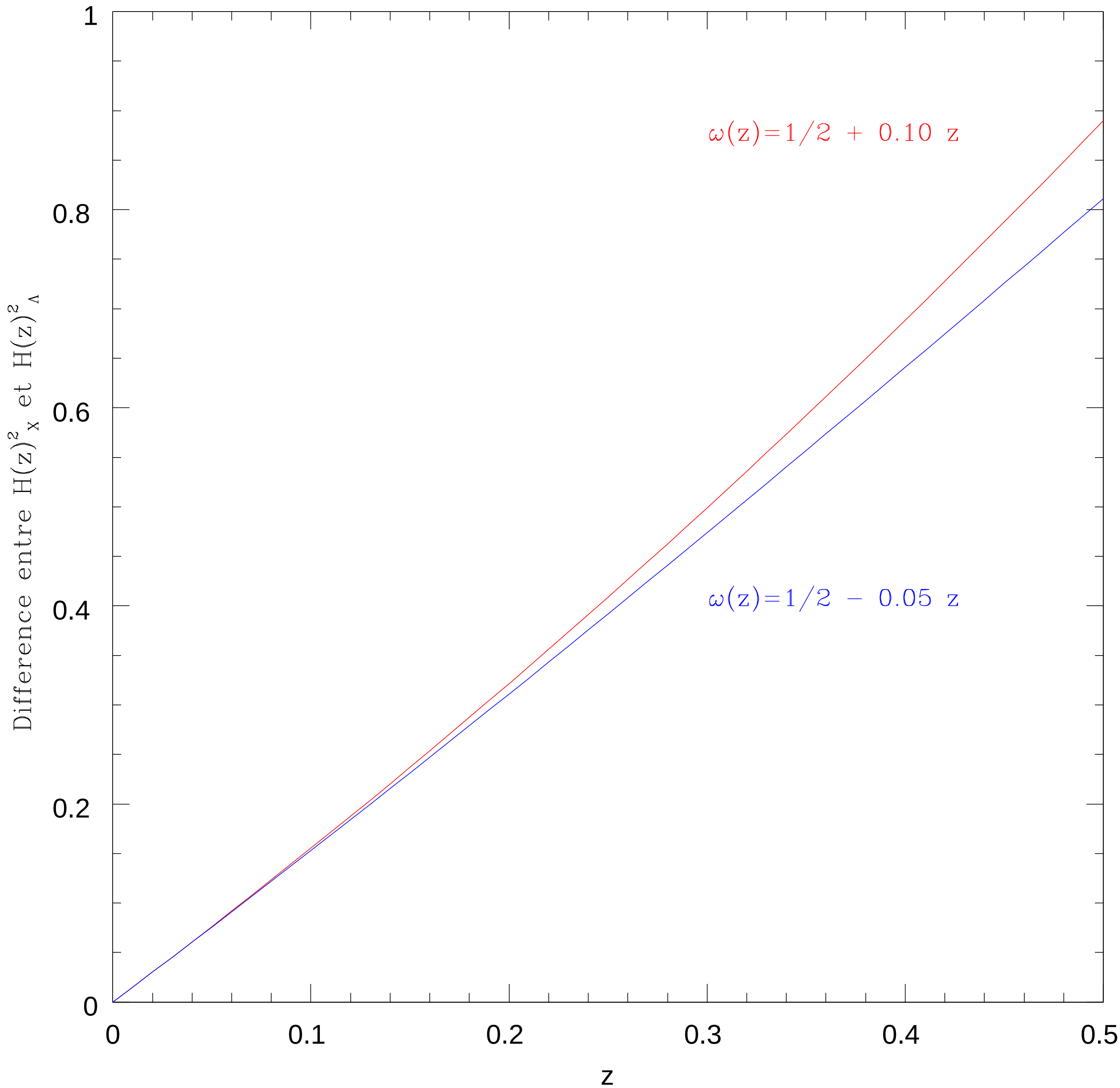

Figure 1: Ecart exact (sans l'approximation des petits z).