Master M2
Examen de Cosmologie C1 - Jeudi 16 mars 2006

2 heures Document autorisé: cours

Effets de l'énergie sombre.

On suppose un univers homogène et isotrope, de courbure nulle, dont les propriétés sont définies par $H(z)$, $R(t)/R_0 = 1/(1+z)$. Cet univers est uniquement constitué de matière, caractérisée par ρ_m et Ω_m et par une énergie sombre, caractérisée par ρ_X et Ω_X. Les paramètres décrivant l'univers à t_0 s'écriront H_0, $\rho_{0,m}$ et $\rho_{0,X}$. Dans tout le problème on prendra pour la célérité de la lumière $c = 1$.

Effets de l'énergie sombre sur l'expansion.

1. On considère que la composante énergie sombre peut être caractérisée par une équation d'état de la forme

$$P_X = \omega_X \rho_X. \tag{1}$$

Rappelez ce que cela signifie sur les propriétés de la composante énergie sombre.

2. Dans ce cas, les équations de Friedmann conduisent à une relation entre la densité et la facteur d'échelle de la forme

$$R^3 \mathrm{d}\rho + 3\rho\,(1+\omega)\,R^2 \mathrm{d}R = 0 \tag{2}$$

Rappelez ce que signifie cette équation.

3. En déduire que

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 3\,(1+\omega)\,\frac{\mathrm{d}z}{1+z} \tag{3}$$

et l'expression de la la densité d'énergie sombre en fonction de z et ω

3. En utilisant la relation entre $\dot{R}/R$ et les densités des composantes de l'univers, montrez alors que

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X \mathrm{exp}\left[3\int_0^z \left(1+\omega(z')\right) \mathrm{d}ln\left(1+z'\right)\mathrm{d}z'\right] \tag{4}$$

4. Déterminez le comportement de $(H(z)/H_0)^2$ pour les deux cas simples

- Constante cosmologique et
- $\omega = -1/3$.

Discutez leur comportement en fonction du redshift et ce qu'ils impliquent sur l'histoire de l'univers relativement à un univers sans énergie sombre, notamment lorsqu'on ajoute aussi la contribution des photons.

5. On s'intéresse à une évolution temporelle de ω. Pour cela, on modélise l'évolution par une paramétrisation de la forme

$$\omega(z) = -\frac{1}{2} + k\ z \tag{5}$$

où k est petit et peut être positif ou négatif.

Quels sont les avantages et les inconvénients d'une telle représentation de l'évolution temporelle?

6. Montrez que dans ce cas

$$\left(\frac{H\left(z\right)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}\left(1+z\right)^3 + \Omega_X\left(1+z\right)^{\frac{3}{2}-3k}\quad e^{3kz} \tag{6}$$

7. Tracez l'écart avec un modèle à constante cosmologique pour $k = 0.1$ et $k = -0.05$. On se limitera aux petits redshifts (*i.e.* $0.0 \leq z \leq 0.5$) et on calculera jusqu'aux termes en z^2. Qu'en concluez vous?