

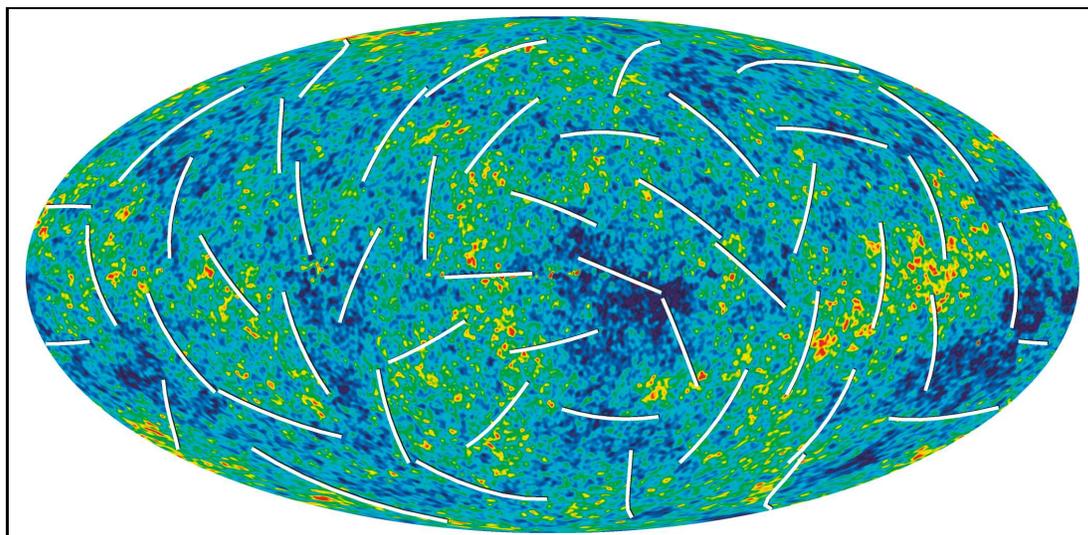
COURS DE COSMOLOGIE

Observations, modèles d'univers et paramètres cosmologiques

Yannick Mellier

Institut d'Astrophysique de Paris*

1er mars 2010



* IAP, 98 bis Bvd Arago. 75014 Paris. Bureau 210A. Tel: +33(0)144328140. Fax: +33(0)144328001. Email: mellier@iap.fr

Contents

1	Une brève histoire de la cosmologie moderne	2
2	Notations, conversions, échelles et quantités usuelles	5
3	Introduction	7
4	Contenu et propriétés de l'Univers observable	9
4.1	Propriétés statistiques des galaxies	9
4.1.1	Masse	9
4.1.2	Dimension	10
4.1.3	Fonction de Luminosité	10
4.1.4	Preuve de l'expansion de l'Univers	13
4.1.5	Comptage des galaxies	17
4.1.6	Plan Fondamental et Tully-Fisher	18
4.2	Distribution spatiale et structuration	24
4.2.1	L'Univers local	24
4.2.2	Cartographie de l'Univers lointain	24
4.2.3	Distribution moyenne en redshift des galaxies	25
4.2.4	Caractérisation de la structuration	27
4.3	Propriétés des amas de galaxies	35
4.3.1	Propriétés internes	37
4.3.2	Densité numérique et fonction de corrélation amas-amas	40
4.4	Propriétés du gaz inter-galactique	41
4.5	Propriétés statistiques des quasars	46
4.6	Les fonds de rayonnement	46
4.7	Remarque sur le Paradoxe d'Olbers	49
5	Les bases de la cosmologie moderne	50
5.1	Principe de construction des équations d'Einstein	51
5.2	Principe cosmologique	52
5.2.1	La métrique de Friedmann-Robertson-Walker d'un univers homogène et isotrope	52
5.3	Conséquences du principe cosmologique	60
5.3.1	Loi de Hubble	60
5.3.2	Redshift	61

6	Cosmographie: grandeurs physiques des univers homogènes et isotropes	62
6.1	Paramètre de décélération	62
6.2	Temps écoulé	62
6.3	Distances et magnitudes	63
6.3.1	Distance propre	63
6.3.2	Séparation comobile	65
6.3.3	Distance de Hubble	66
6.3.4	Distance lumineuse	66
6.3.5	Distance diamètre angulaire	68
6.3.6	Relation magnitude-redshift	68
6.3.7	Relation Comptage-magnitude	69
6.3.8	“Dimming factor”: effet de brillance de surface	70
6.3.9	K-correction	72
6.4	Les tests cosmologiques classiques	72
7	Les modèles d’univers de Friedmann	74
7.1	Abrégé des composantes non-nulles des tenseurs d’intérêt cosmologique	74
7.1.1	Éléments non-nuls du tenseur métrique	75
7.1.2	Éléments non-nuls des symboles de Christoffel	75
7.1.3	Composantes du tenseur de Ricci et courbure scalaire	75
7.1.4	Composantes du tenseur d’Einstein	76
7.2	Équations de Friedmann sans constante cosmologique	76
7.2.1	Interprétation Newtonnienne des équations de Friedmann	77
7.2.2	Propriétés générales des modèles de Friedmann	78
7.3	Exemple: l’Univers Einstein-de Sitter (EdS): $\Omega_m = 1$	81
8	Description de quelques modèles	83
8.1	Les 3 modèles standards, sans constante cosmologique	83
8.1.1	Modèles “poussière”, $\omega = 0$	83
8.1.2	Modèles radiatifs, $\omega = 1/3$	85
8.2	Modèles à constante cosmologique	85
8.3	Cas général des modèles à courbure nulle	89
9	Les observations cosmologiques dans des univers de Friedmann	90
9.1	Expression de la distance angulaire des modèles de Friedmann	90
9.2	L’horizon	91
9.2.1	L’horizon “particule”	91

9.2.2	L'horizon "événement"	92
9.2.3	Le problème de l'horizon	92
9.3	Le problème de la platitude	93
9.4	Comptage en fonction du redshift	93
9.5	Profondeur optique	94
9.6	Évolution du spectre du corps noir cosmologique	95
9.7	L'effet Sunyaev-Zeldovich (SZ)	96
10	Mesure des paramètres cosmologiques	99
10.1	Une vingtaine de paramètres...	99
10.2	L'âge de l'Univers	100
10.2.1	Nucléocosmochronologie	100
10.2.2	Âge des amas globulaires	101
10.2.3	Temps de refroidissement des naines blanches	102
10.3	Mesure de la constante de Hubble, H_0	102
10.4	De la mesure du rapport M/L à l'estimation de Ω_m	105
10.4.1	Galaxies	107
10.4.2	Groupes de galaxies	107
10.4.3	Amas de galaxies	107
10.4.4	Les mouvements à grande échelle des galaxies	119
10.4.5	En résumé	124
10.5	Mesure de $(\Omega_m; \Omega_\Lambda) - \sigma_8$	124
10.5.1	Les supernovae de type Ia	125
10.5.2	La fraction des quasars amplifiés	127
10.5.3	Les arcs gravitationnels	129
10.5.4	Les distorsions gravitationnelles cosmologiques ("cosmic shear")	129
10.5.5	Les amas de galaxies	131
10.6	Anisotropies du fond diffus cosmologique et paramètres cosmologiques	134
10.7	Synthèse	141
10.7.1	Le modèle de concordance	144
10.7.2	Inventaire du contenu en matière-énergie de l'Univers	147
11	L'Univers noir	147
11.1	Propriétés et nature de l'énergie sombre	147
11.2	Nature de la matière noire	153
11.2.1	Matière noire ou MOdified Newtonian Dynamics?	153

11.2.2	Nucléosynthèse primordiale et nécessité d'une composante de matière exotique	156
11.2.3	Les candidats possibles de matière noire	157
12	L'histoire thermique de l'Univers et la nucléosynthèse primordiale	162
12.1	Transition matière-rayonnement	163
12.2	Découplage et recombinaison	165
12.3	Nucléosynthèse primordiale des éléments légers	167
12.4	Comparaison avec les observations	169
12.5	Contrainte sur la fraction de baryons	169
13	ANNEXES	172
13.1	Annexe A: Des objectifs pour la cosmologie de la prochaine décennie	173
13.2	Annexe B: Projection de la fonction de corrélation	174
13.3	Annexe C: Théorème du viriel	176
13.4	Annexe D: La sphère isotherme singulière	178
13.5	Annexe E: Angle de déflexion et densité de matière	182
13.6	Annexe F: Notions sur les tenseurs	186
13.6.1	Vecteurs contravariants	186
13.6.2	Vecteurs covariants	186
13.6.3	Tenseurs	187
13.7	Annexe G: Du tenseur métrique au tenseur d'Einstein: cas d'un univers homogène et isotrope	191
13.7.1	Tenseur métrique	191
13.7.2	Symboles de Christoffel	192
13.7.3	Tenseur de Ricci	195
13.7.4	Tenseur d'Einstein	198
13.8	Annexe H: Perturbations cosmologiques et formation des structures	199
13.8.1	Les équations de la croissance des perturbations	199
13.8.2	Croissance linéaire	202
13.8.3	Analyse du champ de densité dans l'espace de Fourier	205
13.8.4	Le spectre primordial des fluctuations	210
13.8.5	La croissance hiérarchique des structures	212
13.8.6	La croissance non-linéaire des perturbations cosmologiques	212
13.8.7	La fonction de masse de Press-Schechter	214
13.9	Annexe I: Formulaire aide-mémoire	218
13.10	Annexe J : Table des grands moyens d'observations astronomiques mondiaux	221

13.11 Annexe K: Acronymes utiles 231

Bibliographie

Compte tenu de la grande diversité d'origine et d'objectif des étudiants, ces références bibliographiques couvrent un domaine assez vaste en niveau et en contenu.

- F. Bernardeau, *Cosmologie. Des fondements théoriques aux observations*. EDP Sciences/CNRS Editions. 2007.
- S. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley. 2004.
- F. Combes, P. Boissé, A. Mazure, A. Blanchard, *Galaxies et cosmologie*. InterEditions/CNRS. 1991 (version anglaise, revue et augmentée, par Combes, Boissé, Mazure, Blanchard, Seymour, Springer 2006).
- M. Lachièze-Rey, *Initiation à la cosmologie*, Masson 2004.
- J. Merleau-Ponty, *Cosmologies du XXIème siècle*, Gallimard. 1965.
- C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman. 1973.
- T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press. 1993.
- T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics Volume III: Galaxies and Cosmology*, Cambridge University Press. 2002.
- J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press. 1999.
- P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press. 1993.
- P. J. E. Peebles, *Large-Scale Structures of the Universe*, Princeton University Press. 1980.
- P. Peter, J.-P. Uzan *Cosmologie primordiale*, Belin. 2005 (version en anglais revue et augmentée, Oxford 2009).
- J. Rich *Principes de cosmologie*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique. 2002.
- P. Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology. An introduction*. Springer, 2006.
- H. Stephani, *General Relativity*, Cambridge University Press. 1996.
- S. Webb, *Measuring the Universe*, Springer. 2001.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley. 1972.
- S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press 2008.

1 Une brève histoire de la cosmologie moderne

- **1915** Einstein. Théorie de la relativité générale.
- **1920** Le "Grand Débat" entre Shapley (les nébuleuses spirales sont des nuages galactiques) et Curtis (les nébuleuses spirales sont des objets extragalactiques comme notre Galaxie). Preuve de la nature extragalactique des galaxies.
- **1922** Modèles de Friedmann. Première intuition du Big Bang.
- **1927** Modèles de Lemaître. Modèle de l'atome primordial.
- **1928-1929** Robertson, Hubble. Preuve observationnelle de l'expansion de l'Univers.
- **1933** Zwicky. Analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma. Naissance du problème de la *masse manquante*.
- **1940** Gamov. Suggestion de la nucléosynthèse des éléments dans l'Univers chaud. Prédiction d'un rayonnement résiduel fossile.
- **1940** Alpher & Herman. Premiers calculs de nucléosynthèse primordiale.
- **1948** Bondi, Gold, Hoyle. Modèle stationnaire.
- **1963** Découverte du premier quasar.
- **1965** Penzias & Wilson. Découverte du rayonnement cosmologique à $T=2.7$ K.
- **1965** Test de Gunn Peterson: l'Univers actuel est fortement ionisé.
- **Années 1970** Origine des galaxies et des structures: quand, où, comment?
- **Années 1970** Modèles isothermes (bottom-up) et adiabatiques (top-down) en confrontation.
- **Années 1970** Découverte de la forêt Lyman-alpha
- **1971** Première suggestion que les amas de galaxies sont baignés par un gaz chaud étendu (démonstration qu'il s'agit de rayonnement de freinage en 1986).
- **1981** Mise en évidence observationnelle des courbes de rotation plates des galaxies spirales. Évidence de halo de *matière noire*?
- **Années 1980** Echec des modèles de formation des structures avec matière baryonique seule. Naissance des modèles avec matière non-baryonique: Hot Dark Matter (HDM, s'apparente aux modèles top-down) et Cold Dark Matter (CDM, s'apparente aux modèles bottom-up).
- **1981** Guth. Théorie de l'inflation. Apporte un cadre théorique expliquant les problèmes de la "platitude" de l'Univers et de l'Horizon. Prédit le spectre de fluctuation primordiale.
- **1985** Arcs gravitationnels. Preuve directe que les amas de galaxies sont dominés par leur contenu en matière noire.
- **1986** Le *Center for Astrophysics* (CfA) redshift survey: mise en évidence de la structuration tri-dimensionnelle des galaxies. Elles se trouvent disposées sur les parois de gigantesques bulles dont l'intérieur semble vide de lumière.

- **1988** Comptage ultra-profond des galaxies, excès de galaxies bleues.
- **Années 1990-2000:** Expériences de micro-lensing gravitationnelle MACHO et EROS pour la détection de candidats matière noire formés d'objets compacts dans le halo de notre Galaxie. Les résultats après 10 ans montrent qu'il s'agit d'une composante sous dominante, voire négligeable de notre halo.
- **1992** COBE: spectre de corps noir du rayonnement fossile. $T=2.725$ K. Carte des fluctuations de température du rayonnement cosmologique. Observations compatibles avec une origine purement gravitationnelle, un spectre de puissance des fluctuations invariant d'échelle et des structures engendrées par un champ de fluctuation de densité gaussien.
- **1996** Découverte du fond diffus infrarouge.
- **1997-1999** Diagramme magnitude-distance des supernovae de type Ia. Preuve que l'Univers est accéléré. Compte tenu des connaissances actuelles, la constante cosmologique est vraisemblablement non nulle. Emergence du concept d'énergie sombre.
- **1995-2000** Le Hubble Key programme: $H_0 = 72 \pm 8$ km/s/Mpc (Freedman et al. 2001).
- **1997-2003** Le relevé spectroscopique *2-degree Field* (2dF) et le relevé photométrique et spectroscopique *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).
- **2000** BOOMERANG et MAXIMA: mise en évidence du premier pic (appelé pic acoustique) du spectre des fluctuations de température du rayonnement cosmologique qui démontre que notre univers est vraisemblablement plat.
- **2000-2002** Premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique. Premières déterminations de Ω_m et σ_8 .
- **2000-2002** Mesure du spectre de puissance et du facteur de biais aux grandes échelles avec les relevés spectroscopiques 2dF et SDSS.
- **2000-2002** Mise en évidence de l'oscillation des neutrinos prouvant la masse non-nulle des neutrinos (du moins, la somme totale des masses).
- **2003** WMAP-1: carte haute résolution des anisotropies du fond diffus cosmologique. Détermination précise d'une série de paramètres cosmologiques et validation du modèle du Big bang standard composé de matière noire froide et dominé par une composante d'énergie sombre. Premières réjections de certains scénarios d'inflation.
- **2005** SDSS puis 2dF: détection du pic acoustique des baryons dans la distribution à grande échelle des galaxies. Contraintes nouvelles sur Ω_m , sur la courbure Ω_k et sur le paramètre w_0 de l'énergie sombre.
- **2006** WMAP-3/SNLS. WMAP-3: première cartographie complète de la polarisation du CMB par WMAP. Avec les données du SNLS: détermination précise d'une série de paramètres cosmologiques et affinement des contraintes sur l'énergie sombre.
- **2006** "The Bullet Cluster": désaccord apparent entre la distribution de la matière noire déterminée par les effets de lentille gravitationnelle et la distribution de la matière baryonique vue par les observations X. Première confrontation directe et tangible entre l'hypothèse matière noire et l'hypothèse MOND.
- **2007** Reconstruction de la distribution tri-dimensionnelle de la matière noire par analyse des effets de distorsion gravitationnelle avec le relevé COSMOS.

- **2008** Première mesure du cisaillement gravitationnel cosmologique et de la distribution de la matière noire aux très grandes échelles (échelles où la physique linéaire, bien connue, s'applique sans réserve) avec le CFHTLS. Mesure de $\sigma_8 - \Omega_m$ par le "cosmic shear" .
- **2008** Publication de l'analyse des observations de WMAP après 5 ans (WMAP-5).
- **2008** Lancement du LHC (remise en route avec succès en octobre 2009).
- **2009** Découverte de l'objet astrophysique compact le plus lointain connu à ce jour. Source visible associée à un Gamma Ray Burst (GRB 090423) à $z = 8.3$.
- **2009** Lancement des satellites Planck et Herschel.

2 Notations, conversions, échelles et quantités usuelles

- $1\text{Jy} = 1 \text{ Jansky} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$
- $1 \text{ GeV} = 1.16 \times 10^{13} \text{ K} = 1.7827 \times 10^{-24} \text{ g} = 5.0684 \times 10^{13} \text{ cm}^{-1} = 1.5192 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$
- $1 \text{ Gauss} = 8\pi \times 1.9084 \times 10^{-40} \text{ GeV}^4$
- Domaine Radio: $\lambda = 30\text{cm} - 10\text{m}$
- Domaine micro-onde et submillimétrique: $\lambda = 0.02\text{cm} - 30\text{cm}$
- Domaine infrarouge: $\lambda = 0.01\text{cm} - 8000 \text{ \AA}$
- Domaine visible et UV: $\lambda = 8000 \text{ \AA} - 100 \text{ \AA}$
- Domaine X et γ : $\lambda = 0.003 \text{ \AA} - 100 \text{ \AA}$
- $1' = 1 \text{ minute d'arc} = 180 h^{-1} \text{ kpc}$, pour $z = 0.3$, $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$

- $c = \text{célérité de la lumière} (2.998 \times 10^{10} \text{ cm.s}^{-1})$,
- $G = \text{constante de la gravitation} = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3\text{g}^{-1}\text{sec}^{-2}$
- $k_B = \text{constante de Boltzmann} = 1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
- $\hbar = \text{constante de Planck} = 1.05 \times 10^{-27} \text{ cm}^2\text{g s}$,
- $m_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} = \text{masse de Planck} = 2.177 \times 10^{-5} \text{ g} = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$
- $l_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3} = \text{longueur de Planck} = 1.616 \times 10^{-33} \text{ cm} = 8.189 \times 10^{-20} \text{ GeV}^{-1}$
- $t_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^5} = \text{temps de Planck} = 5.391 \times 10^{-44} \text{ s}$
- $\rho_{Pl} = c^5/\hbar G^2 = \text{densité de Planck} = 5.158 \times 10^{93} \text{ g cm}^{-3}$
- $\sigma = \text{constante de Stefan} = 5.670 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$
- $m_p = \text{masse du proton} = 1.672 \times 10^{-24} \text{ g} = 938.27 \text{ MeV}$
- $m_n = \text{masse du neutron} = 1.674 \times 10^{-24} \text{ g} = 939.57 \text{ MeV}$
- $m_e = \text{masse de l'électron} = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g} = 0.5110 \text{ MeV}$
- $\sigma_T = \text{section efficace Thomson} = 6.652 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$

- $L_\odot = 1 \text{ luminosité solaire} = 4 \times 10^{33} \text{ erg.sec}^{-1}$
- $M_\odot = 1 \text{ masse solaire} = 2 \times 10^{33} \text{ g}$
- $h = 1$ si $H_0 = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

- $1 \text{ Mégaparsec (Mpc)} = 3.08 \times 10^{24} \text{ cm}$

- Masse des galaxies 10^6 - $10^{13} M_\odot$
- Masse des amas de galaxies $\approx 10^{14}$ - $10^{15} M_\odot$
- Dimension d'un amas de galaxies 1-5 Mpc
- Temps de traversée d'un amas par une galaxie: $\approx 10^9$ ans
- Dimension d'un superamas 10-30 Mpc
- Diamètre des structures en "bulles" ≈ 50 Mpc
- Epaisseur des structures en "bulles" ≈ 5 Mpc
- Constante de Hubble: $H_0=70 \pm 15 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} = 0.70h \times (9.778 \text{ Gyr})^{-1}$
- Dimension de l'Univers (distance de Hubble): $2997.9 h^{-1} \text{ Mpc} = 9.2506 \times 10^{27} h^{-1} \text{ cm}$
- Temps de Hubble: $H_0^{-1}=9.8 \times 10^9 h^{-1} \text{ ans}$
- Densité de l'Univers: $\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29} \Omega h^2 \text{ g cm}^{-3} = 1.05 \cdot 10^4 \Omega h^2 \text{ eV cm}^{-3}$
- Densité numérique de photons: $n_\gamma = 411 \text{ cm}^{-3}$
- Densité numérique de neutrinos: $n_\nu = 112 \text{ cm}^{-3}$
- Rapport baryon sur photon= $\eta_B = n_B/n_\gamma = 5.2 \times 10^{-10}$
- Redshift à l'équivalence: $z_{eq} = 2.4 \times 10^4 \Omega_m h^2$
- Température à l'équivalence: $T_{eq} = 5.6 \text{ eV } \Omega_m h^2$
- Redshift au découplage: $z_{dec} = 1088 \pm 2$
- Température au découplage: $T_{dec}=2970 \pm 10 \text{ K}=0.26 \text{ eV}$
- Redshift de la recombinaison: $z_{rec}=1360$

- Le *Modèle de concordance*: ensemble des paramètres cosmologiques définissant le modèle d'univers homogène et isotrope le plus vraisemblable compte tenu de l'ensemble des observations cosmologiques.
 - Univers "plat" : $\Omega_k = 0$
 - $\Omega_m \simeq 0.27$
 - $\Omega_{CDM} \simeq 0.23$
 - $\Omega_\Lambda \simeq 0.72$
 - $\Omega_b \simeq 0.02 h^2$ (*i.e.* $\simeq 0.04$ pour $H_0 = 72$)
 - $h \simeq 0.7$
 - Age de l'Univers: $\simeq 13.7$ Gyrs.
 - $n_s \simeq 1$

3 Introduction

La cosmologie a pour objet l'étude physique des propriétés, de la formation et de l'évolution de l'Univers et de ses constituants pour en expliquer l'origine, sa structuration actuelle et son devenir. C'est un champ extraordinairement vaste et parfois spéculatif qui couvre des domaines de la physique très divers. La figure 1 tente d'en dégager schématiquement quelques grandes orientations.

Les objectifs de la cosmologie la placent dans une situation assez inconfortable puisque, par nature, ses préoccupations peuvent la conduire bien au-delà du cadre de la science. Mais dans ce cours, nous aborderons des terrains plus solides de la "cosmologie physique" qui cherche à fonctionner selon les règles et les méthodes des sciences physiques.

La cosmologie physique s'appuie notamment sur une théorie de la gravitation, la relativité générale, le Principe Cosmologique, et des faits observationnels bien établis, comme l'expansion de l'Univers, le rayonnement cosmologique fossile et la nucléosynthèse primordiale. Le modèle du Big Bang est un des plus remarquables succès de la cosmologie physique du XX^{ième} siècle. Même s'il est important de conserver à l'esprit que des cosmologies alternatives sont proposées, il faut bien avouer qu'aucune n'est en mesure d'expliquer de façon aussi simple la plupart des phénomènes observés dans l'Univers. C'est pour cette raison, et aussi parce que c'est une connaissance préalable incontournable à des recherches plus spéculatives, que je me concentrerai sur cette cosmologie standard.

Ces notes correspondent à un cours de niveau Master de physique M2. Je me concentre sur les bases qui constituent une culture générale en cosmologie. J'insiste plus particulièrement sur la situation des données observationnelles, les modèles d'univers, les tests observationnels des modèles cosmologiques, l'histoire thermique de l'Univers et la nucléosynthèse primordiale. La formation des structures, la physique du fond de rayonnement diffus cosmologique, l'Univers primordial et l'évolution des galaxies sont discutés dans d'autres cours (voir par exemple les cours du Master de Physique M2, option cosmologie, de l'Université Pierre et Marie Curie) ou bien dans les annexes, lorsque c'est nécessaire. Si on se reporte à l'organisation décrite sur la figure 1, ce cours exclut la physique de l'Univers primordial et n'abordera qu'en partie la formation des structures ou bien le régime non-linéaire.

Le cours suppose des notions de relativité générale et de calcul tensoriel. Il demande aussi des connaissances qui débordent du programme que je me suis fixé et qui émargent sur certains points d'autres cours de cosmologie ou de physique galactique et extragalactique. J'ai donc ajouté dans ce document quelques compléments utiles que j'ai déportés dans une série substantielle d'annexes. Ceci devrait permettre de conserver une certaine autonomie à l'ensemble. Ces annexes contiennent aussi certains calculs qu'il ne sera pas possible de refaire pendant le cours, mais je conseille vivement aux étudiants de s'y plonger, à titre d'exercice. Ils seront certainement utiles aussi aux étudiants salariés ou accumulant les options et qui ne pourraient pas suivre la totalité des cours d'un Master de physique, spécialisation astrophysique.

J'emprunte parfois des illustrations, des tables et certains commentaires d'ouvrages et d'articles de la littérature. Mais certaines références sont peut être imprécises ou inexactes, d'autres ont pu être omises et pour la plupart, je n'ai demandé aucune autorisation aux auteurs ou aux éditeurs. Pour ces raisons je tiens donc à signaler que ce cours ne peut être diffusé sans mon accord.

THEORIE GRAVITATION THEORIES GRANDE-UNIFIEES
PRINCIPE COSMOLOGIQUE

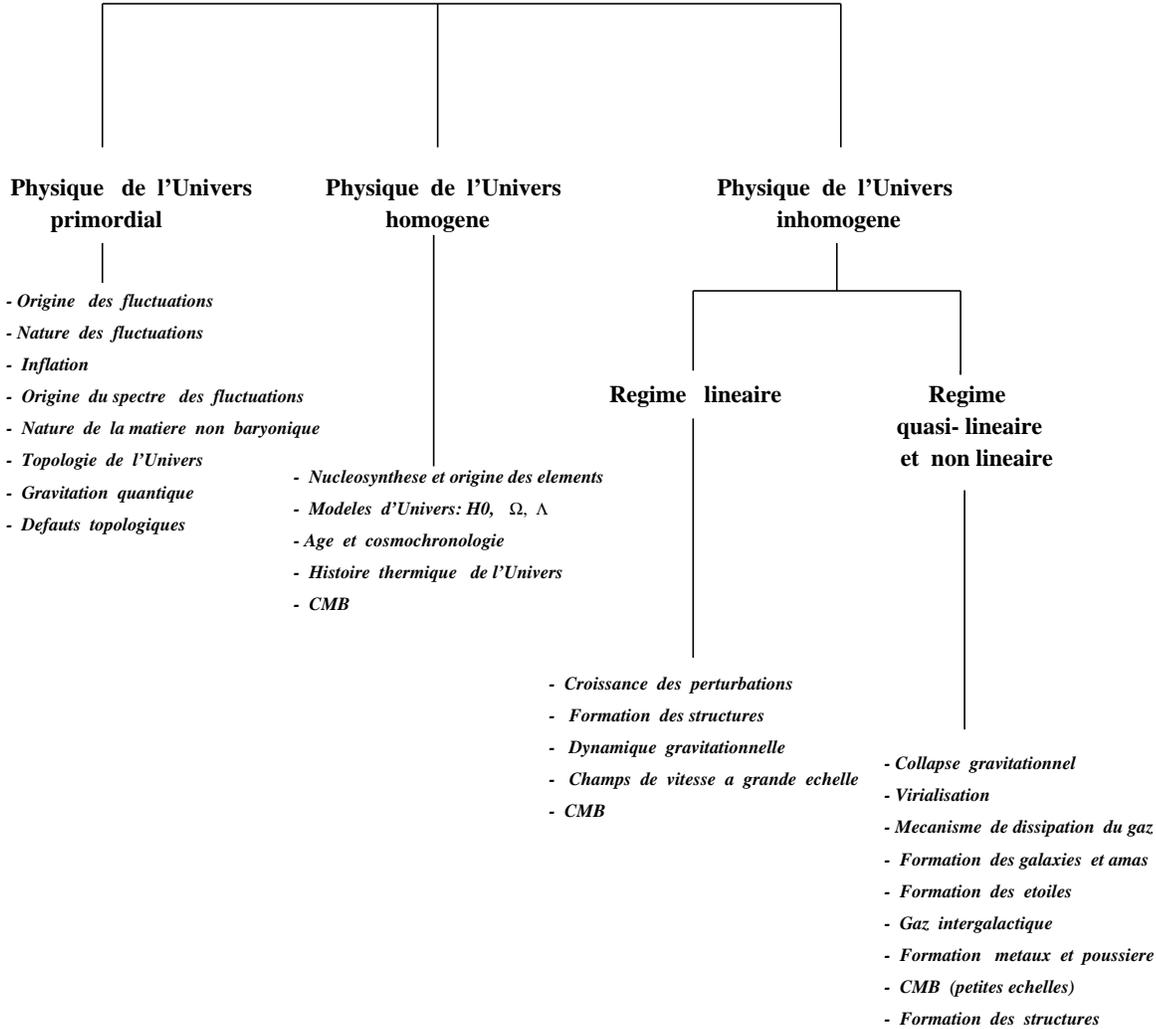


Figure 1: Tableau schématique des grandes thématiques de la cosmologie actuelle. Les séparations sont seulement indicatives pour tenter d'en dégager des axes. Mais chacune d'elles est fortement imbriquée avec les autres et il ne faut surtout pas considérer cette illustration comme une structuration figée reflétant une représentation unique de la cosmologie.

4 Contenu et propriétés de l'Univers observable

Avant de présenter les bases de la cosmologie physique, il est intéressant de préciser les propriétés les plus immédiates de l'Univers observable. Cette description préliminaire permet de dresser notre cadre général. On y reviendra fréquemment dans la suite du cours pour interpréter ces propriétés dans un cadre théorique plus précis, notamment lorsque nous aurons discuté les modèles d'univers et le modèle du Big Bang.

L'Univers est composé pour l'essentiel de neutrinos, de photons, de matière baryonique et (peut être) non-baryonique et peut être d'une composante d'énergie "sombre". Son contenu matériel nous est révélé pour l'essentiel par la lumière (dans son sens le plus général: des photons émis dans tout le spectre électromagnétique, voire d'autres traceurs). Au cours des vingt dernières années notre perception de la composition et de la structuration de l'Univers a été profondément modifiée. L'arrivée des télescopes géants, le développement rapide de l'astronomie spatiale et des nouveaux détecteurs ultrasensibles permettant d'explorer l'ensemble du domaine spectral électromagnétique et d'interpréter de nouveaux messagers (neutrinos, particules d'ultra-haute énergie, ondes gravitationnelles), et enfin la possibilité de cartographier d'immenses volumes d'univers, éventuellement sur de très longues bases de temps, sont les facteurs à l'origine de ces progrès. Mais l'interprétation de ces observations n'aurait pas été aussi approfondie sans la mise en place d'un cadre théorique solide, de quelques conjectures nouvelles, et sans l'explosion des modélisations d'univers par simulations numériques.

Pour faire court, le cosmologiste observateur voit un univers composé de galaxies, de quasars, de gaz, de matière noire, de particules de haute énergie et d'un bain de photons, de neutrinos et d'ondes gravitationnelles. Ce sont ces observables qui forment la représentation immédiate de l'Univers et l'ébauche du tableau que nous devons reconstituer. Pour des raisons historiques nos observations de l'Univers sont encore largement dominées par les données du spectre électromagnétique et pour cette raison, l'essentiel de la description préalable est fondée sur des observations astronomiques "classiques".

4.1 Propriétés statistiques des galaxies

D'un point de vue cosmologique les galaxies peuvent être perçues comme

- des points échantillonnant les grandes structures de l'Univers et qui témoignent des processus de formation des structures, ou bien
- comme des objets lumineux qui nous racontent l'histoire de la formation des étoiles, des processus très énergétiques internes, et des mécanismes de formation des galaxies.

Ce sont donc des objets privilégiés pour les cosmologistes.

Je ne discute ici que leurs propriétés globales et je vous renvoie aux cours sur les galaxies et noyaux actifs pour les détails concernant leur source d'énergie, leur morphologie, leur dynamique et leur évolution.

4.1.1 Masse

Les masses des galaxies varient de 10^6 (galaxies naines) à $10^{13} M_{\odot}$ (galaxies géantes d'amas de galaxies). Les analyses dynamiques des galaxies, par les courbes de rotation des galaxies spirales ou par la dynamique des étoiles des galaxies elliptiques (voir cours sur les galaxies), montrent que les galaxies sont dominées par un contenu invisible, appelé génériquement la matière noire.

La quantité de matière noire dans l’Univers est aujourd’hui assez bien estimée, mais sa nature est encore indéterminée. La fraction de matière totale est estimée en calculant le rapport *masse-sur-luminosité* de la galaxie rapporté à celui du Soleil (mais noté cependant: M/L). Pour les galaxies, $3 < M/L < 100$, avec une valeur médiane de l’ordre de 10-30. Des rapports M/L de 100 ont été mesurés dans des galaxies elliptiques ou des galaxies à coquilles. Mais les estimateurs sont parfois incertains et ces valeurs extrêmes demandent des confirmations par des méthodes indépendantes.

4.1.2 Dimension

Les dimensions des galaxies sont aussi très dispersées. Celles évaluées par la distribution des étoiles varient de 5 et 500 kpc, mais les valeurs typiques sont de l’ordre de 10 kpc. Certaines galaxies géantes d’amas de galaxies, dites galaxies cD, atteignent 100 kpc ou plus. La galaxie centrale de l’amas de galaxies Abell 2029 est à ce jour la plus grande galaxie connue (500 kpc). Les dimensions des halos des galaxies, qui pourraient être composés de matière baryonique de très faible luminosité et/ou de matière noire non-baryonique, sont inconnues. Leur extension pourrait atteindre 100 kpc, voire plus.

4.1.3 Fonction de Luminosité

On caractérise la distribution en luminosité des galaxies par la *fonction de luminosité*. Elle traduit la densité de lumière provenant des galaxies. La fonction de luminosité différentielle est le nombre de galaxies de luminosité entre L et $L + dL$. Les observations des galaxies indiquent que la fonction de luminosité globale, Φ , qui intègre les contributions de tous les types morphologiques de galaxies, est bien représentée par une loi empirique, appelée *fonction de Schechter*:

$$n(L) = \Phi(L)dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{dL}{L^*}, \quad (1)$$

avec

$$\frac{L}{L^*} = 10^{0.4(M^* - M)} \quad (2)$$

où Φ^* est une densité volumique caractéristique de galaxies, L^* une luminosité caractéristique, et M^* la magnitude correspondante. Ces quantités traduisent l’inflexion de la fonction de la luminosité. Enfin α est une pente typique qui caractérise l’allure de la distribution aux faibles luminosités et donc la contribution des galaxies faibles à la quantité de lumière et de matière de l’Univers.

Les paramètres sont mesurés à partir des cartographies photométriques du ciel et des relevés spectroscopiques qui permettent de calibrer la densité volumique de galaxies et de lumière. Les valeurs du catalogue anglo-australien “2-degree-Field” 2dF¹ portant sur un échantillon de 221000 galaxies donnent, pour $\Omega_0 = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ et $H_0 = 100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$:

- $M^* = -19.65 \pm 0.02$, $\alpha = -1.05 \pm 0.02$, $\Phi^* = 0.0213 \pm 0.0002 \text{ h}^3 \text{ Mpc}^{-3}$,

alors que le relevé américain du *Sloan Digital Sky Survey*, ou SDSS² portant sur 145000 galaxies sont légèrement différents:

- $M^* = -20.44 \pm 0.01$, $\alpha = -1.05 \pm 0.01$, $\Phi^* = 0.0149 \pm 0.0004 \text{ h}^3 \text{ Mpc}^{-3}$.

¹Croton et al 2005, MNRAS 356, 1155

²Blanton et al 2003; ApJ 592, 819

Ces différences sont des effets de couleur, le 2dF étant basé sur une photométrie des galaxies en bande B alors que le SDSS est en bande r . Ces effets résultent du contenu en étoiles jeunes et vieilles et de l'obscurisation produites par les poussières. La figure 2 illustre parfaitement ces effets chromatiques. Comme ils sont corrélés au type spectral/morphologique des galaxies, on s'attend à une forte sensibilité au type de la galaxie. Elle est bien visible sur les fonctions de luminosité du relevé 2dF représentées sur la Fig. 4 qui divisent les populations de galaxies par type morphologique.

On peut calculer le nombre de galaxies par unité de volume dont la luminosité est supérieure à une limite L_{min} :

$$N(L > L_{min}) = \int_{L_{min}}^{\infty} \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) \frac{dL}{L^*} \quad (3)$$

$$= \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^\alpha e^{-y} dy \quad (4)$$

$$= \Phi^* \Gamma \left(1 + \alpha; \frac{L}{L^*} \right) , \quad (5)$$

$$(6)$$

où $\Gamma(a; y)$ est la fonction Gamma incomplète.

La densité numérique de galaxies intégrée sur la totalité des luminosités est donc

$$n_{gal} = \Phi^* \Gamma(1 + \alpha) \quad (7)$$

et nous donne immédiatement un ordre de grandeur de la contribution des galaxies à la densité de matière de l'Univers:

$$\rho_{gal} \approx \Phi^* \Gamma(1 + \alpha) h^3 \text{Mpc}^{-3} \times \langle M_g \rangle \approx 10^{-31} h^3 \text{ g.cm}^{-3} , \quad (8)$$

avec $\langle M_g \rangle \approx 10^{11} M_\odot$ est la masse moyenne d'une galaxie de l'échantillon.

On peut également déterminer la densité de luminosité:

$$\rho_L(L > L_{min}) = \int_0^{\infty} n(L) L dL \quad (9)$$

$$= L^* \Phi^* \int_{L_{min}}^{\infty} \frac{L}{L^*} \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) \frac{dL}{L^*} \quad (10)$$

$$= L^* \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^{(1+\alpha)} e^{-y} dy \quad (11)$$

$$= L^* \Phi^* \Gamma \left(2 + \alpha; \frac{L}{L^*} \right) . \quad (12)$$

$$(13)$$

Donc la densité de luminosité totale est

$$\rho_L = L^* \Phi^* \Gamma(2 + \alpha) . \quad (14)$$

Pour fixer les idées, une compilation des relevés spectroscopiques conduit aux valeurs typiques suivantes:

$$\rho_L = 2.0 \pm 0.2 \times 10^8 h L_\odot \text{Mpc}^{-3} , \quad (15)$$

le 2dF conduisant plutôt à³

$$\rho_L = 2.10 \pm 0.08 \times 10^8 h L_\odot \text{Mpc}^{-3} , \quad (16)$$

³Croton et al 2005, MNRAS 356, 1155

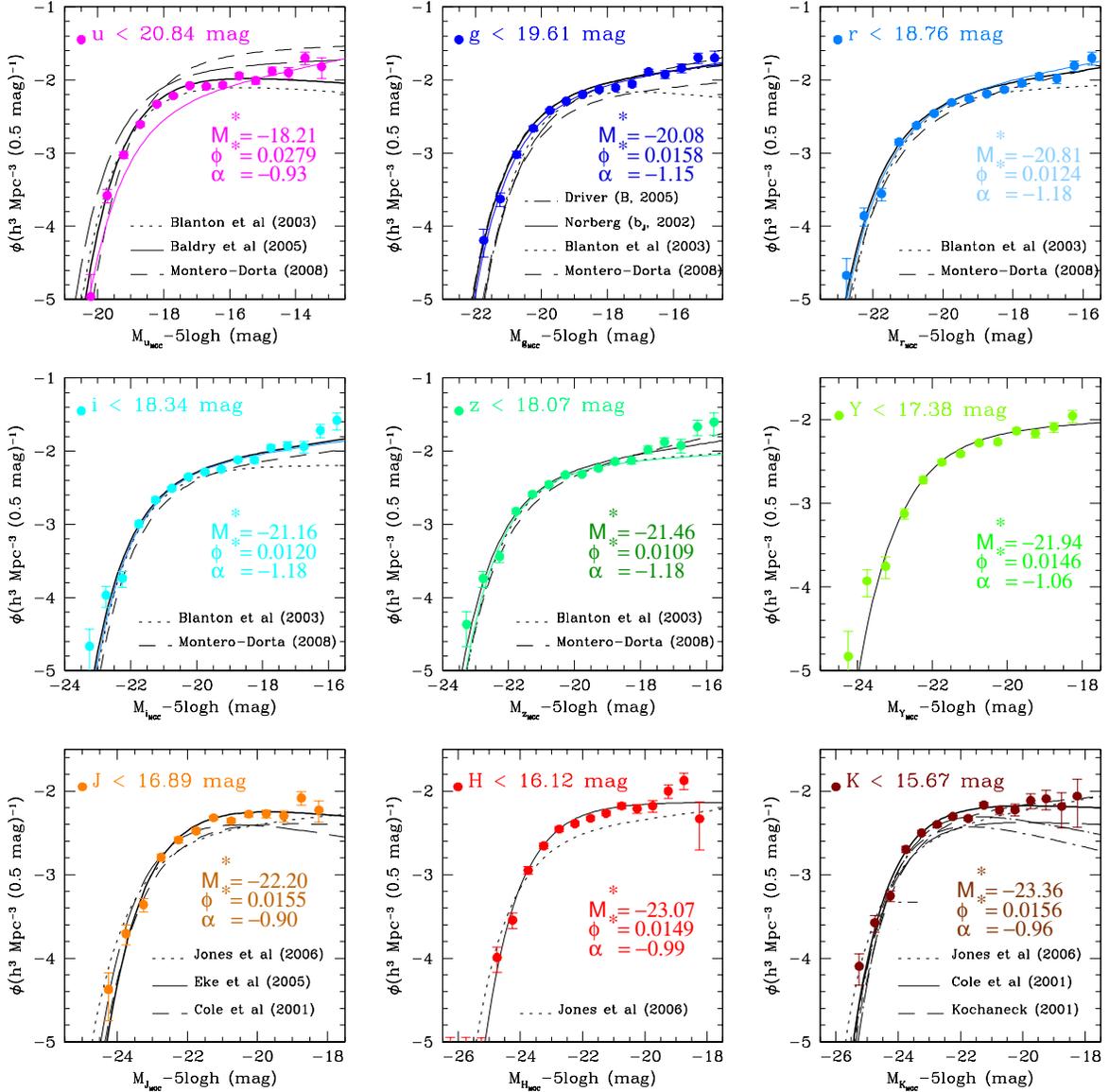


Figure 2: Fonctions de luminosité des galaxies de l’univers proche ($z < 0.1$) en fonction de la longueur d’onde. Ces données proviennent d’une analyse multi-longueur d’onde dans les filtres visibles et infrarouge proches $u, g, r, i, z, Y, J, H, K$ d’une population de 1500 à 3000 galaxies. Elles combinent des observations des relevés MGC (Millennium Galaxy Catalogue), SDSS, et UKIDSS LAS (UKIRT Deep Sky Survey Large Area Survey). D’après Hill et al 2010, arXiv:1002.3788.

et le SDSS à⁴

$$\rho_L = 1.84 \pm 0.04 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3} . \quad (17)$$

Comme le montre la figure 3, il existe une incertitude significative sur les valeurs des trois paramètres caractérisant la fonction de luminosité des galaxies. Ces incertitudes sont à la fois intrinsèques aux propriétés des galaxies et dues aux erreurs de mesure et aux effets chromatiques des populations stellaires et de l'absorption des poussières. Ainsi, pour le SDSS on a (voir aussi la Figure 2:

$$\rho_{L_B} = 1.90 \pm 0.20 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3} . \quad (18)$$

$$\rho_{L_r} = 2.30 \pm 0.20 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3} . \quad (19)$$

$$\rho_{L_z} = 3.60 \pm 0.40 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3} . \quad (20)$$

et

$$L_B^* = 1.07 \times 10^{10} h^{-2} L_\odot . \quad (21)$$

$$L_r^* = 1.45 \times 10^{10} h^{-2} L_\odot . \quad (22)$$

$$L_z^* = 3.37 \times 10^{10} h^{-2} L_\odot . \quad (23)$$

Il faut aussi remarquer que la densité de luminosité est déduite du monde "observable". Cela signifie que les galaxies de très faible luminosité ou de très faible brillance de surface, qui pourraient être indétectables même avec les instruments les plus performants, ne sont peut être pas pleinement prises en compte dans ce bilan. Nous feront ici l'hypothèse qu'elles constituent une contribution lumineuse largement sous dominante de l'Univers. A ce jour, rien ne permet d'infirmier cette hypothèse.

4.1.4 Preuve de l'expansion de l'Univers

C'est Hubble en 1929 qui a annoncé le premier la relation entre le décalage spectral et la distance des galaxies (Robertson avait constaté dès 1928 que les données de Slipher et Hubble montraient une relation entre distance et décalage spectral). Cette relation s'interprète comme une des preuves les plus tangibles de l'expansion de l'Univers.

La caractérisation de la loi d'expansion est simple dans son principe. On mesure les vitesses radiales des galaxies à partir de données spectroscopiques. Le décalage vers le rouge observé des raies d'émission et/ou d'absorption est ainsi mesuré directement:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} , \quad (24)$$

où λ_{obs} est la longueur d'onde d'une raie observée sur le spectre et λ_{em} la longueur d'onde vraie de la raie. On en tire donc la vitesse radiale d'une galaxie de l'Univers proche:

$$v = cz , \quad (25)$$

où c est la célérité de la lumière.

On peut mesurer la distance D des galaxies par diverses méthodes (voir la section sur l'échelle des distances extragalactiques). Par exemple, en utilisant la relation Période-Luminosité-Couleur des étoiles variables Céphéides.

Hubble a montré que cette loi s'exprimait simplement sous la forme

$$v = H_0 \times D . \quad (26)$$

H_0 est la constante de Hubble. C'est la *Loi de Hubble*. La figure 5 (haut) montre la remarquable linéarité observée, même sur des distances de l'ordre du Gigaparsec.

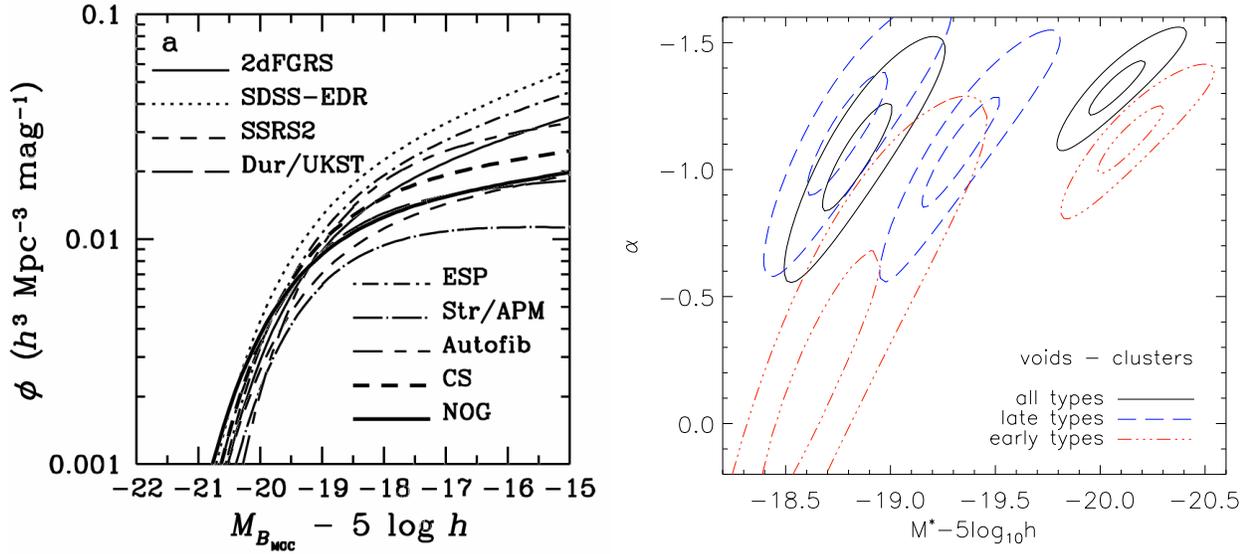


Figure 3: Diversité et dispersion de la fonction de luminosité des galaxies. A droite: fonctions de luminosité globales des galaxies obtenues par une série de relevés photométriques. L’allure générale des fonctions de luminosité est identique mais les paramètres caractéristiques ont des valeurs dispersés. Cette diversité reflète les incertitudes dans l’inter-calibration photométriques des catalogues et dans les erreurs de comptage des galaxies brillantes qui forment une population en faible nombre et donc difficile à évaluer avec précision. (d’après Liske et al 2003, MNRAS 344, 307). A gauche: estimations de la pente et de la normalisation des fonctions de luminosité du relevé 2dF en fonction du type de galaxies et de la densité locale (pour une couleur donnée les zones sous-denses sont les contours à gauche, celles sur-denses sont à droite). Les contours sont les incertitudes des ajustements à 1- et 2- σ . On voit que les propriétés des galaxies dépendent à la fois de leur type (morphologique et/ou spectral) et de l’environnement. Ces différences traduisent les effets combinés de l’histoire de la formation des grandes structures, celle de l’évolution stellaire et celle des collisions et fusions des halos galactiques. D’après Croton et al 2005, MNRAS 356, 1155.

Le décalage spectral affectant les fréquences, l’expansion se manifeste aussi sous la forme d’une dilatation temporelle des événements. L’analyse de la dilatation des courbes de luminosité des supernovae permet en particulier de vérifier cette interprétation avec précision (voir Figure 6). Ce phénomène est une preuve indépendante, et aussi solide que celles fondées sur les mesures de distances, de l’expansion.

Une façon alternative de mettre en évidence l’expansion consiste à exprimer la magnitude apparente d’une galaxie en fonction du décalage spectral (*redshift*). La magnitude apparente m est

$$m = -2.5 \log(F) + C, \quad (27)$$

où C est une constante est F la densité de flux de la galaxie. F est reliée à sa luminosité absolue, L , à sa distance, D , et donc au décalage spectral (voir Equation (26)), par:

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L}{4\pi} \frac{H_0^2}{c^2 z^2}. \quad (28)$$

Si l’on observe un type particulier d’objet céleste dont la propriété est d’avoir la même luminosité absolue quelle que soit la distance, alors L est bien connue et fixe, et la loi de Hubble implique

⁴Blanton et al 2003; ApJ 592, 819

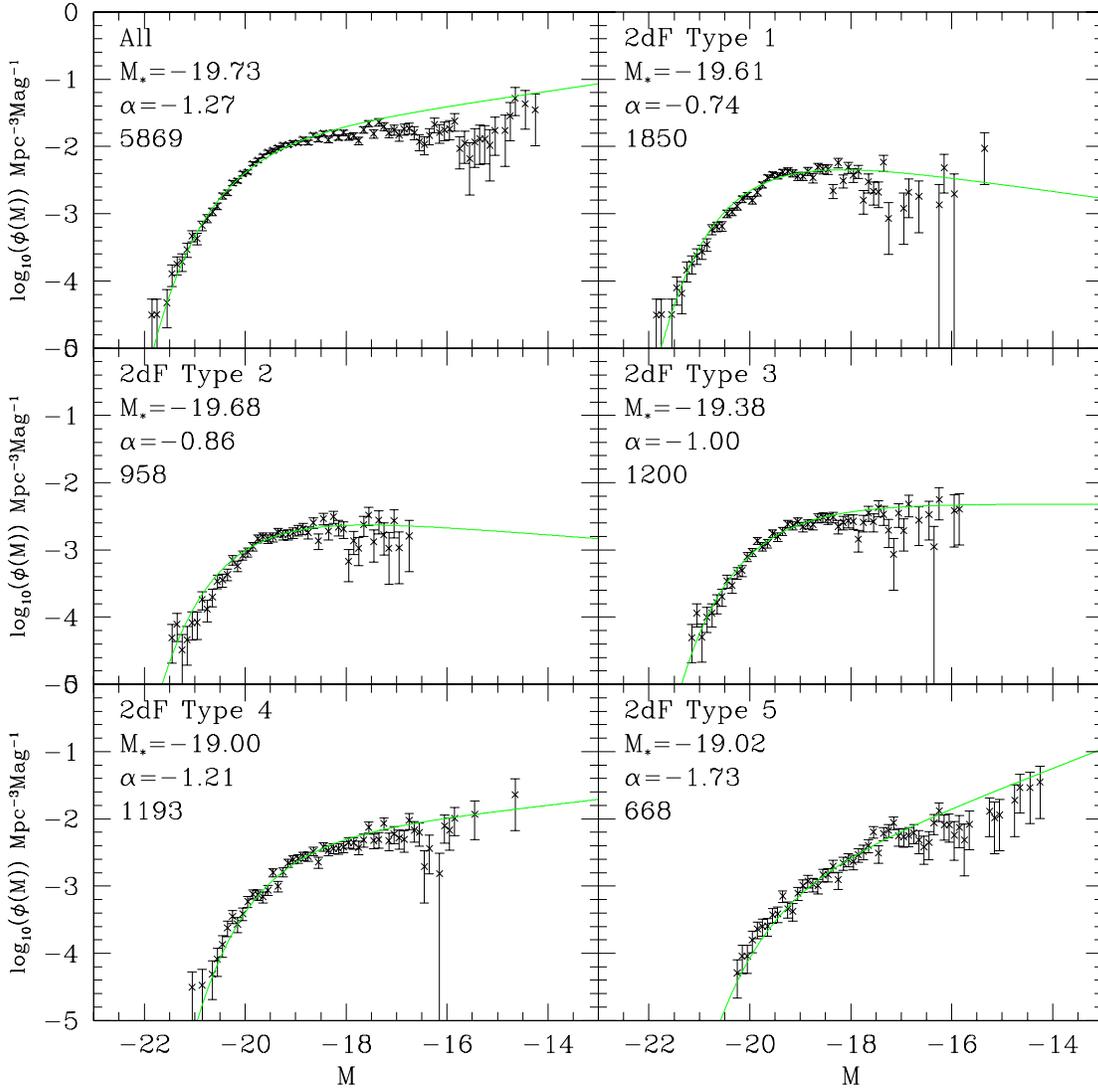


Figure 4: Mesure et ajustement de la fonction de luminosité différentielle des galaxies du relevé 2dF. Les galaxies ont été cataloguées en 5 ensembles selon leurs propriétés spectrales qui reflètent leur contenu en étoiles (âge, métallicité) et en poussières. Les paramètres des fonctions de luminosité sont légèrement différents des valeurs données dans le texte car ces figures correspondent à des données de 1999 portant sur un échantillon plus petit (d'après Folkes et al 1999, MNRAS 308, 459).

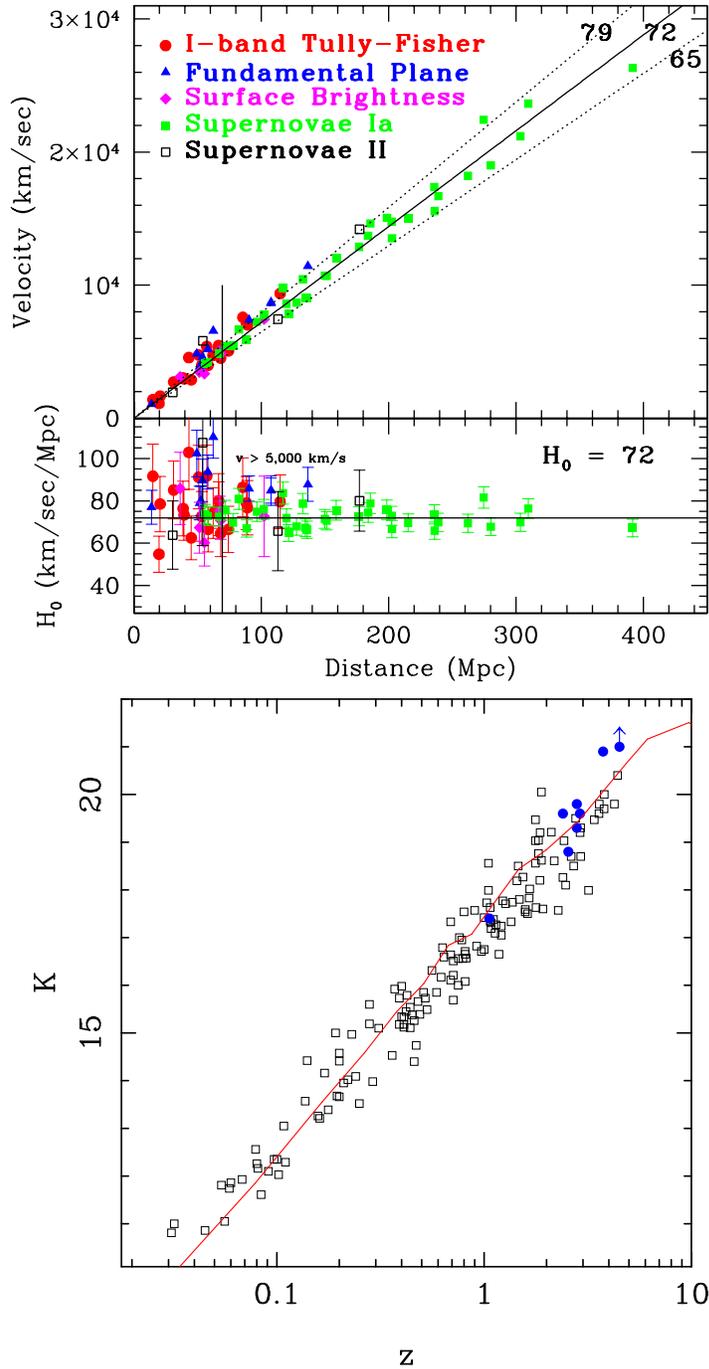


Figure 5: Loi de Hubble. Haut: mise en évidence sur un échantillon de supernovae. L'écart à la linéarité est faible et la validité de l'expansion est vérifiée sur des échelles cosmologiques. La pente de la droite qui exprime le taux d'expansion est la valeur de la constante de Hubble H_0 . D'après Freedman et al 2001, ApJ 553, 47. Bas: Diagramme de Hubble de radio-galaxies des échantillons 3CR et 6CR et d'un échantillon de radio-galaxies de grand redshift. En abscisse est porté le logarithme de z , en ordonnée les magnitudes apparentes en bande K (la bande K est un intervalle spectral centré sur $2.2 \mu\text{m}$ qui est utilisé pour des filtres infrarouges large-bande). La "loi de Hubble" (en rouge) est donc remarquablement bien suivie, même sur des échelles de l'ordre de ~ 5 Gpc. D'après Dunlop 2002, ASPC, 283, 381 (astro-ph/0203183).

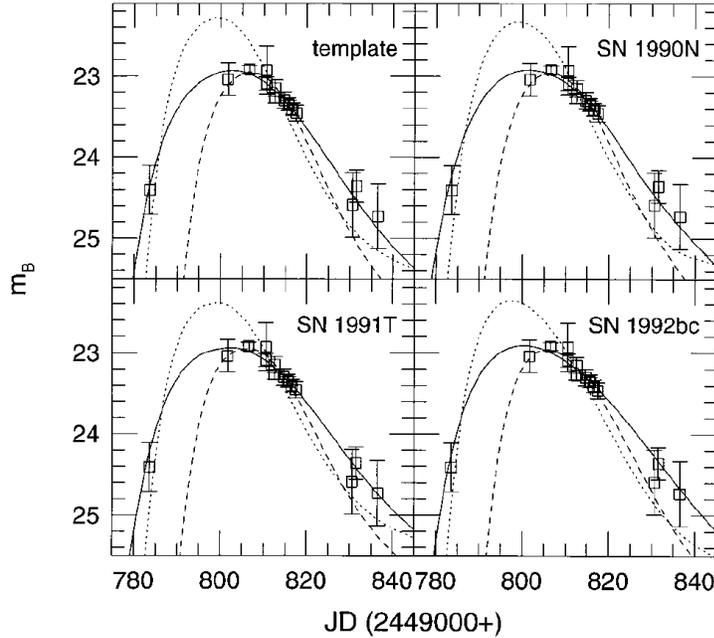


Figure 6: Dilatation des courbes de lumière de supernovae SNIa sous l’effet de l’expansion. Les lignes pointillés correspondent aux courbes de lumière de quatre SNIa proches dont les courbes de lumière ont été ajoutées en ne prenant pas en compte l’expansion. Les lignes continues correspondent aux mêmes SNIa mais en prenant en compte la dilatation temporelle produite par l’expansion (d’après Leibundgut et al 1996, ApJ 466, L21).

une relation linéaire entre le logarithme du décalage spectral z et la magnitude apparente:

$$m = 5 \times \log [z] + C' \quad (29)$$

Cette méthode permet de construire des *diagrammes de Hubble* à partir d’échantillons de galaxies distantes pour lesquelles on a de fortes présomptions que leur luminosité intrinsèque est identique et constante. C’est par exemple le cas des galaxies les plus brillantes des amas de galaxies ou de certaines radiosources (Fig. 5, en bas).

Enfin, il est possible d’établir l’expansion en mesurant directement l’évolution de la température fond diffus cosmologique avec le redshift. Comme on le verra par la suite, l’expansion adiabatique de l’Univers implique que sa température de corps noir décroisse progressivement en fonction du décalage spectral, z , suivant la loi simple

$$T(z) = T_0 \times (1 + z) \quad (30)$$

où T_0 est sa température actuelle. La figure 7 montre une compilation des données obtenues à ce jour sur la température du milieu extragalactique. Elle inclut notamment la plus récente ⁵ qui constitue aussi la mesure la plus convaincante d’un accroissement de température suivant la loi attendue.

4.1.5 Comptage des galaxies

Les comptages de galaxies consistent à évaluer la densité de galaxies projetées sur le ciel par intervalle de magnitude. Ils indiquent donc le nombre de galaxies visibles dans un volume

⁵Srianand, Noterdaeme, Ledoux, Petitjean 2008, A&A 482, L39.

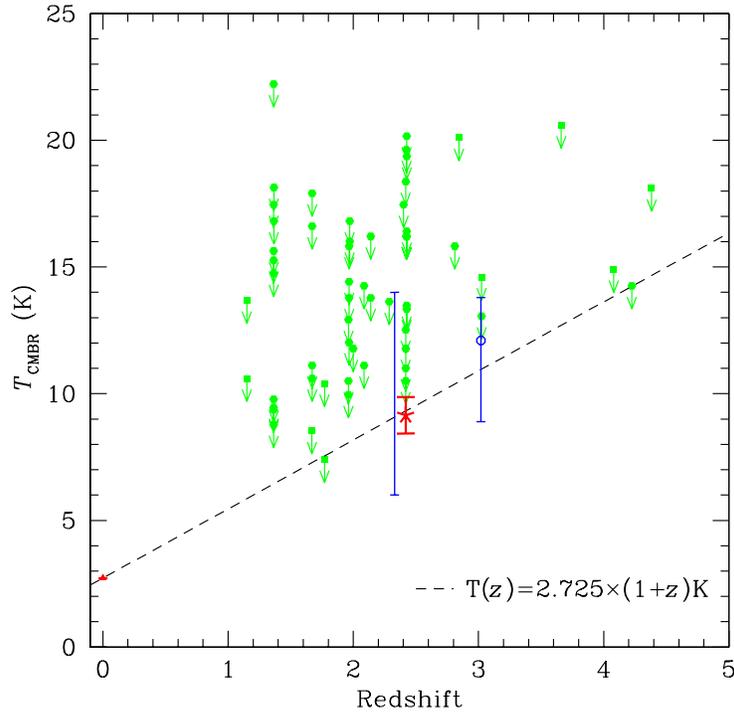


Figure 7: Mise en évidence de l’expansion de l’Univers par la mesure du taux d’accroissement de la température du corps noir en fonction du redshift. Le point de Srianand et al. (en rouge) place pour la première fois une valeur solide à un redshift de 2.33771 La température déterminée est de 9.15 ± 0.72 K, en accord avec la loi d’expansion (9.315 ± 0.007 K) telle qu’elle est déduite des observations du satellite COBE (traits pointillés). D’après Srianand et al 2008, A&A 482, L39.

fini de l’Univers. Mais c’est aussi une donnée importante pour contraindre les modèles cosmologiques. Deux informations y sont contenues: le volume d’univers sondé en projection et les effets d’évolution des galaxies qui affectent leur luminosité apparente et leur nombre dans chaque filtre d’observation.

La pente des comptages est par définition

$$\alpha = \frac{d \log N}{dm}, \quad (31)$$

et varie d’un filtre à l’autre et selon la profondeur. Pour les objets faibles ces pentes sont rapportées dans la Table 1. Elles sont indicatives, car ces pentes décroissent progressivement pour les comptages comprenant les sources les plus faibles. Comme on le voit sur les figures 9 et 8, au-delà de magnitude visible 25, la densité de galaxies dépasse 10^5 gal.deg $^{-2}$.

4.1.6 Plan Fondamental et Tully-Fisher

Bien qu’une discussion concernant le Plan Fondamental ou la relation de Tully-Fisher concerne plus la physique des galaxies que la cosmologie abordée dans ce cours, ces deux lois empiriques nous concernent plus particulièrement. Elles ont notamment joué un rôle ”historique” et déterminant dans la mesure des échelles des distances extragalactiques et de la constante de Hubble, H_o . Mais elles sont aussi des éléments importants de diagnostic sur la distribution de matière noire dans les halos de galaxies et pour notre compréhension de la formation des trous noirs centraux au coeur des galaxies.

Les galaxies elliptiques (resp. spirales) présentent certaines propriétés physiques qui permettent de construire des relations simples entre leur profil de luminosité et leur dispersion de vitesse

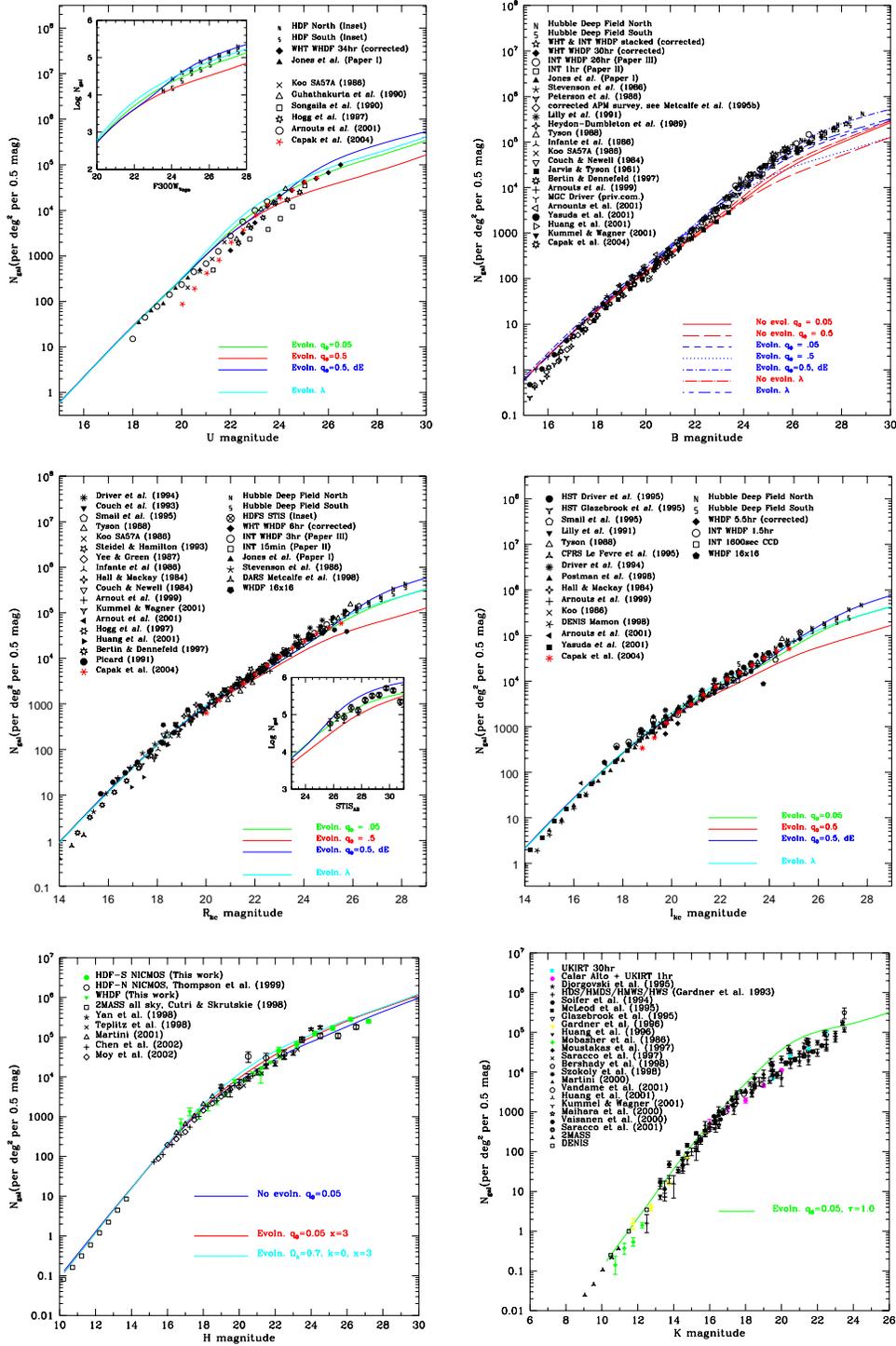


Figure 8: Comptages des galaxies dans les filtres couvrant les bandes spectrales 360 nm (U), 450nm (B), 720 nm (R), 820 nm (I), 1.7 μm (H) et 2.2 μm (K). Les mesures proviennent d'observations profondes des télescopes WHT, CTIO, NOAO, CFHT, VLT et Keck, des relevés 2MASS et DENIS, et du HST. D'après les compilations de N. Metcalfe 2003.

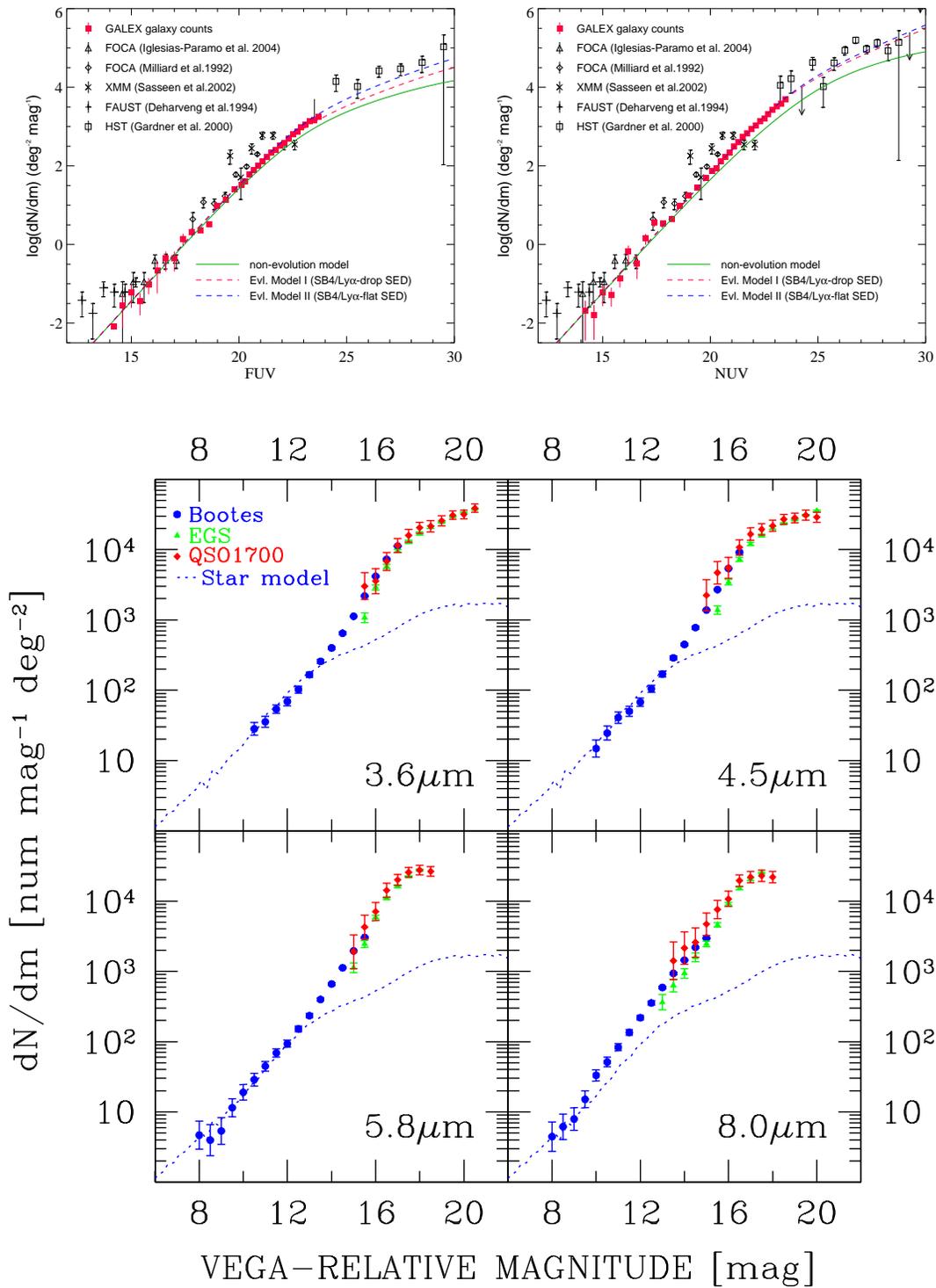


Figure 9: Comptages des galaxies dans les filtres des domaines contigus au visible et infrarouge proche (des bandes U à K). En haut: comptages en bande UV obtenus avec le satellite UV Galex (bandes spectrales des filtres FUV=1530Å et NUV=2310Å). En abscisse, les magnitudes apparentes; en ordonnée, le nombre de galaxies par degré-carrés et par intervalle de magnitude. D'après Xu et al 2005, ApJ 619, L11. En bas: comptages des galaxies dans les filtres du domaine infrarouge lointain obtenus avec le satellite Spitzer (bandes spectrales de 3.5 à 8 μ m). D'après Fazio et al 2004, ApJS 154, 39.

$\alpha = \frac{d \log N}{dm}$	Filtre	Limite	Référence
0.50	<i>U</i>	$U > 25.0$	Hogg et al 1997, MNRAS 288, 404
0.25	<i>B</i>	$B > 25.0$	Smail et al 1995, ApJ 449, L105
0.28	<i>V</i>	$V > 24.5$	Smail et al 1995 ApJ 449, L105
0.32	<i>R</i>	$R > 21.0$	Smail et al 1995 ApJ 449, L105
0.27	<i>I</i>	$I > 20.0$	Smail et al 1995 ApJ 449, L105
0.36	<i>J</i>	$J > 21.0$	Saracco et al 1999, A&A 349, 751
0.31	<i>H</i>	$H > 20.0$	Yan et al 1998, ApJ 503, L19
0.38	<i>K</i>	$K > 19.0$	Saracco et al 1999, A&A 349, 751

Table 1: Pentas des comptages de galaxies mesurées dans les bandes visibles et infrarouge proches.

(resp. vitesse de rotation). Ces relations jouent un rôle essentiel dans la mesure des vitesses individuelles des galaxies qui sont indispensables pour décrire les mouvements à grande échelle des galaxies.

Pour les galaxies elliptiques, il existe une corrélation entre la luminosité, L , la brillance de surface centrale, I_0 , et la dispersion de vitesse centrale des étoiles, σ_0 , qui place les galaxies sur un *Plan Fondamental*:

$$L \propto I_0^{-0.7} \sigma_0^3 . \quad (32)$$

Cette relation est une signature de l'état dynamique des galaxies elliptiques. Elle révèle que ces galaxies doivent avoir des rapports M/L stables et peu sensibles à leur masse dynamique. En effet, en vertu du théorème du viriel, on a

$$\sigma_0^2 \propto \frac{M}{r_0} , \quad (33)$$

où M est la masse de la galaxie et r_0 une échelle caractéristique.

Supposons que le rapport M/L varie peu et selon une loi simple de type

$$\frac{M}{L} \propto M^\alpha . \quad (34)$$

Alors, comme

$$L \propto I_0 r_0^2 \quad (35)$$

on s'attend à une loi du type

$$L \propto I_0^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \sigma_0^{-4 \frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \quad (36)$$

qui est proche de la loi observée si $\alpha \approx 0.25$.

L'existence d'un plan fondamental implique une relation simple entre le diamètre isophotal⁶, D_n , et la dispersion de vitesse. Cette relation $D_n - \sigma_0$, proposée par Dressler en 1987⁷,

$$D_n \propto \sigma_0^{1.4} \quad (37)$$

s'interprète aisément. En effet, on peut calculer la brillance de surface moyenne d'une galaxie elliptique en supposant qu'elles présentent toutes un profil de luminosité identique de la forme $I(R) = I_e f(R/R_e)$. Dans ce cas

$$I_n = \frac{2\pi I_e \int_0^{D_n/2} R f(R/R_e) dR}{\pi D_n^2/4} \quad (38)$$

⁶Le diamètre isophotal est la dimension mesurée du diamètre d'un objet jusqu'à une isophote limite donnée.

⁷Dressler, A. 1987, ApJ 317,1

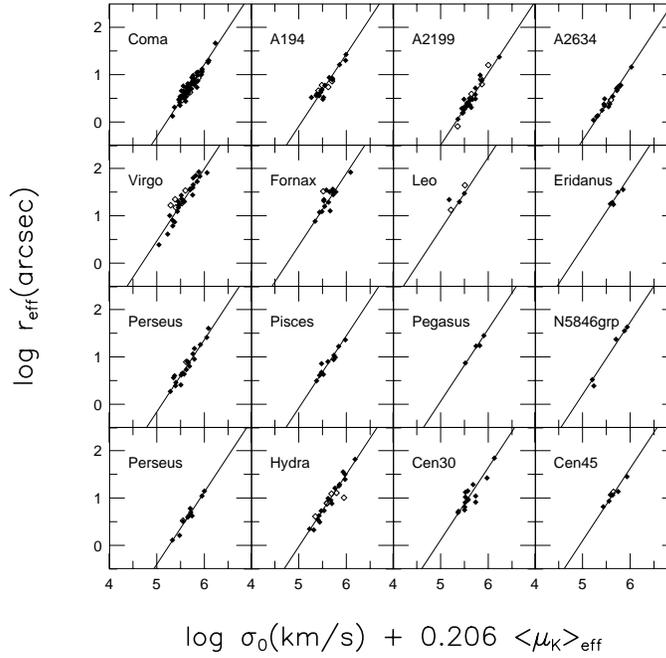


Figure 10: Détermination des paramètres du plan fondamental. En abscisse sont portées des combinaisons de la dispersion de vitesse centrale avec la brillance de surface en bande K et en ordonnée le rayon effectif (une échelle caractéristique des galaxies). L'échantillon porte sur des galaxies elliptiques de 9 amas de galaxies proches, ce qui permet de s'affranchir des biais possibles associés à la mesure de distance: pour chaque courbe, les galaxies sont toutes à la même distance.

Empiriquement, la loi est de la forme $f(x) \approx x^{-1.2}$. On peut donc intégrer l'équation précédente, ce qui conduit à une relation simple entre D_n et R_e :

$$D_n \propto R_e I_e^{0.8} . \quad (39)$$

L'existence du plan fondamental permet alors de remplacer R_e par σ_0

$$D_n \propto \sigma_0^{1.4} I_e^{0.07} . \quad (40)$$

La très faible dépendance avec I_e explique la relation $D_n - \sigma_0$.

Il existe une relation qui permet de localiser les galaxies elliptiques dans ce plan fondamental, c'est la relation de Faber-Jackson:

$$L \propto \sigma_0^\alpha \quad (41)$$

où $\alpha \approx 3 - 4$. L'origine de cette relation n'est pas totalement identifiée; elle provient vraisemblablement des mécanismes d'effondrement hiérarchique des structures (voir cours E. Audit).

Une relation formelle analogue existe pour les galaxies spirales. Elle est connue sous le nom de relation de Tully-Fisher⁸:

$$L \propto V_r^\alpha , \quad (42)$$

où V_r est la vitesse de rotation, mesurée à grande distance (de façon à mesurer la vitesse de rotation maximale englobant la contribution de toute la masse). L'indice α vaut environ 3 - 4. Il est très proche de 4 lorsque les observations de calibration sont en infrarouge.

L'origine de la relation de Tully-Fisher n'est pas vraiment comprise. Si l'on admet que le

⁸Tully, R. B., Fisher, J. R. 1977, A&A 54, 661

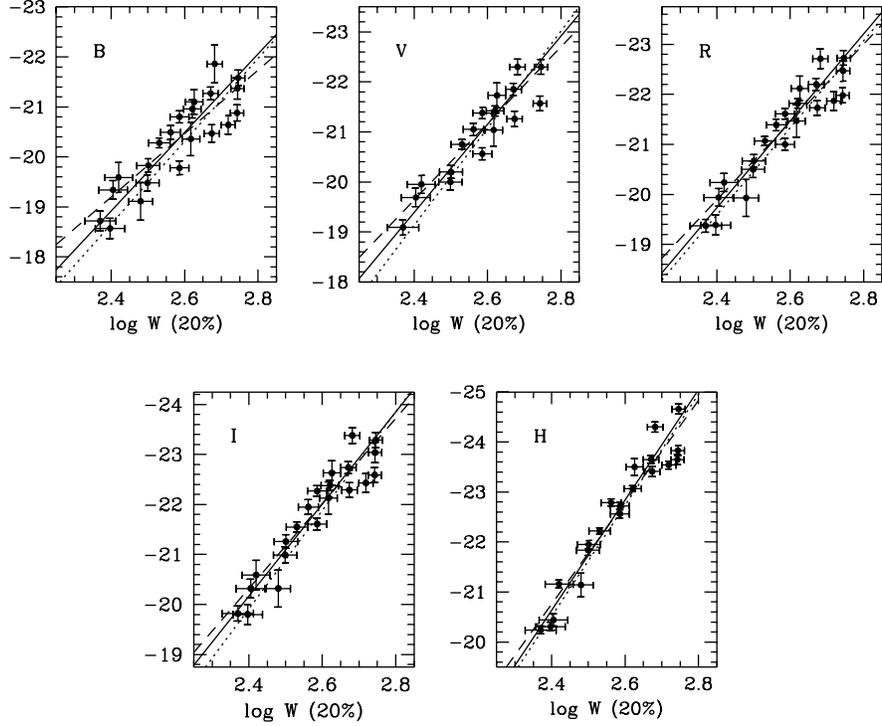


Figure 11: Luminosité absolue en fonction de la vitesse de rotation d'un échantillon de galaxies spirales. Les figures montrent la relation de Tully-Fisher pour une luminosité mesurée dans 5 filtres différents. C'est pour la bande infrarouge H centrée sur 1.6 micron que la relation est la moins dispersée, parce que les effets d'extinction par les poussières sont minimales. En revanche, la bande B est fortement atténuée ce qui explique la grande dispersion.

rapport M/L des spirales est constant le long du disque, alors on peut construire une relation de ce type. En effet, pour une particule du disque à la distance R du centre et tournant avec la galaxie à la vitesse V_r on a

$$m \frac{V_r^2}{R} = \frac{GM}{R^2} m . \quad (43)$$

Si l'on suppose que le rapport M/L est constant sur le disque et si l'on suppose que la brillance de surface du disque est constante, alors la luminosité totale, $L = \mu\pi R^2$ et $L = kM$, et donc

$$L \propto V_r^4 \quad (44)$$

Cependant, on sait que la brillance de surface n'est pas constante et que le rapport M/L varie aussi.

Même s'il est encore difficile d'expliquer la relation de Tully-Fisher, son impact est considérable car c'est un indicateur de distance qui contribue à la fois à la représentation tri-dimensionnelle de l'Univers, à la modélisation des champs de vitesse à grande échelle des galaxies et à la calibration d'indicateurs de distance cosmologiques.

4.2 Distribution spatiale et structuration

La distribution spatiale des galaxies est déterminée à partir des relevés spectroscopiques. Ils donnent accès à la distance des galaxies par la mesure du décalage spectral et en utilisant la *Loi de Hubble*.

4.2.1 L’Univers local

La distribution spatiale des galaxies permet de faire le lien avec la structuration à grande échelle de l’Univers visible.

La forte hétérogénéité des galaxies de notre voisinage est évidente aux toutes petites échelles. Notre galaxie (la Galaxie) appartient à un système dynamique, le Groupe Local, qui contient une cinquantaine de galaxies visibles dont deux systèmes dominants (voir fig.12:

- La Voie Lactée et ses galaxies voisines, dont le Grand Nuage de Magellan, le Petit Nuage de Magellan. Quelques galaxies naines font partie de ce sous-système, notamment la galaxie elliptique naine du Sagittaire (SagDEG=Sagittarius Dwarf Elliptical Galaxy) et d’autres galaxies naines des constellations de la Grande Ourse, du Dragon et du Sextan.
- M31, située à environ 900 kpc de la Voie Lactée, et ses galaxies satellites M32 et M110, ainsi que NGC 147, NGC 185 et d’autres galaxies faibles. La grande galaxie M33 est le troisième objet le plus brillant du Groupe Local mais ne semble pas constituer une sous-structure indépendante bien identifiée, comme pour M31 ou la Galaxie.

La dimension du Groupe Local est de l’ordre de 1 Mpc. Il est lui-même un petit élément du Superamas Local qui est dominé par l’amas de galaxies Virgo et qui contient aussi les amas Pegasus, Pisces, Cancer, Perseus et Coma Berenices. Le Superamas Local s’étend sur environ 50 Mpc (voir figure 13 et 14) et contient environ 50 000 galaxies visibles.

4.2.2 Cartographie de l’Univers lointain

Au-delà, les cartographies du ciel montrent une structure filamentaire fortement hétérogène. La figure 17 est une cartographie photométrique infrarouge du ciel en 3 bandes (J, H et K) des galaxies. Ce relevé porte le nom de ”2MASS” (Two Micron All Sky Survey) et montre clairement la structuration des galaxies et la différence marquée des propriétés des zones vides et pleines de galaxies.

Les relevés spectroscopiques qui décrivent la structure spatiale de l’Univers montrent qu’il est pour l’essentiel vide de matière lumineuse. Les galaxies s’y distribuent suivant une topologie analogue à celle d’une structure en bulles (ou à celle d’une structure en éponge) dont elles occupent les parois, alors que le reste de l’espace ne montre aucune composante visible. Cette architecture est bien visible sur la Fig. 18 du relevé 2dF. La dimension des bulles est de l’ordre de 50 Mpc, les “parois” ne dépassant pas 5 Mpc. C’est une distribution étonnante, mais qui est bien reproduite par les simulations numériques. L’effet de la gravitation dans le mécanisme de structuration est prépondérant.

On peut aller encore plus loin. La Fig. 18 révèle aussi la distribution des galaxies sur des échelles cosmologiques (le Gpc). Cette image spectaculaire montre que la structuration persiste même à grande distance, mais que le contraste diminue très sensiblement au-delà des échelles

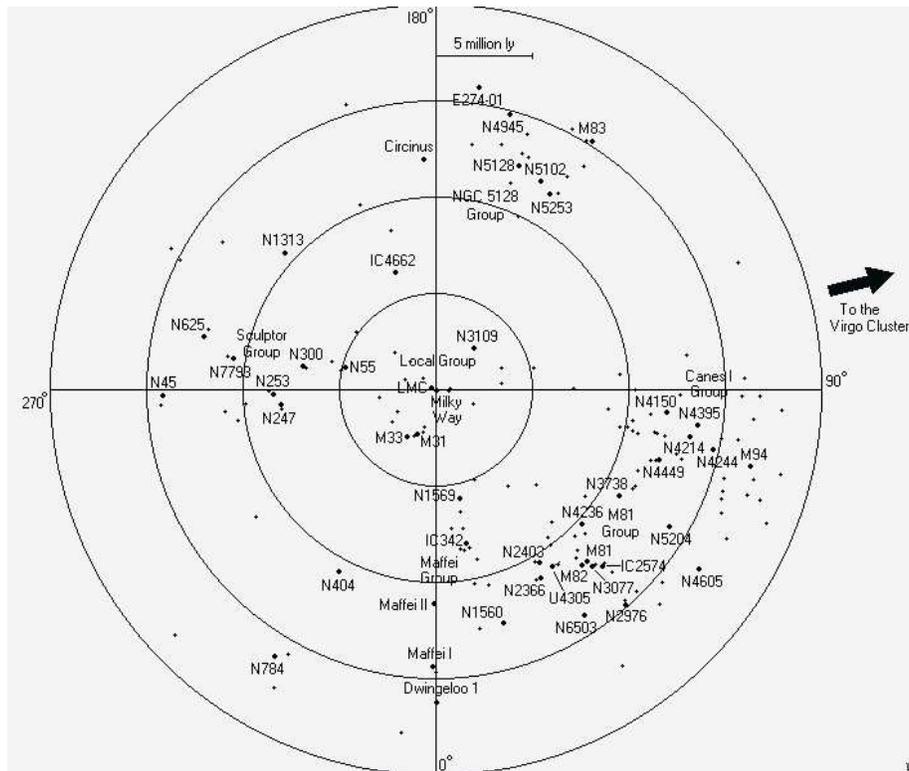


Figure 12: Distribution des galaxies les plus proches de notre Galaxie.

dépassant 100 Mpc. Il semble donc que la distribution à très grande échelle des galaxies tende à devenir plus homogène. En revanche, il est clair que la distribution des galaxies est quasi-identique dans toutes les lignes de visée et que nous pouvons considérer qu'elle est quasi-isotrope.

Ces cartographies tri-dimensionnelles de la distribution des galaxies dans l'Univers sont aujourd'hui bien interprétées par les simulations numériques. La figure 19 l'illustre parfaitement et de façon spectaculaire. Les distributions réelles des relevés 2dF et SDSS sont comparées avec des cônes extraits de la simulation cosmologique "Millennium" de Springel et al (2006). La ressemblance est frappante.

Au-delà, les relevés spectroscopiques ne peuvent plus couvrir des champs couvrant d'immense fraction du ciel. Par contre, ils ont vocation à sonder l'Univers profond dans des cônes étroits couvrant l'intervalle $0 < z < 5$ pour sonder l'histoire des galaxies. Le relevé VVDS (figure 20) montre la structuration des galaxies dans ce domaine de redshift. D'un point de vue de la compréhension des mécanismes de formation des structures, ce qui est important c'est de mesurer l'évolution de la structuration des galaxies et comment cette évolution dépend des types de galaxies (spirales, galaxies elliptiques, AGNs).

4.2.3 Distribution moyenne en redshift des galaxies

Grâce aux grands relevés spectroscopiques, on peut construire l'histogramme de la distribution en redshift des galaxies, comme par exemple sur la figure 15. Cette distribution montre des propriétés moyennes des galaxies: redshift moyen, largeur de la distribution, caractéristique de la queue de distribution des galaxies à très grand redshift. C'est donc une description globale et assez grossière, à l'opposé des cartes bi- et tri-dimensionnelles qui révèlent la structuration

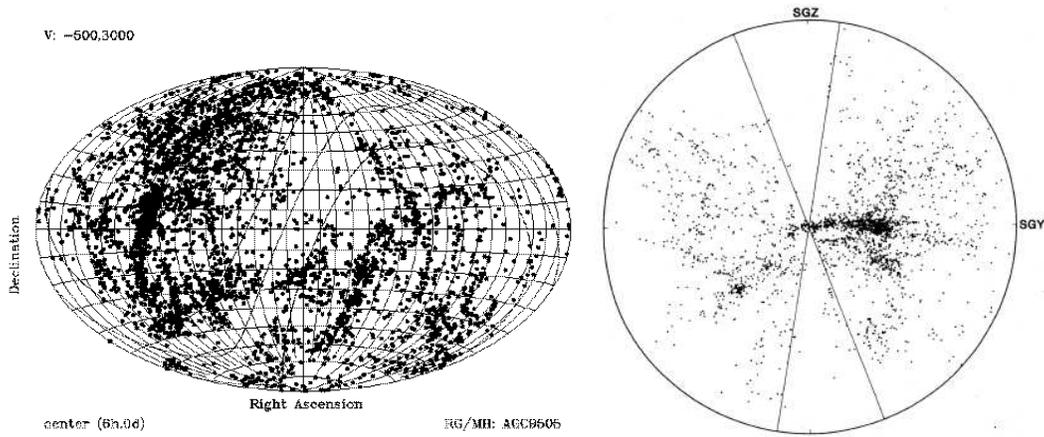


Figure 13: Le SuperAmas Local: à droite, carte du Superamas Local projeté sur le ciel. Chaque point représente une galaxie dont la vitesse de récession est inférieure à 3000 km/s (soit environ 50 Mpc). Les lignes tracées sur cette carte montrent la position du plan de la Galaxie. On voit clairement une asymétrie dans la distribution des points. Elle reflète le fait que notre Groupe Local est situé au bord du Superamas Local et donc, lorsqu'on regarde vers le centre du superamas on voit bien plus de galaxies que dans la direction opposée. La distribution des galaxies du Superamas Local est à peu près centrée sur l'amas de galaxie Virgo. Cette distribution forme un filament et donc notre Superamas Local est une structure aplatie, le Plan Supergalactique. L'image de gauche l'illustre clairement. Le Plan Supergalactique est représenté avec 2175 galaxies positionnées en coordonnées supergalactiques (SGX, SGY) dans un cercle de 50 Mpc. Le centre est la position de la Voie Lactée qui apparaît indiscutablement décentrée au sein de cette immense structure. Les deux cônes verticaux montrent la position de la zone d'extinction produite par les poussières de notre Galaxie (*zone of avoidance*).

en fonction de l'échelle angulaire.

La distribution dépend de la profondeur du relevé car plus il est profond plus on voit de galaxies faibles révélant à la fois des galaxies lointaines et des galaxies proches, mais intrinsèquement faibles. Comme ces galaxies n'ont pas nécessairement la même répartition spatiale que les galaxies "normales" ou proches, on s'attend à des modulations en fonction de la profondeur du relevé. Ces modulations ont donc un intérêt pour étudier les galaxies par sous-population et leur évolution en fonction du redshift.

Le relevé spectroscopique VVDS permet d'établir la distribution moyenne des galaxies jusqu'à une profondeur $I_{AB} = 24.0^9$. Une façon pratique de la représenter est par un modèle simple de la forme:

$$n(z) = \frac{\beta}{z_s \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right)} \left(\frac{z}{z_s}\right)^\alpha \exp\left[-\left(\frac{z}{z_s}\right)^\beta\right], \quad (45)$$

Pour le relevé VIMOS-Descart¹⁰, $\alpha = 2$, $\beta = 1.2$ et $z_s = 0.44$. Dans ce cas le redshift moyen est 0.92 et le redshift médian 0.84.

La profondeur des relevés photométriques ou morphologiques dépassant largement celle des relevés spectroscopiques la distribution en redshift des galaxies de ces catalogues devient plus incertaine. Elle est déterminée grâce à la mesure de *redshifts photométriques*, une technique qui consiste à calculer le flux (la photométrie) des galaxies dans plusieurs filtres (généralement visibles et infra-rouges) puis à ajuster un le redshift d'un spectre caractéristique de galaxie aux

⁹Le Fèvre et al 2005, A&A 439, 845

¹⁰van Waerbeke et al. 2005, A&A 429, 75

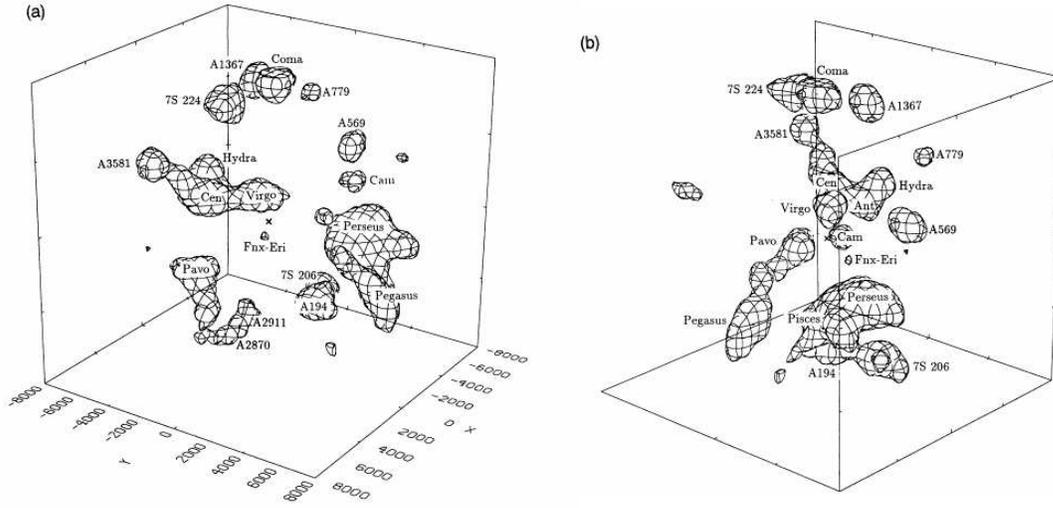


Figure 14: Représentation tri-dimensionnelle vue sous deux angles différents du voisinage de la Galaxie constituant le Superamas Local. Les mailles illustrent les zones à forte densité de galaxies. On remarque la grande hétérogénéité de notre environnement, notamment les immenses vides qui dominent le volume (D'après Hudson 1993, MNRAS 265, 43).

données photométriques. La calibration de la méthode se fait en comparant des redshifts spectroscopiques aux données photométriques, pour un grand échantillon de galaxies "brillantes" et un tout petit sous-échantillon de galaxies peu lumineuses. La précision des redshifts photométriques dépend du nombre de filtres, de la couverture spectrale explorée par les filtres et, bien sûr, de la précision de la mesure des magnitudes dans chaque filtre. En général on peut atteindre $\Delta(z_{phot}) \simeq 0.01$ contre $\Delta(z_{spec}) \simeq 0.001$. C'est suffisant pour déterminer une distribution moyenne des galaxies, mais trop imprécis pour distinguer leur structuration spatiale. La figure 16 montre la distribution en redshift des galaxies déduite des redshifts photométriques jusqu'à $r_{AB} = 25.5$ des galaxies du CFHTLS, calibrées à partir des relevés profonds Hubble Deep Field (HDF) Nord et Sud, et modélisée selon la loi donnée par l'Eq.(45).

4.2.4 Caractérisation de la structuration

Sous l'effet de la gravitation, les galaxies tendent à se regrouper. Cette tendance (en anglais, le *clustering*) modifie progressivement la distribution à grande échelle de la matière. La description de ses propriétés actuelles (voir par exemple la figure 21) permet d'établir un diagnostic permettant de comprendre et décrire l'histoire et les mécanismes de la formation des structures, et la nature de la matière noire (voir cours de E. Audit).

On admet que la cartographie de la distribution des galaxies permet en principe de caractériser celles des structures de matière. C'est une hypothèse dont la validité est discutable car les relations physiques entre galaxies et matière ne sont pas établies solidement. Néanmoins c'est un point de départ simple et tout à fait naturel.

Le tout premier estimateur statistique décrivant les propriétés de la distribution des galaxies est la fonction d'auto-corrélation, ou plus précisément la *fonction de corrélation à 2 points*. Elle décrit l'excès de probabilité de trouver une galaxie à une distance r d'une galaxie sélectionnée au hasard dans le champ d'observation, par rapport à une distribution aléatoire uniforme. C'est donc aussi la probabilité de trouver simultanément une galaxie dans un élément de volume dV_1 et une autre galaxie dans un élément de volume disjoint dV_2 et séparé d'une distance r de dV_1 .

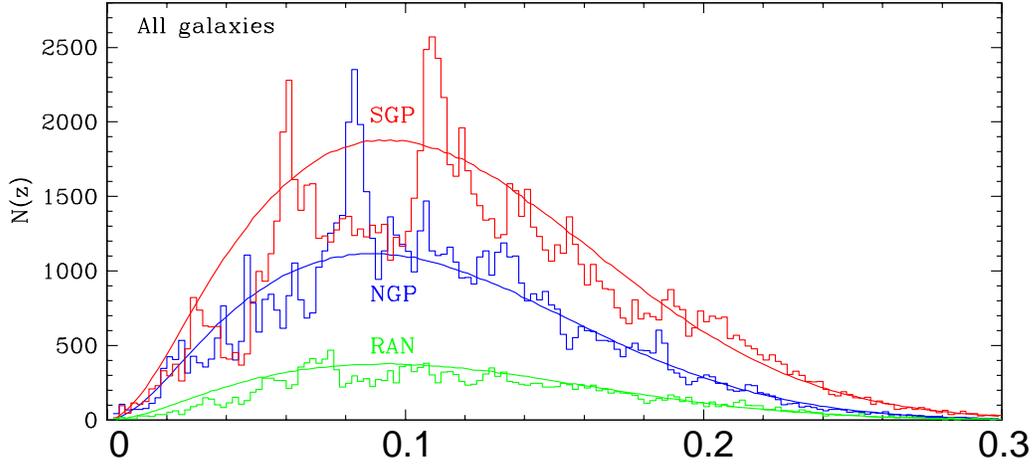


Figure 15: Distribution en redshift des galaxies en fonction de la limite en flux (la profondeur) des catalogues. Il s'agit de l'histogramme de la distribution des galaxies du relevé 2dF (220000 galaxies), qui est basé sur le relevé photométrique APM et qui atteint la profondeur $b_J = 22$. La courbe verte (RAN) indique la distribution attendue d'une population répartie aléatoirement dans un volume d'univers et observée selon les mêmes critères de sélection. Les courbes rouges et bleues sont les distributions observées selon les directions des Pole Galactique Nord (NGP) et Sud (SGP). La structuration des galaxies est bien visible par les pics prononcés de l'histogramme (D'après Cole et al 2005, MNRAS 362, 505).

Dans le cas d'une distribution de Poisson, cette probabilité est

$$dP = \bar{n}^2 dV_1 dV_2, \quad (46)$$

où \bar{n} est la densité numérique moyenne de galaxies. Si la distribution n'est pas Poissonnienne, cette probabilité s'écrit:

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2. \quad (47)$$

ξ est la corrélation entre ces points. Si $\xi > 0$, les points sont corrélés, et ξ exprime la tendance au regroupement des galaxies. Inversement, si $\xi < 0$, il y a anti-corrélation.

Pour un univers homogène,

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (48)$$

et pour un univers isotrope

$$\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \xi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \xi(r). \quad (49)$$

La fonction de corrélation à deux points des galaxies doit vraisemblablement contenir une information sur le champ de matière. En effet, pour un champ de densité continu $\rho(\mathbf{r})$

$$\xi(r) = \frac{\langle (\rho(\mathbf{u}) - \bar{\rho})(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) - \bar{\rho}) \rangle}{\bar{\rho}^2}, \quad (50)$$

où $\bar{\rho}^2$ est la densité moyenne dans une boîte de volume V . En supposant que les galaxies ont en moyenne toute la même masse, $\langle M_g \rangle$, on a donc

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2 = \frac{\langle \rho(\mathbf{x}_1) dV_1 \rho(\mathbf{x}_2) dV_2 \rangle}{\langle M_g \rangle^2} \quad (51)$$

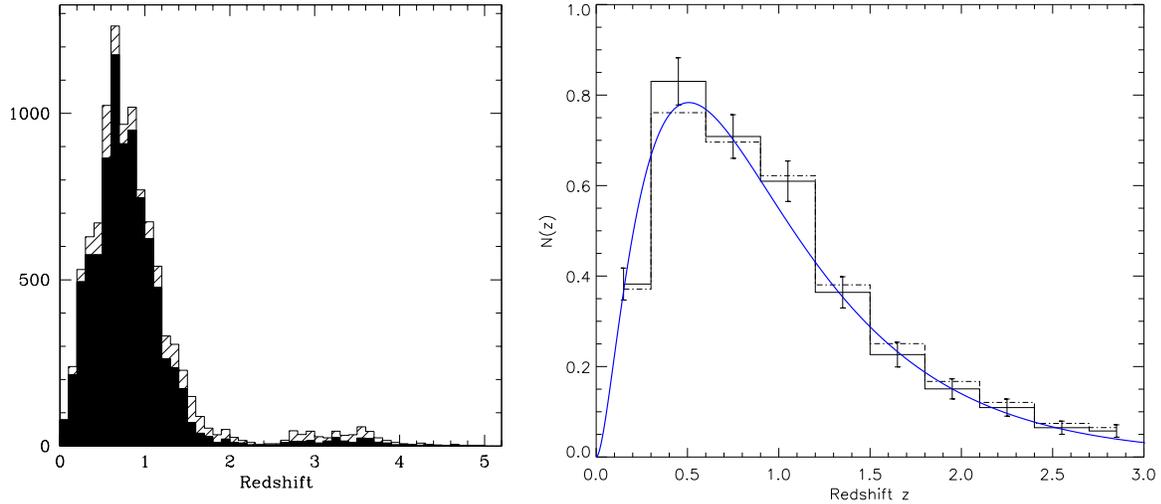


Figure 16: A gauche: distribution en redshift des galaxies d'un échantillon spectroscopique de 11000 galaxies jusqu'à la profondeur $I_{AB} = 24$ du relevé VVDS (VIMOS VLT Deep Survey). D'après cet histogramme, le redshift moyen de ces galaxies est $z = 0.90$ et le redshift médian $z = 0.76$ (D'après Le Fèvre et al 2005, A&A 439, 845). A droite: Distribution en redshift photométrique des galaxies de l'échantillon utilisé pour l'analyse du cisaillement gravitationnel cosmologique dans les champs "Deep" du Canada-France-Hawaii Telescope Legacy Survey (CFHTLS). Les redshifts photométriques sont ceux dérivés des données dans les domaines visible et infrarouge proche du HDF. La ligne continue bleue est le meilleur ajustement des paramètres de la loi empirique donnée en 45: $\alpha = 1.9833$, $\beta = 0.6651$ et $z_s = 0.0981$, soit un redshift median des galaxies, $z_m = 1.01$. D'après Semboloni et al 2006, A&A 452, 51.

ce qui signifie que la fonction de corrélation à deux points donne directement la fonction d'auto-corrélation de la distribution de matière.

Dans cette hypothèse, la fonction de corrélation à deux points des galaxies permet de reconstruire le spectre de puissance du champ de densité. En effet, soit $\delta(\mathbf{x})$ l'excès de masse au point \mathbf{x} ,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} ; \quad (52)$$

la fonction de corrélation s'écrit

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (53)$$

On peut décomposer ce champ de densité dans l'espace de Fourier:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(\mathbf{k}) = \int \delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \end{cases} \quad (54)$$

Comme δ est réel, $\delta^* = \delta$ et la fonction de corrélation s'écrit:

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \langle \delta^*(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (55)$$

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \left\langle \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} d^3\mathbf{k}' \right) \right\rangle \quad (56)$$

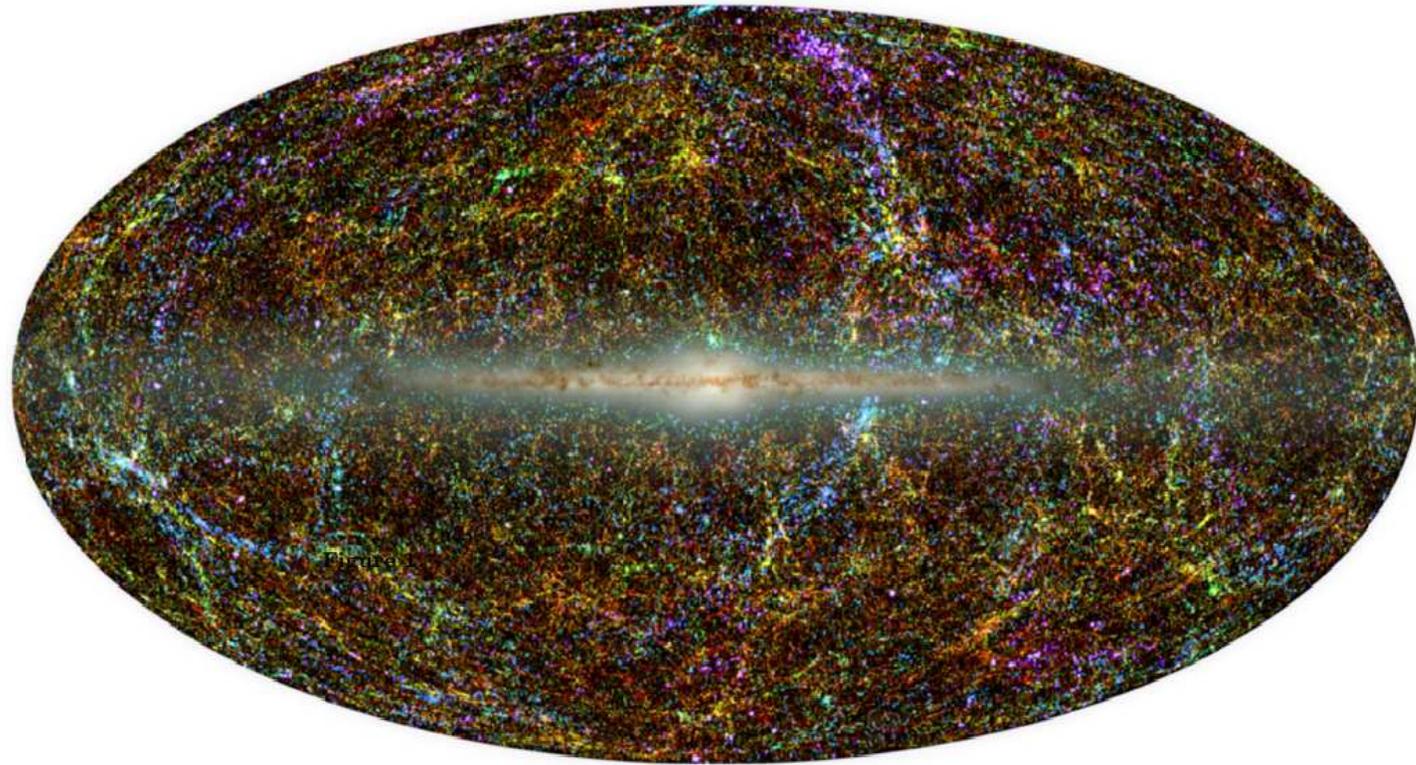


Figure 17: Image en 3 couleurs de la distribution des galaxies du relevé infrarouge 2MASS. Cette cartographie bi-dimensionnelle est construite avec 1.6 millions de galaxies observées à $1.2 \mu\text{m}$ (bande J), $1.6 \mu\text{m}$ (bande H) et $2.2 \mu\text{m}$ (bande K). Elle montre que la distribution projetée des galaxies est fortement hétérogène et filamentaire, avec des pics de densité très contrastés. Les zones les plus denses localisent les amas de galaxies les plus riches. Les couleurs illustrent la profondeur: les galaxies bleues sont les plus proches ($z < 0.01$), les vertes sont à des distances intermédiaires ($0.01 < z < 0.04$) et les rouges sont les plus lointaines ($0.04 < z < 0.1$). La projection est dans le système de coordonnées galactiques. La structure brillante horizontale est l'image du plan de la Galaxie avec, au centre, son bulbe. D'après Jarrett 2004, PASA 21, 396.

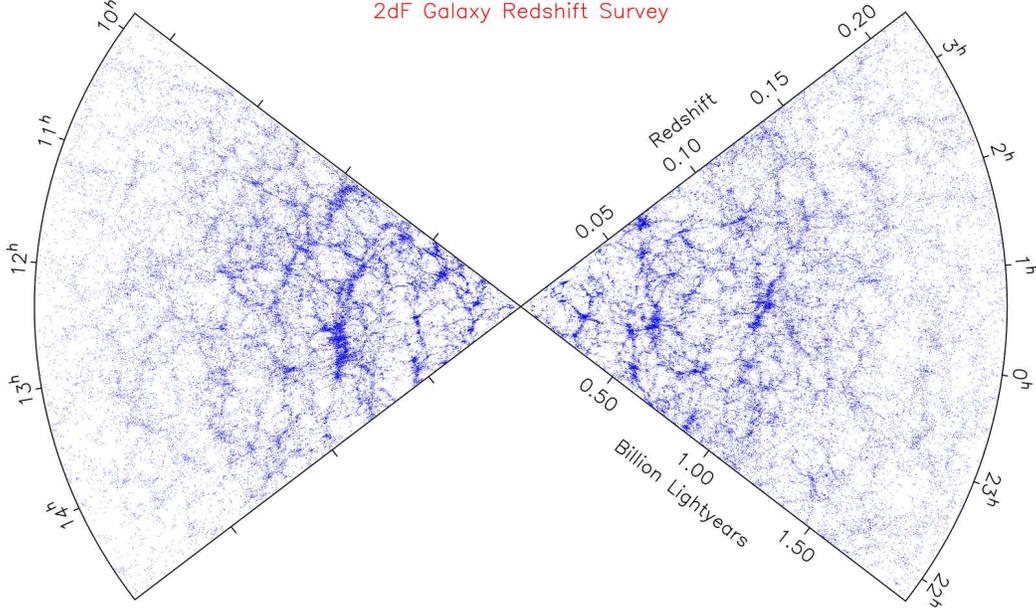


Figure 18: La distribution des galaxies du catalogue final 2dF décrite par un diagramme en cône. L'observateur est au sommet et les objets sont vus selon leur position le long de la ligne de visée. Ce relevé est construit à partir de la mesure de redshift de 250000 galaxies. La structuration est visible, mais le contraste s'atténue sensiblement sur des échelles dépassant 100 Mpc. On s'approche d'une distribution uniforme. On remarque par ailleurs qu'aucune anisotropie n'est visible: aucun sous-cône visible sélectionné par la pensée dans cet échantillon ne semble différent des autres.

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \langle (2\pi)^{-6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' e^{-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \langle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \hat{\delta}^*(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \rangle \quad (57)$$

Or

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k}) \hat{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_\delta(\mathbf{k}) \quad (58)$$

et donc

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} P_\delta(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (59)$$

par conséquent $\xi_\delta(\mathbf{r})$ est la T.F. inverse de $P_\delta(\mathbf{k})$:

$$P_\delta(\mathbf{k}) = \int \xi_\delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} . \quad (60)$$

Exemple: cas d'un univers isotrope:

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \xi_\delta(r) \quad (61)$$

$$P_\delta(\mathbf{k}) = P_\delta(k) \quad (62)$$

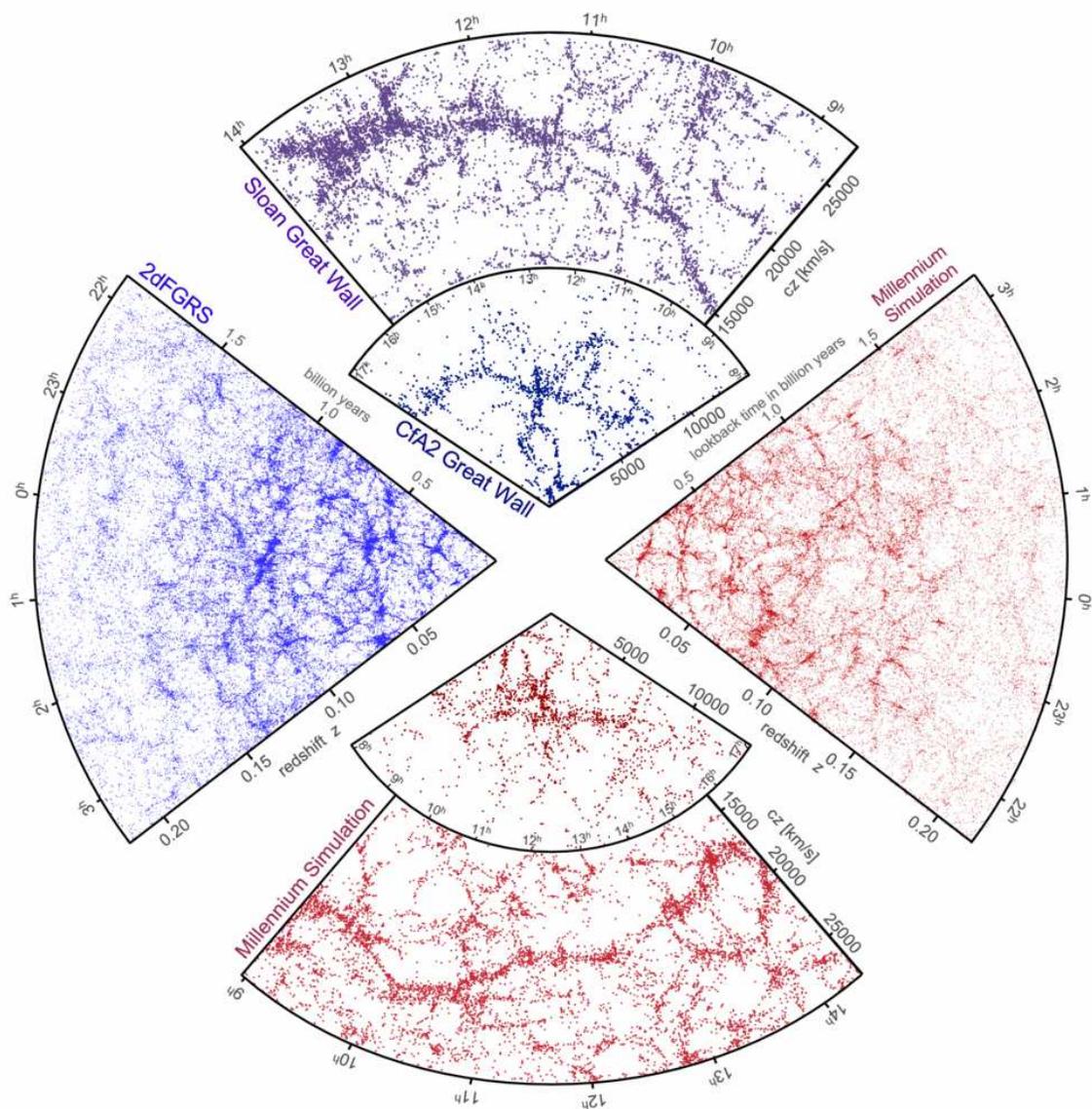


Figure 19: Comparaison des distributions de galaxies dans l'Univers observées par les relevés 2dF (cône en bleu à gauche), par le CfA2 et le SDSS (en bleu en haut), avec deux exemples de tranches d'univers de la simulation "Millennium". Les catalogues de la simulation ont été sélectionnés en magnitude suivant une fonction de sélection identique aux relevés réels. D'après Springel et al 2006, Nature 440, 1137

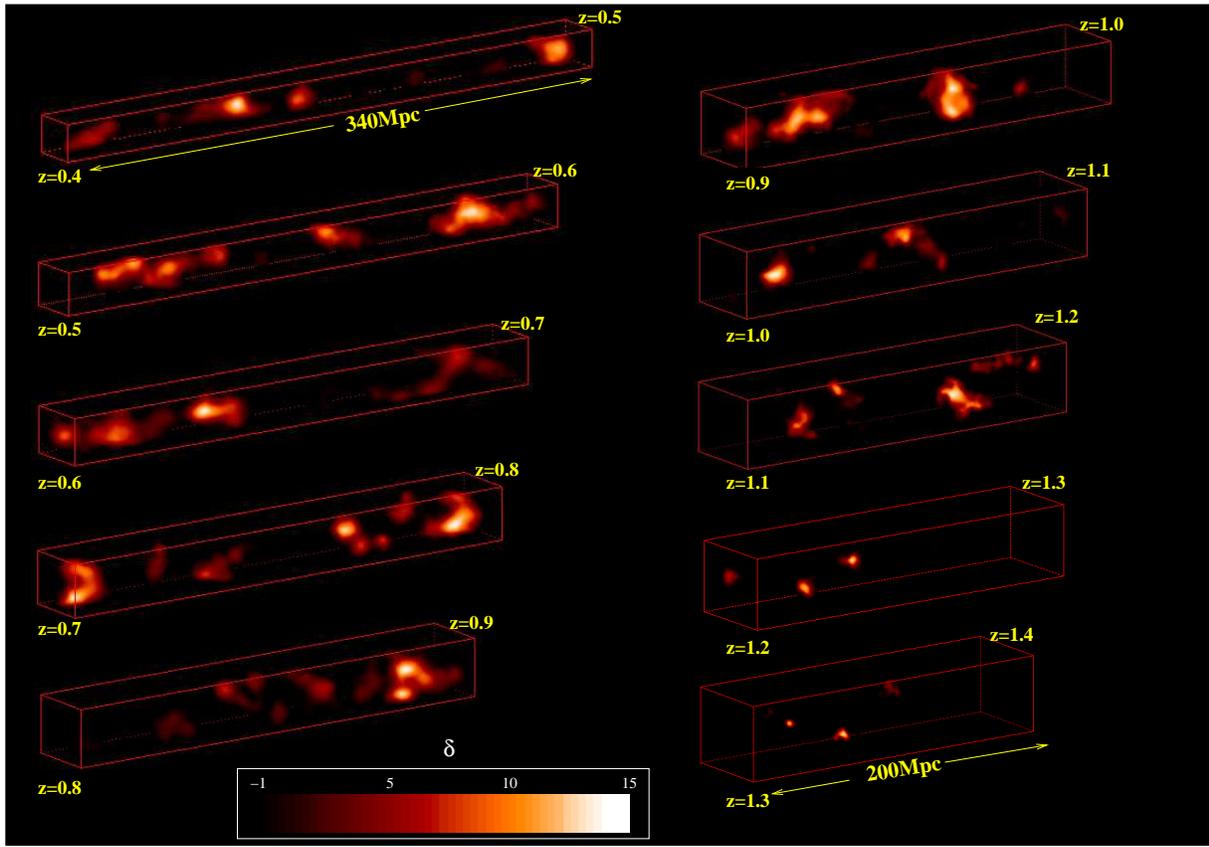


Figure 20: Distribution lissée, par tranche de redshift, des galaxies du relevé spectroscopique VVDS. Chaque boîte représente un secteur en redshift du cône d’univers exploré par le relevé. L’ensemble des secteurs ne forme qu’un seul et unique cône, découpé pour le rendre plus visible sur une figure. Le VVDS sonde des volumes d’univers jusqu’à des redshifts de 5 pour sonder l’évolution des propriétés statistiques des galaxies: fonction de luminosité, structuration, populations stellaires, composition chimique et morphologie. Le VVDS, sur le télescope VLT, et le DEEP2 sur GEMINI, sont deux relevés spectroscopiques profonds. Ils portent sur environ 20 000 à 50 000 galaxies. D’après Marinoni et al 2008, A&A 487, 7; et Le Fèvre et al 2004, proceedings of the ESO/USM/MPE Workshop on ”Multiwavelength Mapping of Galaxy Formation and Evolution”, eds. R. Bender and A. Renzini.

$$\xi_{\delta}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 P_{\delta}(k) dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta e^{ik r \cos\theta} d\theta \quad (63)$$

Soit:

$$\begin{cases} \xi_{\delta}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int k^2 P_{\delta}(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \\ P_{\delta}(k) = 4\pi \int k^2 \xi_{\delta}(r) \frac{\sin(kr)}{kr} dk . \end{cases} \quad (64)$$

La fonction de corrélation à deux points est donc directement la transformée de Fourier du spectre de puissance $P(k)$. Mais l’intérêt immédiat de cet estimateur statistique vient du fait que la variance d’une distribution est directement reliée à la fonction de corrélation à deux points en $\mathbf{x} = 0$

$$\langle N^2 \rangle = \xi(0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) . \quad (65)$$

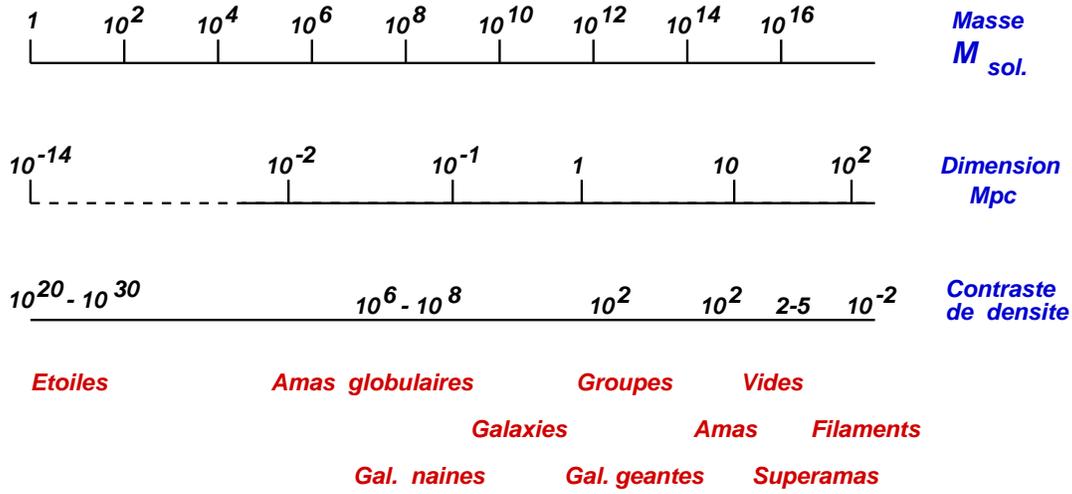


Figure 21: Tableau synthétique des échelles caractéristiques des structures constituant l'Univers visible.

Le spectre de puissance décrit comment la variance est répartie suivant les fréquences spatiales. Il se trouve qu'il caractérise complètement les propriétés d'un champ aléatoire Gaussien (voir l'Annexe G et le cours de E. Audit).

Les catalogues de galaxies qui fournissent une mesure de la variance de la distribution des galaxies peuvent donc potentiellement caractériser le spectre de puissance de la matière associée. C'est la raison pour laquelle les mesures de ces deux quantités font partie des activités principales des relevés cosmologiques. Il reste cependant à vérifier que les propriétés statistiques des galaxies qui sont tracées par leur émission stellaire conduisent bien à une information directe sur les propriétés du champ de matière. C'est une des questions fondamentales de la cosmologie actuelle. La difficulté d'établir la relation entre les galaxies (ou la lumière) et la matière est masquée dans la relation simple qui est choisie pour caractériser ce lien. Une façon simple de procéder est de partir d'une loi *ad hoc* à un paramètre, le *biais* b , qui définit le rapport du contraste de densité numérique de galaxies au contraste de densité de matière:

$$b = \left(\frac{\delta n}{\delta \delta} \right) . \quad (66)$$

En pratique, la fonction de corrélation est calculée en mesurant l'excès local du nombre de paires de galaxies par rapport à une distribution aléatoire:

$$\xi(r) = \frac{N_{obs}(r)}{N_{alea}(r)} - 1 , \quad (67)$$

où N_{obs} et N_{alea} sont respectivement les nombres de paires, du catalogue réel et dans un catalogue fictif de galaxies distribuées aléatoirement, dans un volume $r \pm \delta r/2$.

L'étude statistique des catalogues montre que la fonction de corrélation des galaxies est bien représentée par une loi de puissance:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} . \quad (68)$$

Sur des échelles inférieures à $10 h^{-1}$ Mpc, $\gamma = 1.8$ et $r_0 = 5h^{-1}$ Mpc. Cette loi d'échelle est fondamentale pour construire des modèles de formation de structures.

En pratique, les données immédiates des catalogues du ciel portent sur les propriétés projetées. Pour examiner la structuration des galaxies dans ces catalogues, on utilise la fonction de corrélation angulaire, $\omega(\theta)$, qui est définie naturellement par simple analogie:

$$dP = \bar{N}^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 , \quad (69)$$

où les $d\Omega_i$ sont les éléments d'angle solide de deux régions disjointes. On peut montrer que si la fonction de corrélation $\xi(r)$ est une loi de puissance d'indice $\gamma > 0$, alors la fonction de corrélation angulaire est aussi une loi de puissance d'indice $1 - \gamma$. Plus précisément, si

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad (70)$$

alors, pour des petits angles θ , $\omega(\theta)$ s'écrit (voir Annexe B):

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^\gamma \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{1}{\left[\int_0^\infty u^2 \Phi(u) du\right]^2} \right] \int_0^\infty u^{5-\gamma} \Phi^2(u) du , \quad (71)$$

où

$$u = \frac{r}{D} , \quad (72)$$

D caractérisant la profondeur du relevé et Φ étant la *Fonction de sélection* des galaxies. Cette fonction exprime les propriétés du relevé et les caractéristiques du catalogue de galaxies sélectionnées pour la mesure. Par exemple, pour un relevé limité en flux jusqu'à f_{lim} , les galaxies de luminosité L visibles sont dans une sphère de rayon limite

$$D = \left(\frac{L}{4\pi f_{lim}}\right)^{1/2} . \quad (73)$$

Dans le cas d'un catalogue parfaitement homogène dont les galaxies auraient toute la même luminosité L alors

$$\Phi = 1 \text{ pour } r < D \quad (74)$$

$$= 0 \text{ pour } r > D . \quad (75)$$

$$(76)$$

Cette expression montre que la fonction de corrélation angulaire décroît lorsque le relevé est de plus en plus profond. C'est donc un pur effet de dilution du signal par effet de projection.

Les figures 22 et 23 montrent la forme de la fonction de corrélation angulaire de l'APM (Automated Plate Machine), celle de la fonction de corrélation spatiale du relevé Point Source Catalogue redshift survey (PSCz), établi à partir du catalogue de galaxies du satellite infrarouge IRAS, et enfin celle du SDSS.

4.3 Propriétés des amas de galaxies

Les amas de galaxies sont les systèmes dynamiques les plus massifs et les plus étendus qui présentent des propriétés de systèmes gravitants (partiellement) relaxés. Au-delà, aucune des structures dynamiques connues n'est encore parvenue à cette phase avancée d'évolution dynamique. Cette particularité place les amas des galaxies dans une position centrale. Plus précisément, les amas de galaxies sont les blocs de la structuration à grande échelle de l'Univers qui ont conservé la mémoire de l'histoire de leur formation et de leur évolution au sein des grandes structures. C'est la raison pour laquelle ce sont des objets clefs en cosmologie. Les simulations

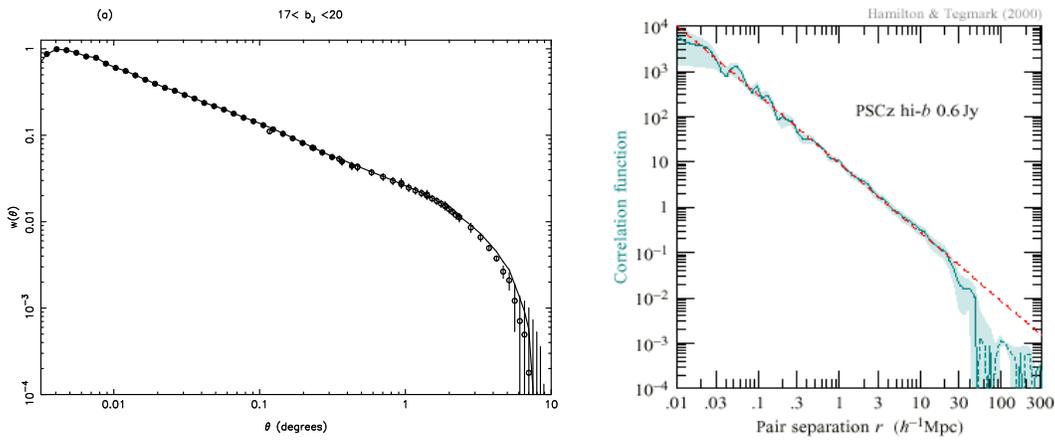


Figure 22: A gauche, fonction de corrélation angulaire du relevé photométrique APM. L'analyse porte sur deux millions de galaxies projetées sur le ciel (D'après Maddox et al 1990, MNRAS 242, 43p). A droite, la fonction de corrélation tri-dimensionnelle du relevés PSCz qui porte sur 15400 galaxies avec un décalage spectral mesuré (D'après Sutherland et al 1999, MNRAS 308, 289).

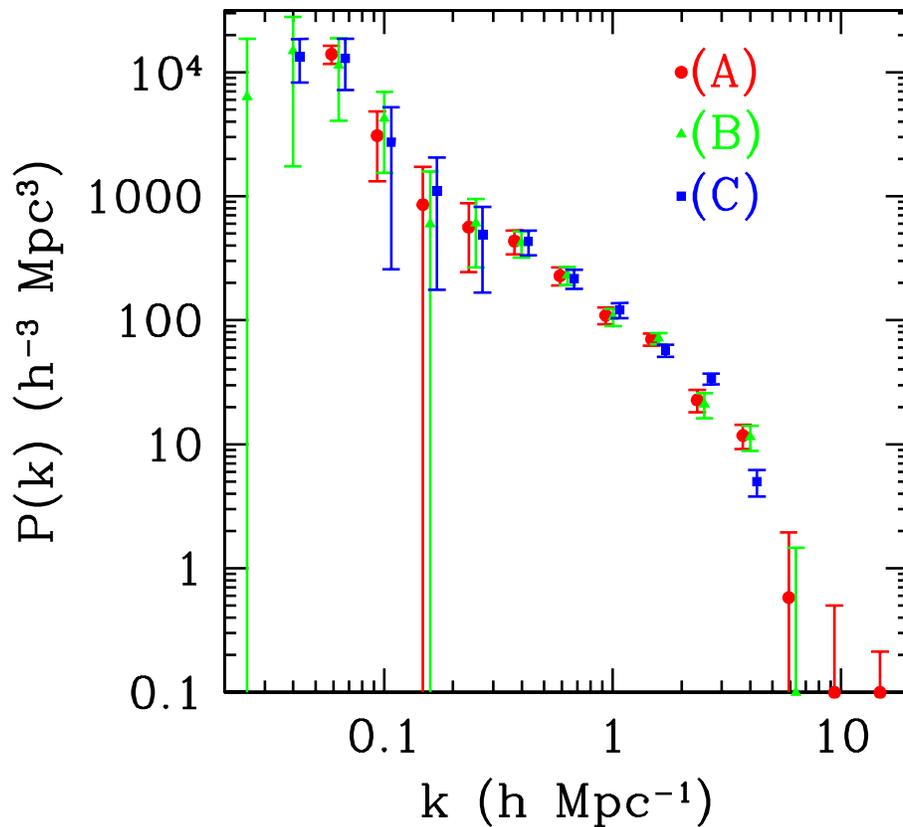


Figure 23: La fonction de corrélation tridimensionnelle du SDSS mesurée à partir de redshifts photométriques de 1.5 millions de galaxies. Elle permet de reconstruire avec une précision inégalée le spectre de puissance des galaxies. (D'après Dodelson et al 2002, ApJ 572, 140).

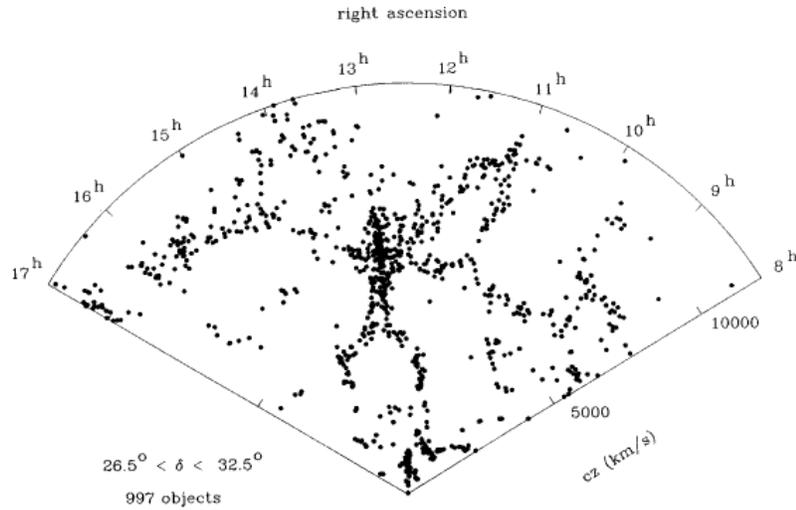


Figure 24: Image de la distribution des galaxies du catalogue spectroscopique du Center for Astrophysics (CfA). Comme les autres diagrammes en cône, l’observateur est au sommet et les objets sont vus selon leur disposition le long de la ligne de visée (en profondeur). On voit nettement des régions vides (les “bulles”) et la disposition remarquable des galaxies (points noirs) avec, au centre, un étirement surprenant le long de la ligne de visée. Il s’agit de l’amas de galaxies Coma ($z=0.023$), un archetypé de la classe des amas riches. L’allongement est un effet de la dispersion des vitesses des galaxies de l’amas qui affecte localement le redshift des galaxies, engendré par l’expansion. Au redshift de l’amas s’ajoute donc un terme produit par la vitesse individuelle de chaque galaxie dans le potentiel gravitationnel créé par l’amas de galaxies. Comme Coma, tous les amas les plus riches et massifs de l’Univers semblent localisés à l’intersection des “bulles”. (D’après de Lapparent, Geller & Huchra 1986, ApJ 302, L1).

numériques (voir la figure 25) montrent en effet que le nombre et l’état d’évolution des amas de galaxies varient fortement avec le décalage spectral (le temps, donc) selon le modèle d’univers car la croissance des perturbations engendrées par les fluctuations initiales est contrôlée par les paramètres cosmologiques. Les amas de galaxies peuvent donc être utilisés pour confronter les scénarios cosmologiques théoriques aux propriétés statistiques observés.

4.3.1 Propriétés internes

Les amas de galaxies ont des dimensions caractéristiques de 1 à 10 Mpc. Ils sont composés de galaxies (typiquement de l’ordre du millier, voire dix-mille, ce nombre dépendant de la fraction de galaxies naines qui est mal connue), d’un gaz inter-galactique ionisé confiné dans l’amas et dont la température est d’environ 10^8 K, et de matière noire.

Les amas présentent en général des morphologies complexes et sont constitués de sous-systèmes, vraisemblablement en forte interaction ou en cours de fusion. Ce sont des indications que les amas de galaxies sont des systèmes dynamiquement jeunes. C’est bien ce que révèlent les grands relevés tridimensionnels des galaxies qui permettent de placer les amas dans cette gigantesque architecture à l’intersection de filaments et/ou de “bulles” (voir Fig. 24). Progressivement, les galaxies périphériques plongent dans le puits de potentiel central en suivant d’immenses flots de galaxies. Cette représentation, qui est aussi bien visible dans les simulations numériques (Fig. 26), montre que les zones externes des amas ne constituent pas des systèmes isolés et ne sont pas sphériques. Leur modélisation est donc particulièrement complexe.

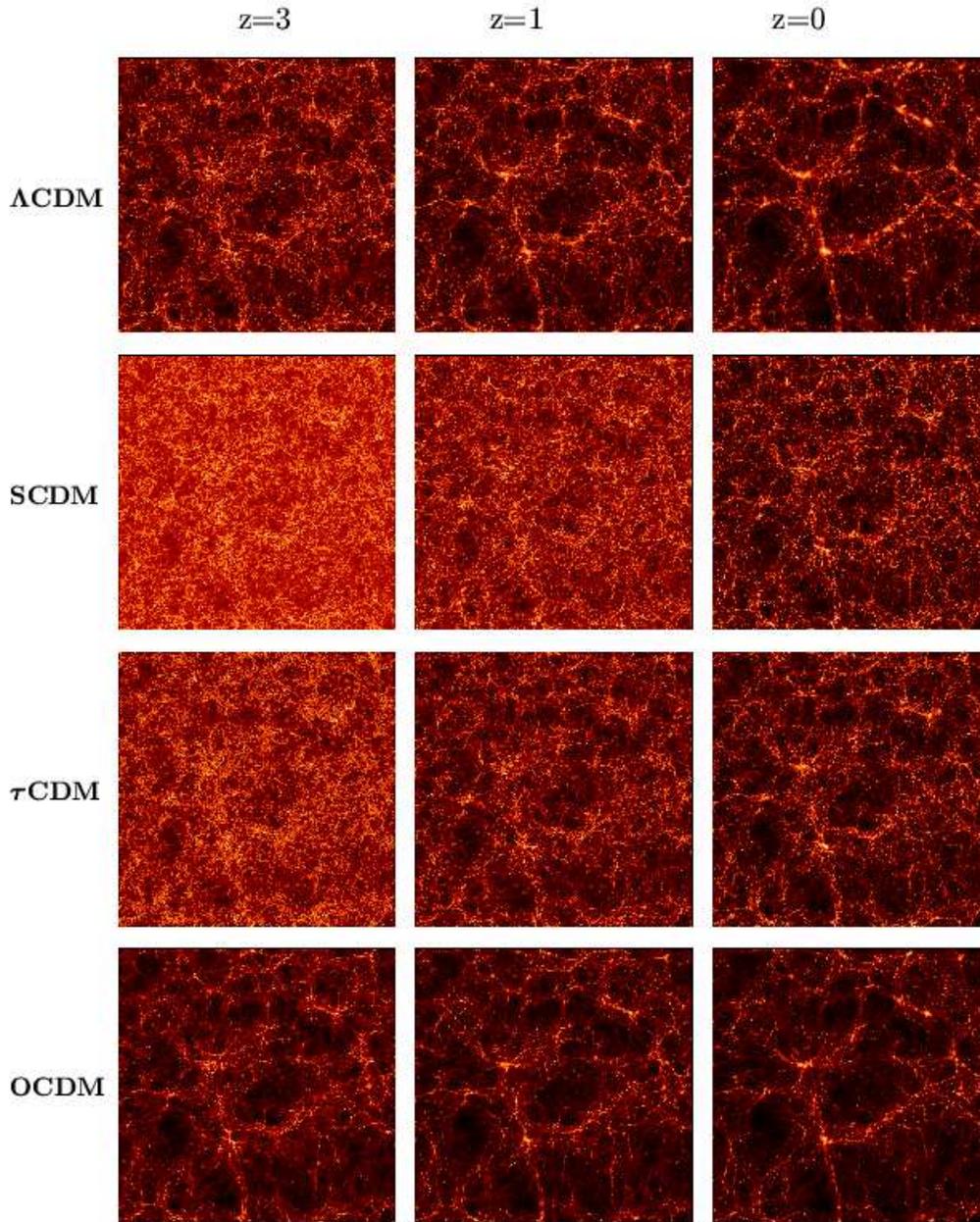


Figure 25: Simulations numériques illustrant la formation de structures dans l'Univers. Elles montrent l'évolution temporelle, de gauche à droite (pour trois redshifts), et la sensibilité aux paramètres définissant le modèles, de haut en bas. Tous ces modèles sont dominés par une composante de matière noire froide (Cold Dark Matter, CDM) et chaque simulation comporte 256^3 particules dans une boîte de $239.5 \text{ Mpc}/h$. De haut en bas: ΛCDM : $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda=0.7, H_0 = 70, \sigma_8 = 0.9$; SCDM : $\Omega_m = 1.0, \Omega_\Lambda=0.0, H_0 = 50, \sigma_8 = 0.51$; τCDM : $\Omega_m = 1.0, \Omega_\Lambda=0.0, H_0 = 50, \sigma_8 = 0.51$; OCDM : $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda=0.0, H_0 = 70, \sigma_8 = 0.85$. Le τCDM se singularise par la forme de son spectre de fluctuation initial. Les points brillants représentent la distribution de la matière noire, les zones les plus contrastées et brillantes sont des amas de galaxies. (figures produites et mises à la disposition du public par le VIRGO consortium).

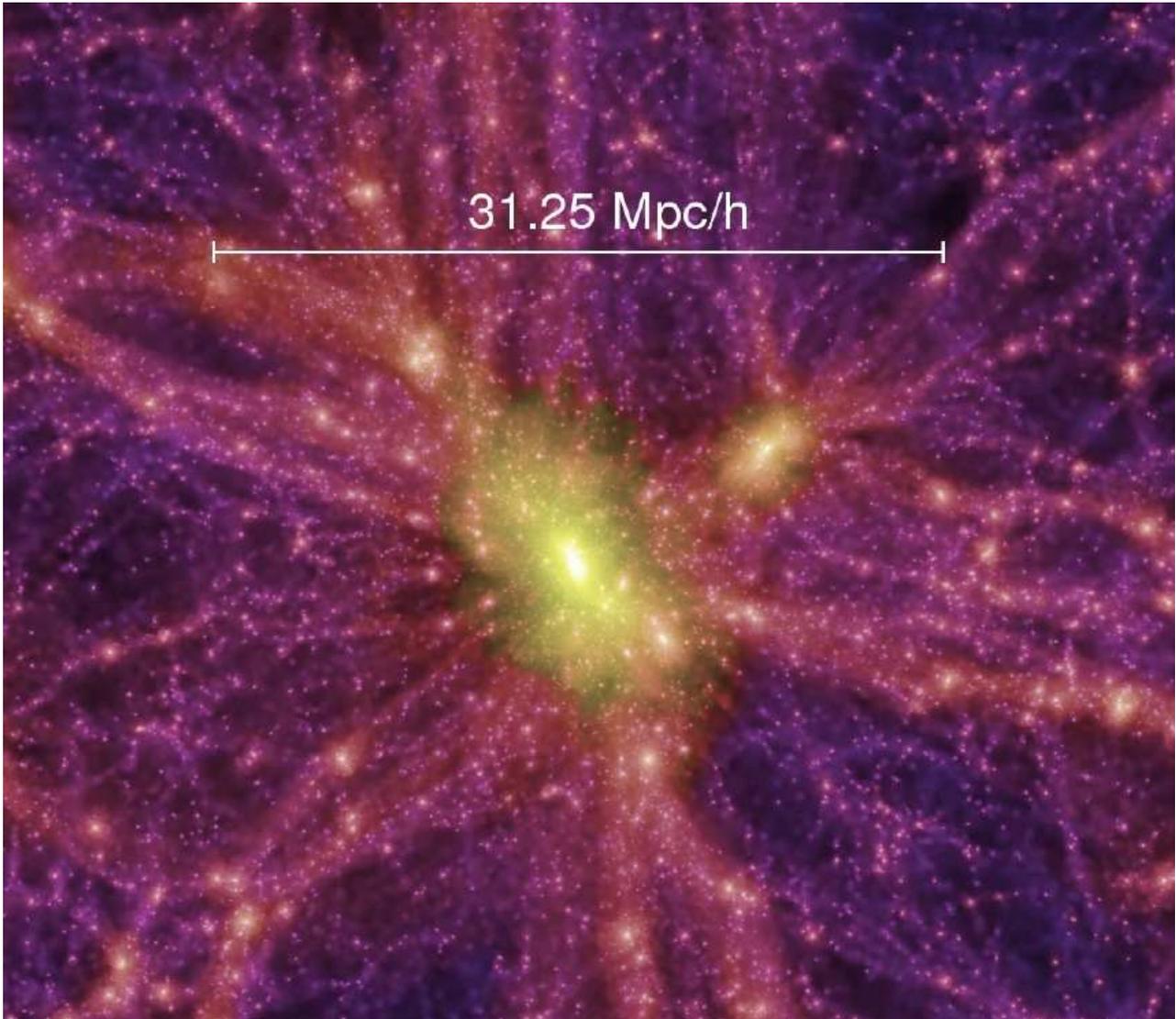


Figure 26: Simulations numériques représentant un amas de galaxies et son environnement pour le scénario cosmologique Λ CDM. L'échelle donnée sur la figure montre que les amas peuvent s'étendre sur des échelles de l'ordre de 10 Mpc/h, ont des limites physiques assez floues et ne sont que partiellement découplés des structures à très grande échelle. En fait, de la matière s'effondre en permanence vers les zones les plus denses de l'amas de galaxies, sous l'effet de la gravité. On voit aussi que la géométrie de ces systèmes est loin d'être sphérique et que les sous-structures de grande taille sont visibles, même au centre. Cette image est une parfaite illustration de l'aide qu'apportent les simulations numériques à notre compréhension de la formation des structures dans l'Univers. D'après Springel et al 2005, Nature 435, 629 (simulation Millennium produite et mise à la disposition du public par le VIRGO consortium).

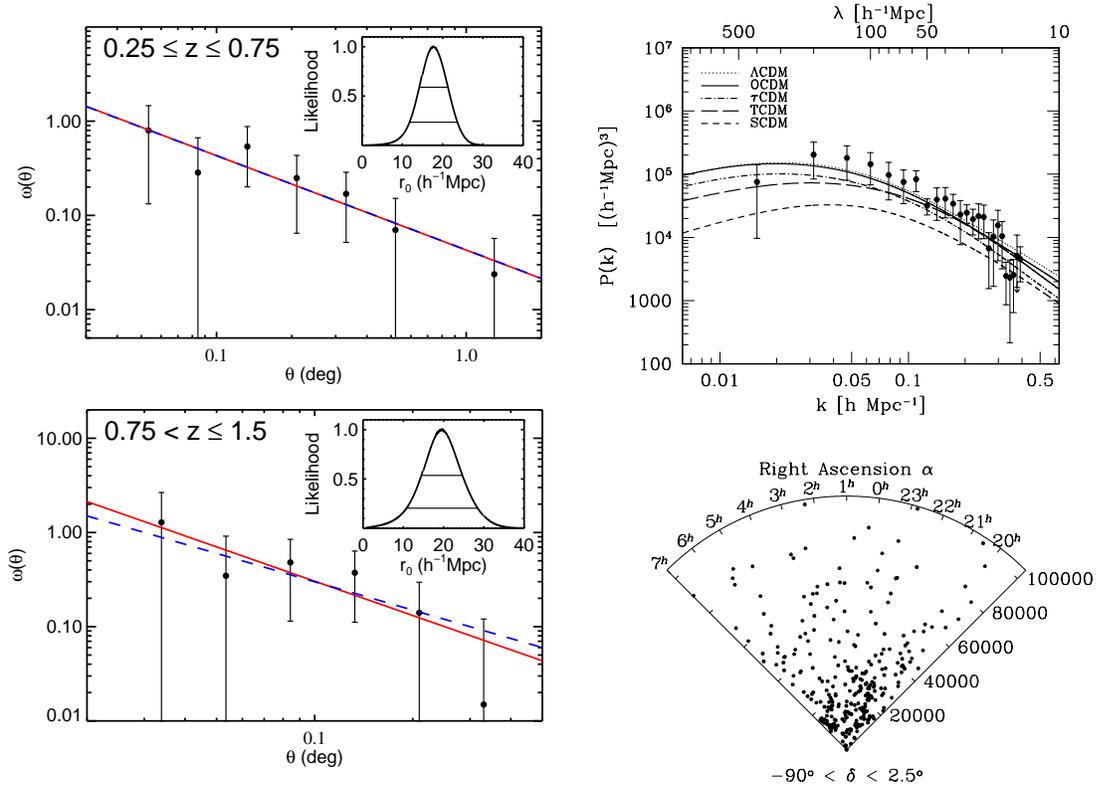


Figure 27: A droite: fonctions de corrélation angulaires de 277 amas de galaxies du IRAC Shallow Cluster Survey mesurées dans deux domaines de redshift. La ligne bleue correspond à une pente $\gamma = 1$. Les Gaussiennes montrent les fonctions de vraisemblance pour la détermination des échelles r_0 . D'après Brodwin et al 2007, ApJ 671, 93 . A Gauche: distribution spatiale (en bas) et spectre de puissance tridimensionnel (en haut) reconstruit à partir de la fonction de corrélation angulaire et de la distribution en redshift des amas de galaxies de l'échantillon REFLEX (ROSAT ESO Flux-Limited). Il est composé de 452 amas de galaxies détectés par le satellite ROSAT dans la bande d'énergie (0.1-2.4) keV et dont les flux dépassent $3 \times 10^{-12} \text{ erg.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$. Les lignes superposées au spectre de puissance montrent des prédictions pour cinq modèles cosmologiques Cold Dark Matter. D'après Schuecker et al 2001, A&A 368, 86.

4.3.2 Densité numérique et fonction de corrélation amas-amas

De la même façon que pour les galaxies, on peut tenter de mesurer le regroupement des amas de galaxies par la fonction de corrélation amas-amas. Techniquement, c'est cependant beaucoup plus difficile car le nombre d'amas est considérablement plus faible que le nombre de galaxies.

Pour évaluer la densité d'amas de galaxies, il faut préciser la *profondeur* des catalogues car c'est un paramètre qui définit le volume couvert (voir par exemple la Figure 27). Ainsi jusqu'à la magnitude apparente $I = 24$, les estimations à partir des catalogues actuels donnent 15 amas par degrés carrés. Le ciel couvrant 40000 degré-carrés, de l'ordre de 5×10^5 à 1×10^6 amas peuplent le ciel jusqu'à ces magnitudes. À cette profondeur, on détecte les amas de galaxies jusqu'à $z = 1$. En utilisant l'expression des volumes des modèles de Friedmann, on en déduit que la densité d'amas de galaxies est de l'ordre de $10^{-5} h^3 \text{ Mpc}^{-3}$. À titre de comparaison, à cette profondeur il y a dans le ciel environ 10^{10} galaxies.

Il n'existe pas pour le moment de grands catalogues d'amas de galaxies rigoureusement con-

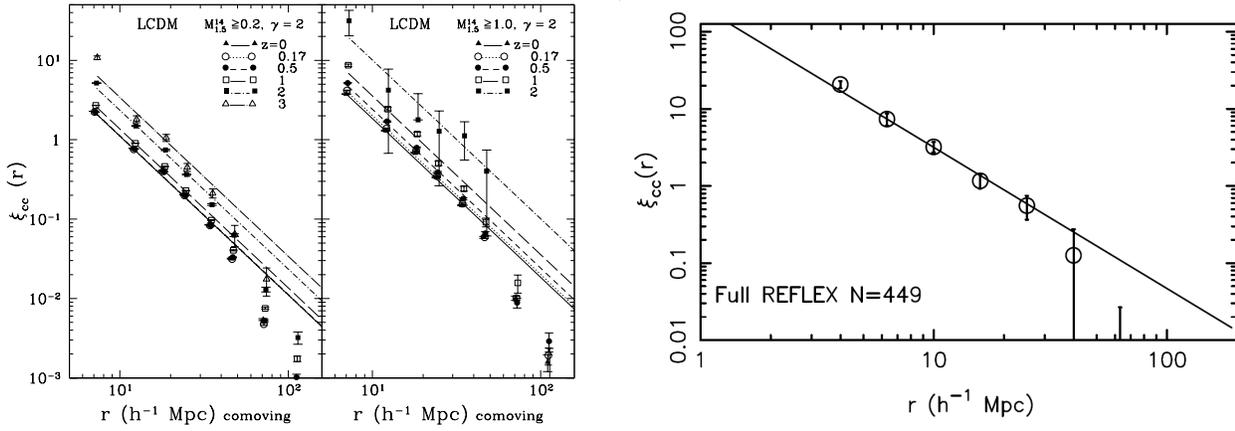


Figure 28: Fonctions de corrélation tri-dimensionnelles amas-amas: A gauche, l'échantillon optique d'amas de galaxies sur relevé SDSS. La forme est donnée pour deux seuils de masse limite dans la sélection des amas de galaxies ($\geq 0.2 \times 10^{14}$ and $1 \times 10^{14} h^{-1}$ masses solaires) et pour plusieurs intervalles de redshift. Les lignes continues sont les meilleurs ajustements pour un modèle cosmologique Λ CDM. Les pentes sont voisines de $\gamma = 2.0$. D'après Bachall et al 2004, ApJ 603, 1. A droite, l'échantillon en bande X du relevé REFLEX. La ligne continue montre le meilleur ajustement pour une pente $\gamma = 1.83$ et pour $r_0 = 18.8$. D'après Collins et al 2000, MNRAS 319, 939.

struits permettant de produire des analyses statistiques robustes. La mesure de la fonction de corrélation amas-amas est donc encore assez incertaine. Cependant, avec les données actuelles il semble que la fonction de corrélation amas-amas, ξ_{cc} suive aussi une loi de puissance. Elle est assez semblable à celle des galaxies (voir Figure 28), mais avec une dispersion significative suivant les échantillons (voir les Figures 27 et 28), et il n'est pas démontré qu'elles sont tout à fait identiques. La loi de puissance est de la forme:

$$\xi_{cc}(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1.8 \pm 0.4}, \quad (77)$$

avec $r_0 = 20 \pm 5 h^{-1}$ Mpc. Cette loi est bien suivie entre les échelles de 3 à 100 Mpc. Mais il faut insister sur le fait que les catalogues ne contiennent que quelques centaines d'amas de galaxies.

4.4 Propriétés du gaz inter-galactique

L'analyse du gaz inter-galactique est un moyen de comprendre l'histoire des baryons dans l'Univers et d'explorer les scénarios possibles à l'origine de leur effondrement et de la formation des étoiles dans les galaxies. C'est un problème difficile, qui est aujourd'hui au coeur des recherches en cosmologie et en astrophysique extra-galactique.

Nous avons déjà évoqué l'existence d'un gaz chaud dans les amas de galaxies. Nous savons, par les raies d'émission du gaz, que l'abondance en métaux du gaz intra-amas est demi-solaire. On explique cette composition par un enrichissement venant directement des ejecta des supernovae des galaxies de l'amas. Une fraction du gaz est vraisemblablement d'origine primordiale et est confinée depuis la formation de l'amas dans son puits de potentiel.

Il existe aussi du gaz inter-galactique qui n'est pas confiné dans des systèmes gravitants. Sa présence est révélée dans les spectres des quasars à grand redshift qui montrent une multitude de raies d'absorption. On peut classer ces milieux gazeux absorbants en quatre catégories:

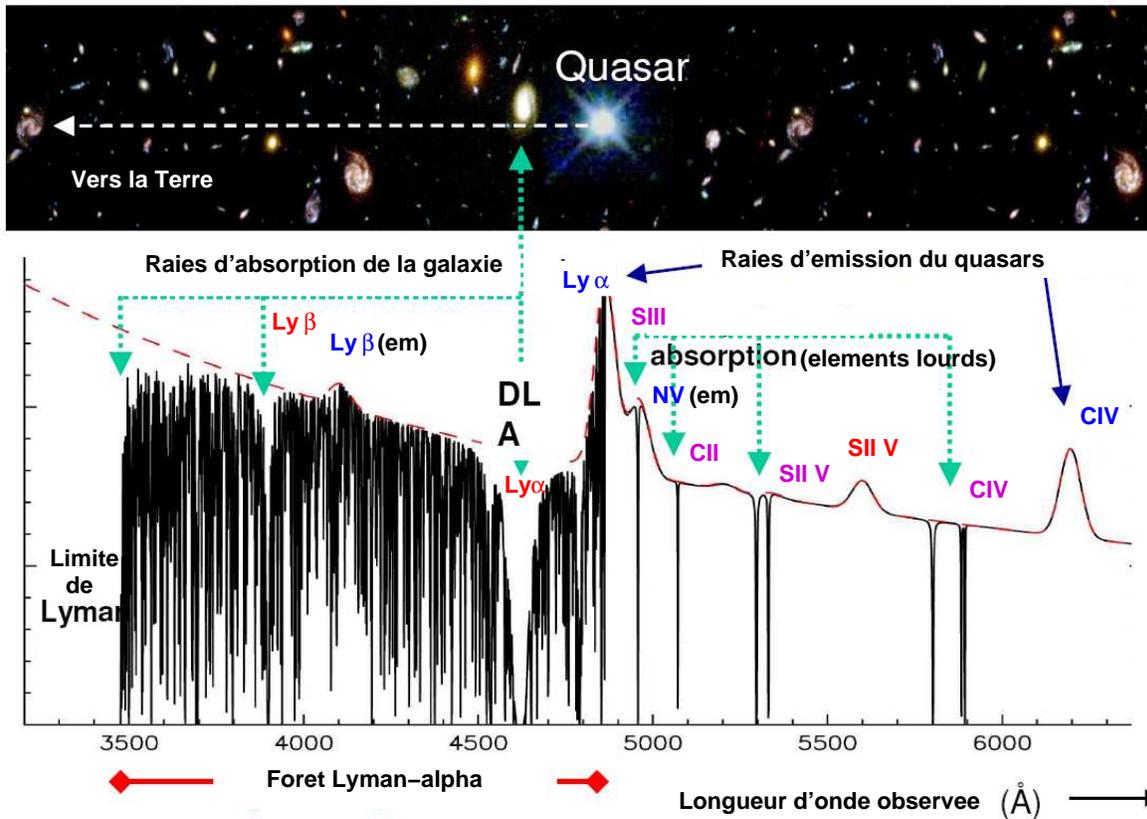


Figure 29: Une vue synthétique du milieu intergalactique autour et le long de la ligne de visée d'un quasar. La galaxie responsable des raies d'absorption est associée au système amorti (Damped Lyman Alpha, DLA).

1. Les systèmes de la forêt Lyman- α
2. Les systèmes à limite Lyman (LLS)
3. Les systèmes Lyman- α amortis (ou Lorentziens, ou DLA)
4. Les systèmes contenant des éléments "métalliques" (*i.e. au-delà de l'hélium*)

Les propriétés des trois premiers sont résumées dans la Table 2. Les absorbants métalliques forment une classe un peu particulière. Il faut noter que la transition Lyman- α n'est pas la seule capable d'absorber le rayonnement des quasars. Elle est seulement la plus visible dans les spectres. Des raies correspondant notamment à d'autres transitions de Lyman de l'hydrogène ou du deutérium sont aussi présentes.

Les systèmes de la forêt Lyman- α sont de loin les plus communs. Ils sont détectés par leurs raies d'absorption très étroites (quelques km.s^{-1}) de largeur en-deçà de la raie Ly α ($\lambda 1216 \text{ \AA}$) dans les spectres de quasars. Ces raies sont produites par les nuages absorbants situés le long de la ligne de visée, à tous les redshifts. Le nombre impressionnant des raies visibles sur la figure 30 démontre qu'il existe des nuages en très grand nombre dans le milieu inter-galactique. Ces nuages constituent les éléments de ce que l'on appelle la *forêt Lyman- α* (Ly α). Les densités de colonne¹¹ des nuages de la forêt Ly α sont de l'ordre de $10^{13} - 10^{16} \text{ cm}^{-2}$. Il s'agit d'un énorme

¹¹c'est à dire la densité de matériau projetée sur la ligne de visée.

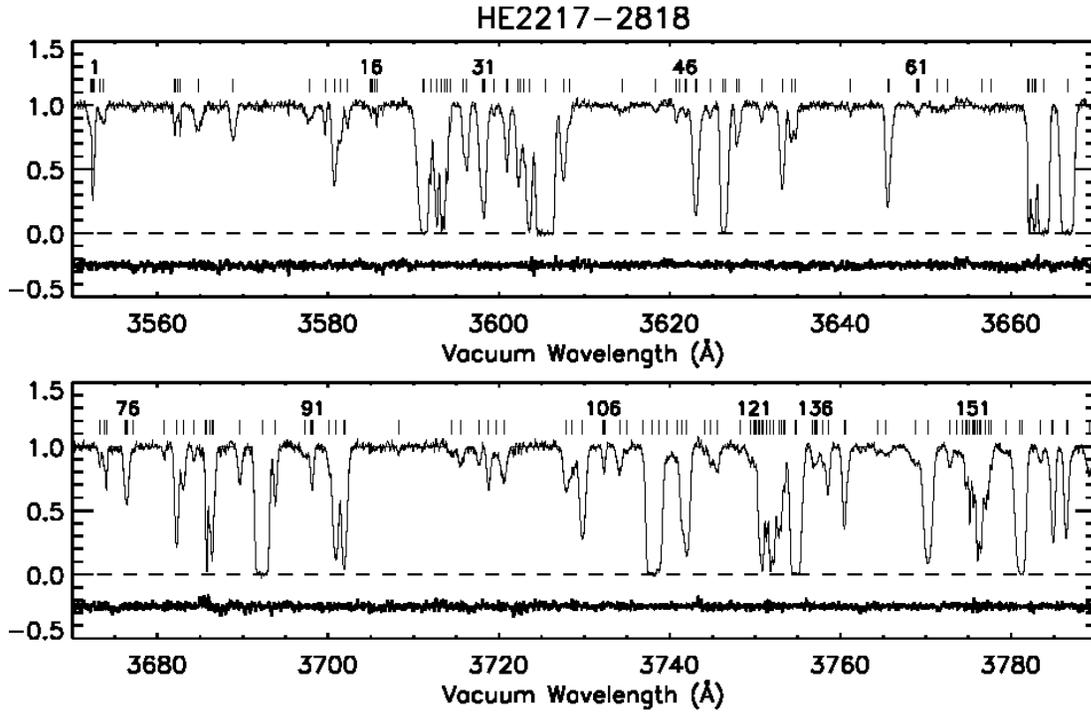


Figure 30: Spectre haute résolution obtenu avec le spectrographe UVES du VLT ($R = 45000$) du quasar HE2217-2818. Les raies d'absorption sont les nuages de la forêt Ly α . Les traits verticaux indiquent la position des nuages absorbants situés le long de la ligne de visée. Le spectre a été superposé avec un ajustement de profil de Voigt. Le résidu est montré en bas de chaque panneau (d'après Kim et al 2001, A&A 373, 757).

réservoir de baryons (voir Figure 32) qui se concentrent dans des structures relativement peu denses et qui marquent la structuration de la matière sur des grandes échelles. Il est donc important de comprendre la quantité de gaz qu'ils contiennent, comment ils se distribuent dans l'espace, comment la fraction de gaz des nuages évolue avec le temps et quel est leur lien avec la formation des galaxies. Par ailleurs, pour la compréhension des mécanismes de structuration de l'Univers, ces nuages présentent l'avantage d'être des traceurs des grandes structures plus simples que les galaxies. En effet, comme il s'agit de gaz d'Hydrogène extra-galactique relativement peu dense, ils ont moins affectés les mécanismes complexes intervenant dans les régions denses des halos de galaxies conduisant à la formation d'étoiles et sont donc peu sensibles aux effets de biais mal compris qui relie la lumière à la matière.

Pour l'ensemble des catégories de nuage, la distribution en densité de colonne des nuages est très dispersée. Les cas extrêmes sont les systèmes amortis (*Damped Lyman- α* ou *DLA*) ou Lorentziens, dont les raies saturées par la quantité d'Hydrogène montrent qu'ils atteignent des densités de colonne de 10^{20} - 10^{22} cm $^{-2}$ (voir Figure 31).

Les observations montrent que le nombre de nuages absorbants par intervalle de décalage spectral évolue selon la loi empirique:

$$\frac{dN}{dz} \propto (1+z)^{2.3} \quad (78)$$

ce qui, compte tenu de l'accroissement de densité en fonction du décalage spectral, donne la loi d'évolution

$$n_{comobile} \propto (1+z)^\gamma \quad (79)$$

Type	Paramètres des raies		Caractéristiques physiques			$\frac{dN}{dz} = N_0(1+z)^\gamma$	
	N_{HI} (cm^{-2})	n (m^{-3})	T (K)	Dimension (kpc)	$[M/H]$	N_0	γ
Forêt $\text{Ly}\alpha$	$< 10^{17}$	$10^{-2} - 10^3$	5000 – 50000	15–1000	-3.5 – -2	6.1	2.47
LLS	$10^{17} - 10^{19}$	$\sim 10^3 - 10^4$	~ 30000 K	–	-3 – -2	0.3	1.50
Super LLS	$10^{19} - 2 \times 10^{20}$	$\sim 10^4$	~ 10000 K	–	-1 – +0.6	0.03	1.50
DLA	$> 2 \times 10^{20}$	$\sim 10^7$	~ 100 K	$\sim 10 - 20$	-1.5 – -0.8	~ 0.03	~ 1.5
DLA	$> 2 \times 10^{20}$	$\sim 10^4$	~ 10000 K	$\sim 10 - 20$	-1.5 – -0.8	~ 0.03	~ 1.5

Table 2: Table synthétique résumant les propriétés des systèmes absorbants. La classification comporte 3 grandes classes: la forêt Lyman α , ($\text{Ly}\alpha$), les systèmes Ly α amortis (*DLA*) et les systèmes à limite Lyman (LLS). Les Super-LLS en sont une sous-classe. Cette classification est établie sur les propriétés des absorbants mais n'est pas exclusive. $[M/H] = \log_{10}(M/H) - \log_{10}(M/H)_\odot$ donne une idée de leur métallicité. (D'après Meiksin, 2009, Rev. Mod. Phys., 81, 1405).

où $\gamma > 1$ et dépend des paramètres cosmologiques. Dans tous les cas, les nuages étaient donc plus nombreux et/ou avaient une plus grande section efficace à grand décalage spectral.

La dimension de ces nuages dans la direction perpendiculaire à la ligne de visée est estimée en étudiant les raies d'absorption dans les champs à quasars multiples, en corrélant la distribution des nuages Lyman- α dans les spectres de chaque quasar. Les résultats sont très dispersés (entre 5 et 300 kpc!). Cependant il semble que les nuages de la forêt Lyman- α ont les propriétés communes. Ils

- sont de grande dimension (≈ 100 kpc),
- sont corrélés sur des échelles de 1 Mpc.
- La représentation donnée par les observations et les simulations numériques est illustrée sur la figure 32. La forêt Ly α constitue un immense réseau interconnecté filamentaire qui suit la distribution de matière et dont les intersections sont les lieux de formation de galaxies.
- La surdensité baryonique y est en moyenne de $\rho/\langle\rho\rangle \simeq 3N_{\text{HI}}/10^{14} \text{ cm}^{-2}$

La mesure de l'abondance de l'Hydrogène et des métaux dans ces nuages est essentielle pour comprendre l'histoire de la formation stellaire dans l'Univers. C'est techniquement difficile car ces nuages sont ionisés par le flux ionisant des quasars et des galaxies en formation. On peut montrer que la masse de ces systèmes est de l'ordre de

$$M_{FLy} \approx 1.2 \times 10^3 \left(\frac{L}{10 \text{ kpc}} \right)^2 h^{-2} M_\odot, \quad (80)$$

et

$$M_{DLA} \approx 10^{10} \left(\frac{L}{300 \text{ kpc}} \right) h^{-2} M_\odot, \quad (81)$$

où *FLy* se rapporte à la forêt Ly α et *DLA* aux systèmes amortis. Pour évaluer la masse totale incluse dans ces systèmes, on ajuste le nombre de raies par intervalle de redshift avec une loi du

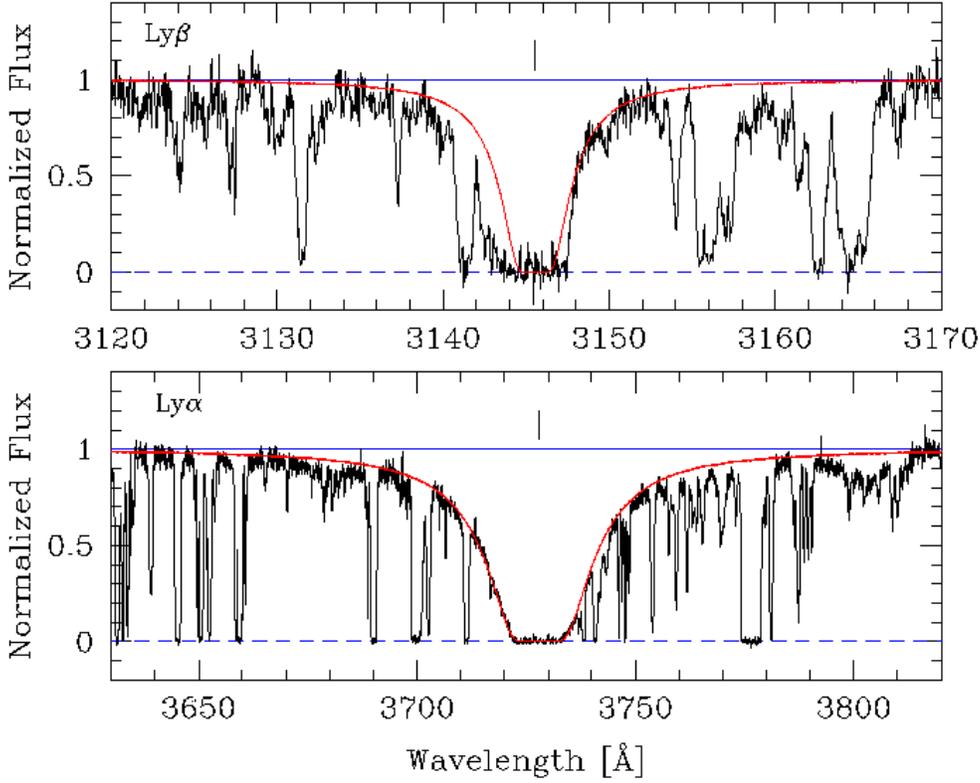


Figure 31: Spectre du quasar Q0450-13 obtenu avec le spectrographe UVES du VLT montrant des raies d'absorption saturées $Ly\alpha$ et $Ly\beta$ produites par un système à grande densité de colonne à $z = 2.06666$. Les lignes rouges montrent des ajustements de profils de Voigt. D'après Dessauges-Zavadsky 2006, A&A 445, 93.

type

$$\frac{dN}{dz} = B(1+z)^\gamma. \quad (82)$$

Pour les nuages de densité de colonne $\Sigma_0 > 10^{14} \text{ cm}^{-2}$, une très forte évolution est observée au-delà de $z \sim 1.5$. Comme le montre la figure 33, $\gamma \approx 2.2$ et $B \approx 9$. La fraction de baryons observée dans ces systèmes est compatible avec l'hypothèse que plus de 85% des baryons résident dans la forêt $Ly\alpha$ à $1.5 < z < 4$.

La distance propre entre deux nuages de la forêt $Ly\alpha$ est donc

$$D_{LyF} = \frac{cdt}{dzdN} \approx 0.6 \Omega^{-1/2} h^{-1} \text{Mpc}. \quad (83)$$

De la même façon, pour les systèmes amortis la distance propre inter-nuage est

$$D_{DLA} = 300 \Omega^{-1/2} h^{-1} \text{Mpc}. \quad (84)$$

On peut montrer alors qu'à grand redshift ($2 < z < 3$), la contribution à la masse d'Hydrogène des systèmes amortis est très grande et est équivalente à celle des galaxies. Par contre, à $z = 0$ cette contribution est dix fois plus faible (voir Figure 33, à gauche). La diminution semble progressive avec le décalage spectral. Ce sont des indications très fortes que ces grands nuages sont des précurseurs de nos galaxies actuelles.

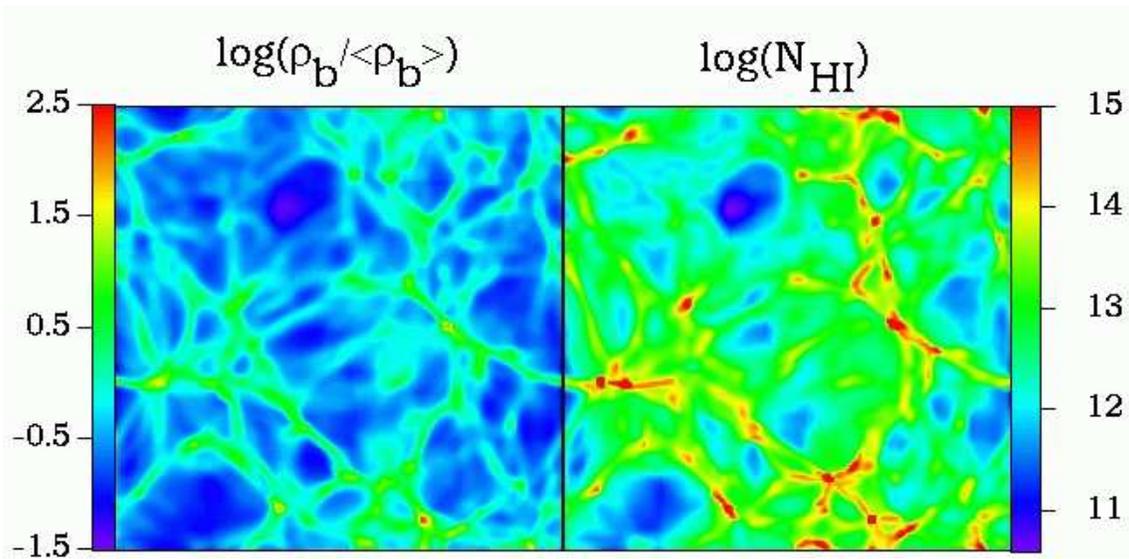


Figure 32: Corrélation entre l'excès de baryon dans les nuages et la densité de colonne de gaz HI (d'après Zhang, Meiksin, Anninos et Norman 1998, ApJ 495, 63).

4.5 Propriétés statistiques des quasars

Notre connaissance des propriétés de regroupement des quasars est encore limitée car la taille des catalogues est sans commune mesure avec celle des galaxies. Les premiers catalogues vraiment imposants sont ceux du 2dF et du SDSS. La figure 34 et ses 23000 quasars montre la distribution de quasars de l'échantillon 2dFQSO.

Il semble que les quasars aient tendance à se regrouper, au moins sur des échelles $< 10 h^{-1}$ Mpc, avec une échelle $r_0 = 6h^{-1}$ Mpc. L'existence des structures cohérentes de quasars sur des échelles de l'ordre de $100 h^{-1}$ Mpc est encore un objet de discussion. Il faut néanmoins souligner que le relevé de quasars du 2dF ne montre aucune structuration à très grande échelle. Ce catalogue montre qu'au delà de 100 Mpc, l'Univers devient homogène et isotrope.

La densité de quasars semble atteindre un pic à $z = 2$ puis décroît fortement. À $z = 4$ elle est 3 fois plus faible qu'à $z = 2$. Ce déclin est observé dans les échantillons optiques et radios. Cependant, le nombre de quasars de décalage spectral ≈ 4 est très faible et il est encore prématuré de donner des valeurs quantitatives précises. Le 2dF et le SDSS, qui ont déjà trouvé un grand nombre de quasars à grand décalage spectral, devraient très vite apporter des informations nouvelles à ce sujet.

4.6 Les fonds de rayonnement

Si la matière représente une contribution importante au contenu de l'Univers, ce n'est pourtant qu'une petite fraction vis à vis des photons. Les observations radio, infrarouge, visible, UV, X et Gamma montrent qu'il existe dans toutes ces longueurs d'onde un fond diffus de photons qui s'ajoute aux contributions individuelles des objets identifiés dans le ciel. Cela ne signifie pas nécessairement qu'il s'agit d'une composante intrinsèquement diffuse car une fraction peut provenir d'objets non résolus.

Il est intéressant de souligner que tous ces fonds de rayonnement sont isotropes. Mais ce n'est visible qu'une fois nettoyés des sources d'avant-plans qui polluent les propriétés statistiques des rayonnements lointains. Par exemple, les composantes anisotropes produites par la Galaxie ou le

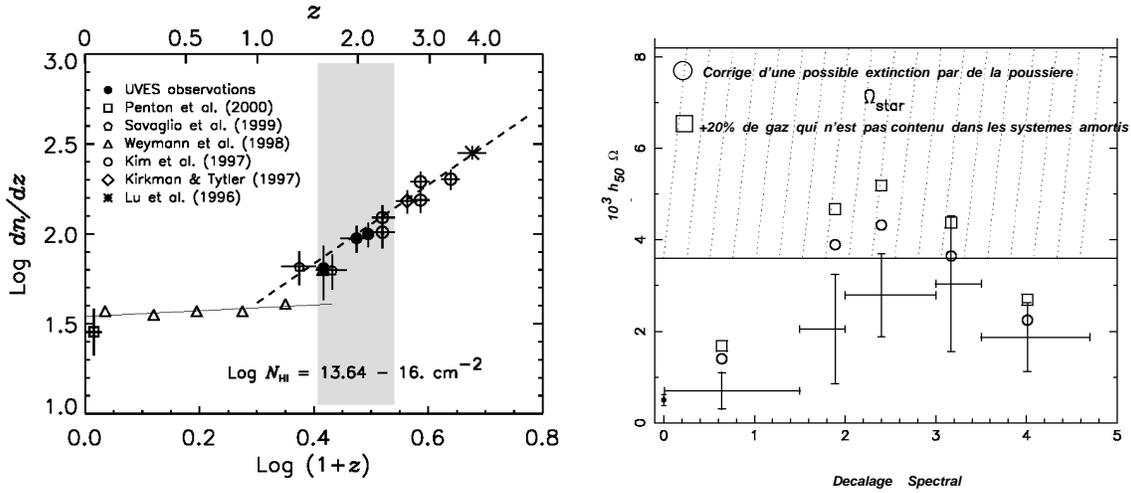


Figure 33: A droite: une compilation des données montrant l'évolution de la densité numérique de nuages Ly_α en fonction du redshift pour les systèmes dont la densité de colonne $\Sigma_0 > 10^{14} \text{ cm}^{-2}$. Jusqu'à $z \sim 1.6$ la pente $\gamma \approx 0.16$, alors qu'une montée abrupte est observée pour $z > 1.6$. La pente moyenne atteint $\gamma \approx 2.2$ (D'après Kim et al 2001, A&A 373, 757). A gauche: mesure de l'abondance d'Hydrogène dans les nuages inter-galactiques en fonction du décalage spectral.

mouvement de la Galaxie vis à vis du fond diffus cosmologique (qui crée une composante dipolaire dans la distribution de température du fond à cause du redshift) doivent être soustraites au préalable.

Les principales contributions au fond de rayonnement sont les suivantes:

1. La contribution dominante est le rayonnement fossile détecté accidentellement en 1965 par Penzias et Wilson. Il a été très vite interprété dans un contexte cosmologique. Le rayonnement fossile constitue plus de 90% de la densité d'énergie sous forme radiative de l'Univers. Les résultats spectaculaires du satellite *COBE* sont connus de tous (voir figure 35). Dans une première étape, dès son départ il a permis de démontrer que ce rayonnement suivait un spectre de distribution d'énergie remarquablement identique à celui d'un corps noir de température

$$T_0 = 2.728 \pm 0.004 \text{ K} . \quad (85)$$

On peut donc calculer la contribution actuelle du fond diffus à la densité d'énergie de l'Univers, exprimée en terme de densité de masse:

$$\rho_{CMB} c^2 = c^2 \int_0^\infty u_r(\nu) d\nu = c^2 \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T_\nu}\right) - 1} d\nu = \sigma T^4 \quad (86)$$

$$\rho_{CMB}(t_0) = \frac{\sigma T_0^4}{c^2} = 4.8 \times 10^{-34} \text{ g.cm}^{-3} , \quad (87)$$

où $\sigma = \pi^2 k_B^4 / (15c^3 \hbar^3) = 7.5 \times 10^{-15} \text{ erg.cm}^{-3}.\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan.

On peut calculer aussi la densité numérique de photons

$$n_{CMB} = \int \frac{\rho_\gamma(\nu)}{h\nu} d\nu \approx 0.4 \frac{\sigma}{k_B} T^3 = 20.4 T^3 , \quad (88)$$

ce qui signifie que la densité numérique actuelle de photons est

$$n_{CMB}(t_0) = 428 \text{ photons.cm}^{-3} \quad (89)$$

Nous évoquerons ce rayonnement à plusieurs reprises dans ce cours.

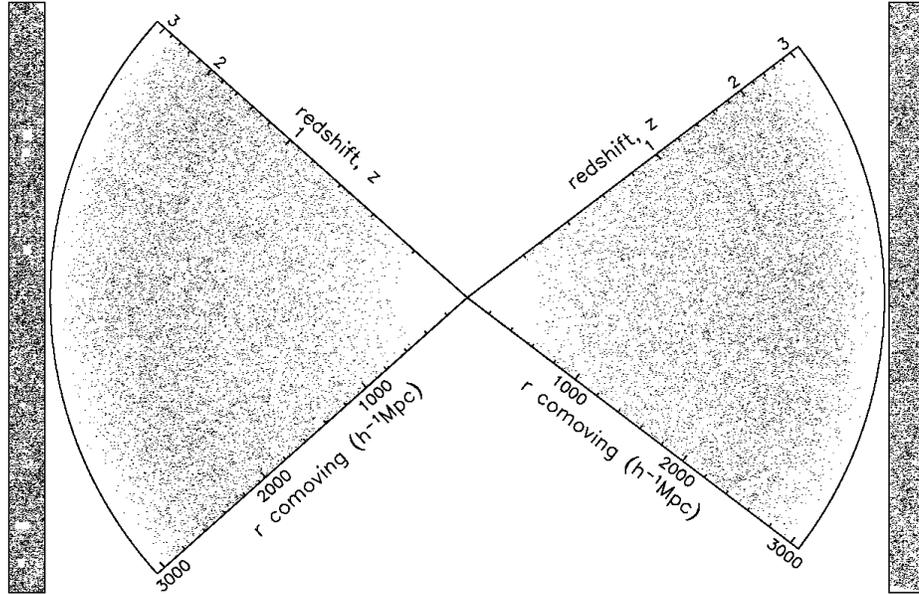


Figure 34: Distribution des 23338 quasars du relevé final 2dFQSO. C'est à ce jour le plus grand relevé de quasars jamais construit. Aucune structuration n'est visible. Les petites bandes latérales représentent la disposition de chaque quasar projetée sur le plan du ciel (D'après Croom et al 2005, MNRAS 356, 415).

2. Il existe une composante diffuse dans le domaine radio. Outre l'émission des galaxies sous forme de rayonnement de freinage du gaz ionisé des régions HII à 10^4 K, les radio-sources contribuent à ce rayonnement.
3. L'autre source intense de rayonnement provient de l'émission des galaxies, depuis le domaine de l'UV lointain jusqu'à l'infrarouge lointain, en passant par le domaine visible. Son origine est principalement le rayonnement stellaire. On sait que la densité des galaxies faibles atteint 200 objets par minute d'arc-carré. Ce sont elles qui contribuent à cette composante diffuse.
Une forte contribution est détectée aussi hors du plan galactique dans l'infrarouge lointain et le submillimétrique. Elle est produite par l'émission des poussières des galaxies lointaines.
4. Le rayonnement X est une composante importante. Il est émis par types de sources, selon des processus d'émissions différents. La première composante ("X-mou") est émise par les radio-galaxies et les quasars, la seconde est produite par le gaz chaud intra-amas, la dernière provient des galaxies de Seyfert.
5. Les sources gamma comprennent notamment les sursauts gamma (Gamma-Ray-Bursts), phénomènes durant quelques millisecondes à quelques centaines de secondes. La fréquence de détection des sursauts gamma est aujourd'hui d'un par jour. Leur origine cosmologique a été démontrée en 1997, grâce à la mesure du premier redshift ($z = 0.835$). L'origine pourrait être la coalescence de deux objets compacts ou bien la manifestation d'une "hy-

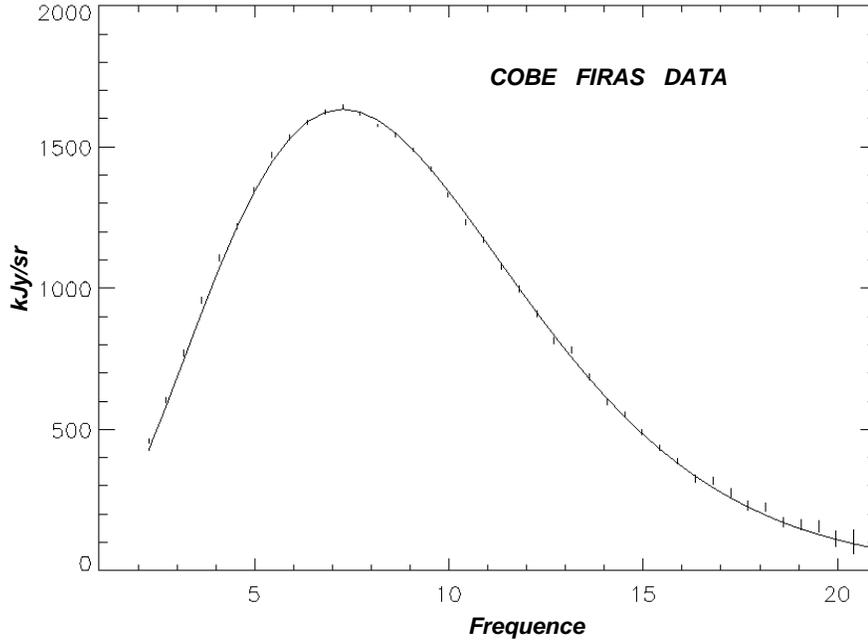


Figure 35: Spectre du rayonnement micro-onde cosmologique mesuré par *COBE*. La comparaison des points de mesure est faite avec un spectre de corps noir à 2.728 K.

pernova” (ou *collapstar*) qui correspond à un effondrement d’une étoile massive en trou noir. Le reste de l’émission provient de quasars et de radio-sources.

4.7 Remarque sur le Paradoxe d’Olbers

Le paradoxe d’Olbers exprime une idée simple : *pourquoi le ciel est-il noir?* En effet, supposons que l’on distribue uniformément dans l’Univers des sources ponctuelles dont la luminosité absolue, L , est identique pour toutes. Le flux apparent reçu de chaque source par un observateur situé à la distance r de la source est $L/(4\pi r^2)$. Si n est la densité numérique des sources, alors le flux total reçu, pour un univers euclidien et statique serait:

$$L_{tot} = \int_0^\infty 4\pi r^2 n \frac{L}{4\pi r^2} dr , \tag{90}$$

qui diverge à l’infini si la densité n est constante. Le ciel ne devrait donc pas être noir, mais au contraire très brillant. On pourrait imaginer que des poussières soient la source d’une forte extinction, mais celles-ci doivent ré-émettre ce rayonnement en infra-rouge. Le ciel devrait alors être très brillant aux basses longueur d’onde, ce qui n’est pas observé.

L’argument contre ce paradoxe est l’âge fini de l’Univers. Il signifie en effet que l’Univers n’a pas pu produire une densité de sources infinie et disposer de cette énergie. Cette explication répond stricto-sensu au paradoxe d’Olbers. Le fond du problème est cependant plus subtil lorsqu’il est discuté dans le cadre d’un univers en expansion adiabatique.

En particulier, l’argument des sources ponctuelles élude le fait, par exemple, que ces sources sont des apports d’énergie qui ionisent le milieu externe et qui provoquent donc un rayonnement par diffusion du milieu ionisé. Ce rayonnement est estimé par sa brillance de surface (car maintenant il ne s’agit plus d’un objet ponctuel mais d’un objet étendu, voire du ciel tout entier). Or la brillance de surface est indépendante de la distance. Donc si l’Univers était fortement ionisé dans le passé, nous devrions être baignés dans ce rayonnement. Ce rayonnement nous pensons

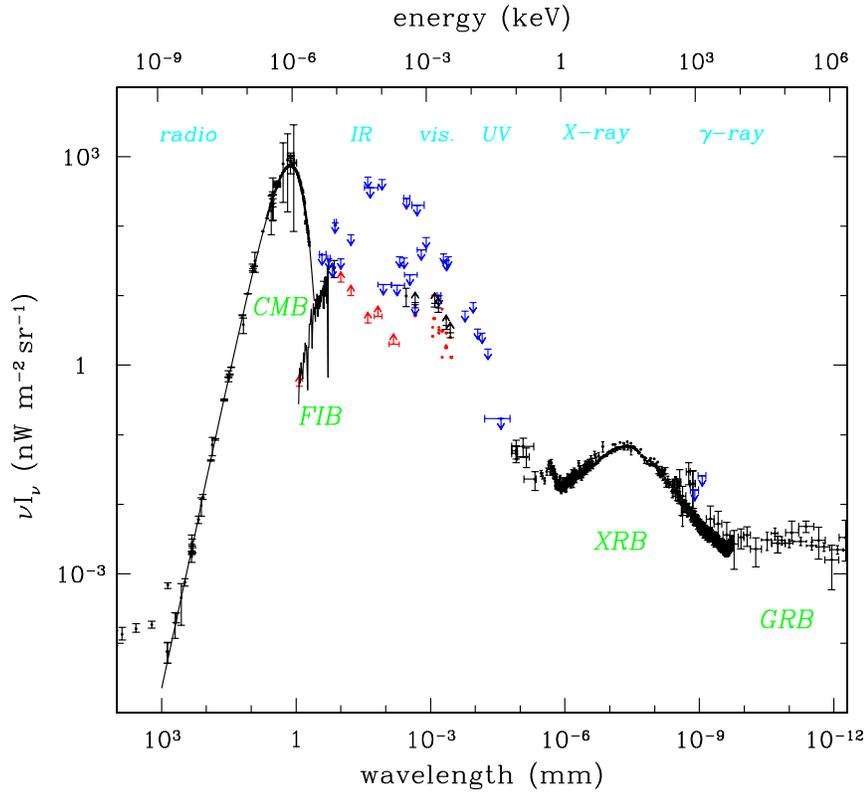


Figure 36: Compilation des observations des fonds de rayonnement. Le fond de rayonnement cosmologique micro-onde domine nettement la densité de rayonnement de l’Univers. Puis viennent ensuite les contributions infrarouge et visible (D’après Halpern & Scott 1999, ASP Conf. Ser. 181, p. 283).

qu’il a du exister si le modèle du Big Bang est valide. Le paradoxe d’Olbers exprimé sous cette forme prend une autre dimension. Mais il a une réponse: l’expansion de l’Univers qui refroidit progressivement et qui décale vers le rouge le rayonnement. Son résidu à 2.7 K existe bien, même s’il n’est plus émis dans le domaine visible. Donc, de ce point de vue le ciel n’est pas noir, mais il rayonne principalement hors du domaine visible.

5 Les bases de la cosmologie moderne

La cosmologie physique moderne repose sur

- une théorie de la gravitation, la relativité générale,
- un certain nombre de postulats qui permettent d’établir des relations théoriques simples entre la courbure de l’Univers et son contenu en matière-énergie: les équations d’Einstein,
- un principe décrivant l’Univers lui-même: le principe cosmologique. C’est ce principe qui permet de définir la métrique de l’Univers et donc de calculer explicitement tous les termes

des divers tenseurs et des symboles de Christoffel intervenant dans les équations d'Einstein puis de construire des grandeurs associées aux observations.

Ce n'est pas l'objet de ce cours de présenter la relativité générale. Pour ceux que cela intéresse, je renvoie au cours de gravitation de L. Gourgoulhon ainsi qu'aux références bibliographiques données au début de ce cours. Je me contente ici de quelques rappels et de discussions qui se rapportent strictement à ce cours.

En relativité restreinte, l'intervalle entre deux événements situés en (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ est:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (91)$$

L'élément ds est invariant par changement de coordonnées. Le chemin parcouru par les photons est simplement défini par $ds = 0$, et celui de toutes particules de matière est tel que $\int_{chemin} ds$ est stationnaire. En l'absence de forces extérieures, les particules suivent une ligne droite.

La relativité générale ne considère plus la gravitation comme une force, mais comme une propriété de l'espace-temps. Celui-ci n'est plus nécessairement plat, mais peut être éventuellement courbé, notamment sous l'action de la gravité. Pour en rendre compte, l'intervalle entre deux événements est défini de façon plus générale sous la forme

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j , \quad (92)$$

où g_{ij} est le tenseur métrique (cf cours de L. Gourgoulhon et les Annexes F et G), $x^0 = ct$, et x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées d'espace.

Le chemin d'une particule libre est une géodésique définie de la façon suivante:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 . \quad (93)$$

Les Γ_{kl}^i sont les symboles de Christoffel¹²:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right] , \quad (94)$$

et

$$g^{im} g_{mk} = \delta_k^i \text{ symbole de Kroneker} \quad (95)$$

5.1 Principe de construction des équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont établies à partir de postulats supplémentaires à ceux de la relativité générale et qui sont donc indépendants du principe d'équivalence. En particulier, Einstein souhaitait

- établir une relation entre la matière-énergie et la métrique,
- faire de l'impulsion-énergie T_{ij} un *tenseur* qui ne contienne que les dérivées premières et secondes de g_{ij} ,
- que sa dérivée covariante soit nulle,
- qu'aux limites (à définir), $T^k_i ; k = 0$ se réduise à l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$.

¹²Nous adoptons la convention d'Einstein où tous les indices répétés signifient une sommation sur l'indice.

Le moyen le plus simple de satisfaire la condition (4) c'est de construire des équations linéaires dans les dérivées secondes de la métrique.

Le tenseur de Riemann-Christoffel, R_{ijkl} , (cf Annexe F, et cours de Gourgoulhon) et le tenseur d'Einstein, G_{ij} , permettent de répondre parfaitement aux postulats d'Einstein. En effet, R_{ijkl} est le seul tenseur que l'on peut construire à partir des dérivées secondes du tenseur métrique. De plus, le tenseur d'Einstein contient bien les dérivées secondes de g_{ij} et respecte bien la propriété $G^k{}_i ; k = 0$ pour que la dérivée covariante du tenseur impulsion-énergie soit nulle. Einstein a donc postulé la forme de son équation fondamentale:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad (96)$$

Le terme $8\pi G/c^4$ garantit qu'aux limites des champs faibles on retrouve bien l'équation de Poisson. On peut noter que, comme $g^k{}_i ; k = 0$ on a bien $T^k{}_i ; k = 0$. En fait la forme la plus générale contient une constante additionnelle, la *constante cosmologique*:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad (97)$$

5.2 Principe cosmologique

La cosmologie moderne est basée sur l'idée que l'homme n'a pas de position privilégiée et donc que l'Univers doit être partout le même. C'est le *Principe Copernicien*. Ce principe est en fait relié au *Principe Cosmologique* qui postule que:

l'Univers est homogène et isotrope. Cette hypothèse a de profondes conséquences sur les propriétés de l'Univers. Nous allons démontrer qu'elle impose en particulier la forme de la métrique de l'espace-temps.

5.2.1 La métrique de Friedmann-Robertson-Walker d'un univers homogène et isotrope

Imaginons que la matière dans l'Univers soit distribuée uniformément sous la forme d'un *fluide cosmique*, sans aucun cisaillement, aucune viscosité ou aucune conduction de chaleur, et que cet univers soit en expansion (mais il pourrait être en contraction ou statique). Dans cet univers, on appellera un observateur au repos par rapport au fluide cosmique un *observateur fondamental*. Lorsque l'Univers s'étend, le fluide cosmique participe à l'expansion et l'observateur fondamental reste fixe mais co-mobile avec ce fluide. Tous les observateurs co-mobiles avec le fluide voient la même image homogène et isotrope de l'Univers.

On peut alors définir la métrique de l'espace-temps dans un référentiel co-mobile. La métrique de Schwarzschild est inadaptée car elle est statique. Nous cherchons une métrique non-statique, homogène et isotrope pour décrire l'Univers entier. Pour cela, prenons le temps propre mesuré par l'observateur fondamental co-mobile avec le fluide cosmique comme coordonnée temporelle, et notons la w . Dans ce cas, la métrique a la forme suivante

$$ds^2 = c^2 dw^2 + 2cg_{0\alpha} dw dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (98)$$

L'hypothèse d'isotropie implique la symétrie sphérique ce qui signifie que la métrique peut s'écrire

$$ds^2 = c^2 dw^2 - D(r, w) dr^2 - c E(r, w) dr dw - F(r, w) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (99)$$

Dans cette équation nous avons choisi une coordonnée radiale sans dimension, $r = R/L$, où R est la coordonnée radiale usuelle qui a la dimension d'une longueur, et L est une longueur de référence de l'Univers qu'il reste à expliciter. Donc, pour des raisons de dimension, $D(r, w)$ et $F(r, w)$ ont les dimensions du carré d'une longueur et $E(r, w)$ a la dimension d'une longueur.

Utilisons maintenant l'équation des géodésiques d'une particule (voir le cours de gravitation relativiste).

$$\frac{du_j}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} u^l u^k \quad (100)$$

or, pour une particule au repos dans le système de référence co-mobile

$$u^0 = 1 \quad \text{et} \quad u^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (101)$$

En substituant dans l'équation des géodésiques on obtient

$$\frac{du_j}{ds} = \frac{d}{ds} (g_{jl} u^l) = \frac{d}{ds} (g_{j0} u^0) \quad (102)$$

soit

$$\frac{dw}{ds} \frac{dg_{j0}}{dw} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} = 0 \quad (103)$$

Donc

$$\frac{dg_{j0}}{dw} = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dw} E(r, w) = 0 \quad (104)$$

Ainsi, la fonction $E = E(r)$ est indépendante de la coordonnée temporelle w , et la métrique s'écrit:

$$ds^2 = c^2 dw^2 - D(r, w) dr^2 - c E(r) dr dw - F(r, w) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (105)$$

Il est possible d'éliminer le terme en $dr dw$ en introduisant une nouvelle coordonnée temporelle:

$$t = w - \frac{1}{2c} \int_0^r E(r) dr \quad \implies \quad dw = dt + \frac{1}{2c} E(r) dr \quad (106)$$

on a donc

$$c^2 dw^2 = c^2 dt^2 + c E(r) dr dt + \frac{1}{4} [E(r)]^2 dr^2 \quad (107)$$

et

$$-c E(r) dr dw = -c E(r) dr dt - \frac{1}{2} [E(r)]^2 dr^2 \quad (108)$$

En substituant (107), (108) dans (105) on obtient

$$ds^2 = c^2 dt^2 - A(r, t) dr^2 - B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (109)$$

où

$$\begin{aligned} g_{11} &= A(r, t) = D[r, w(r, t)] + \frac{1}{2} [E(r)]^2 \\ g_{22} &= B(r, t) = F[r, w(r, t)] \end{aligned} \quad (110)$$

Pour la même raison qu'auparavant, les fonctions $A(r, t)$ et $B(r, t)$ ont la dimension du carré d'une longueur.

Pour expliciter $A(r, t)$ et $B(r, t)$ nous allons appliquer la condition d'homogénéité de l'espace-temps en considérant la transformation de coordonnée suivante:

$$z^\alpha = x^\alpha + \epsilon^\alpha(r, \theta, \phi) \quad , \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (111)$$

En utilisant l'hypothèse initiale que $\epsilon^0 = 0$ et l'équation (111), on obtient

$$\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\beta} \quad , \quad \frac{\partial z^0}{\partial x^\beta} = 0 \quad (112)$$

La loi de transformation générale pour le tenseur métrique covariant, définie par rapport aux systèmes de coordonnées $\{x^k\}$ et $\{z^k\}$ par g_{kn} et \bar{g}_{jl} , respectivement, est donnée par

$$g_{kn} = \frac{\partial z^j}{\partial x^k} \frac{\partial z^l}{\partial x^n} \bar{g}_{jl} \quad (113)$$

Avec les équation (112) et (113) on peut écrire

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial z^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\nu\sigma} \quad (114)$$

Si on substitue (112) dans (114), on obtient alors

$$g_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\nu + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\sigma + \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \bar{g}_{\nu\sigma} \quad (115)$$

En développant (115) et en y éliminant les termes quadratiques dans les dérivées des petits paramètres de translation ϵ^α , on obtient

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} \bar{g}_{\nu\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\nu\alpha}(z^k) \quad (116)$$

L'homogénéité de l'espace-temps impose que la métrique est invariante par rapport à la transformation (111). On a donc

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) = g_{\alpha\beta}(z^k) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (117)$$

En substituant (117) dans (116) on obtient

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} g_{\nu\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} g_{\nu\alpha}(z^k) \quad (118)$$

Par ailleurs, on peut développer $g_{\alpha\beta}(z^k)$ en série de Taylor:

$$g_{\alpha\beta}(z^k) = g_{\alpha\beta}(x^k) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu \quad (119)$$

En substituant (119) dans (118) et en éliminant les termes quadratiques dans les petits paramètres de translation ϵ^α et leurs dérivées, on voit que seuls les termes d'ordre zéro de (119) contribuent à l'équation du premier ordre (118). On a donc

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} g_{\nu\beta}(x^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} g_{\nu\alpha}(x^k) \quad (120)$$

soit

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) = g_{\alpha\beta}(x^k) - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} g_{\nu\beta}(x^k) - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} g_{\nu\alpha}(x^k) \quad (121)$$

En utilisant de nouveau la condition d'homogénéité (117) et en comparant les équations (121) et (119) on obtient alors

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} g_{\nu\beta} (x^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} g_{\nu\alpha} (x^k) = 0 \quad (122)$$

soit

- Pour $\alpha = \beta = 1$, en utilisant la métrique (109) avec (110), l'équation (122) devient

$$\frac{\partial A}{\partial r} \epsilon^1 + 2 \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} A = 0 \quad (123)$$

- Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ on a

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial r} B + \frac{\partial \epsilon^1}{\partial \theta} A = 0 \quad (124)$$

- Pour $\alpha = \beta = 2$, on a

$$\frac{\partial B}{\partial r} \epsilon^1 + 2 \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \theta} B = 0 \quad (125)$$

A partir des équations (124) and (125) on peut éliminer ϵ^2

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \epsilon^2}{\partial r} &= \frac{\partial \epsilon^1}{\partial \theta} \frac{A}{B} \\ \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial r} \epsilon^1 = \frac{\partial}{\partial r} (\ln B^{-1/2}) \epsilon^1 \end{aligned} \quad (126)$$

D'où

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \epsilon^2}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial^2 \epsilon^1}{\partial \theta^2} \frac{A}{B} \\ -\frac{\partial^2 \epsilon^2}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\ln B^{-1/2}) \epsilon^1 + \frac{\partial}{\partial r} (\ln B^{-1/2}) \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} \end{aligned} \quad (127)$$

Si on additionne les deux équations ci-dessus on obtient

$$\frac{\partial^2 \epsilon^1}{\partial \theta^2} \frac{A}{B} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\ln B^{-1/2}) \epsilon^1 + \frac{\partial}{\partial r} (\ln B^{-1/2}) \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} = 0 \quad (128)$$

Par ailleurs, en utilisant les équations (123) et (125) peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) = -\frac{2}{\epsilon^1} \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (\ln B) = -\frac{2}{\epsilon^1} \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (129)$$

Or, par définition, les petits paramètres de translation sont indépendants de la coordonnée temporelle. Par conséquent $\partial_r (\ln A)$ et $\partial_r (\ln B)$ ne sont pas non plus fonction de la coordonnée temporelle. Ceci n'est possible que si les fonctions $A(r, t)$ et $B(r, t)$ se factorisent de la façon suivante

$$A(r, t) = a(r) R^2(t) \quad \text{et} \quad B(r, t) = b(r) R^2(t) \quad (130)$$

où $R(t)$ est une fonction de la coordonnée temporelle t qu'il reste à définir, mais qui a la dimension d'une longueur. Mais par ailleurs, la coordonnée radiale sans dimension r n'est pas définie de façon unique. La métrique (109) est invariante par rapport à une transformation de la coordonnée radiale r en une autre ρ définie par

$$r = \int^\rho F(\rho) d\rho \implies dr = F(\rho) d\rho \quad (131)$$

où $F(\rho)$ est une fonction arbitraire de la nouvelle coordonnée radiale ρ . En fait, si on substitue (131) dans la métrique (109) on obtient

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \bar{A}(\rho, t) d\rho^2 - \bar{B}(\rho, t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (132)$$

où

$$\begin{aligned} g_{11} &= \bar{A}(\rho, t) = A\left(\int^\rho F(\rho) d\rho, t\right) [F(\rho)]^2 \\ g_{22} &= \bar{B}(\rho, t) = B\left(\int^\rho F(\rho) d\rho, t\right) \end{aligned} \quad (133)$$

La métrique (132) a la même forme que celle de (109) et elles sont en fait totalement équivalentes. Par conséquent on est libre de faire un choix arbitraire sur la forme de l'une des deux fonctions $a(r)$ ou $b(r)$. Si on choisit $b(r) = r^2$, alors (109) s'écrit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) a(r) dr^2 - R^2(t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (134)$$

D'après l'expression de la métrique (134) on voit que l'aire d'une sphère de rayon relatif r est égale à $4\pi r^2 R^2(t)$. Si, à un temps choisi de façon appropriée, nous avons $R(t) = L$, alors la surface d'une sphère de rayon relatif $r = \mathcal{R}/L$ est égale à $4\pi \mathcal{R}^2$, et les coordonnées angulaires θ et ϕ deviennent les coordonnées angulaires usuelles.

Pour spécifier la fonction inconnue restante, $a(r)$, il faut utiliser la fonction (123) et la forme factorisée de $A(r, t)$ donnée par (130). On obtient

$$\frac{\partial}{\partial r} (\ln \epsilon^1) = \frac{\partial}{\partial r} (\ln A^{-1/2}) = \frac{\partial}{\partial r} (\ln a^{-1/2}) \quad (135)$$

La solution de l'équation différentielle (135) peut s'écrire:

$$\epsilon^1(r, \theta, \phi) = e(\theta, \phi) a^{-1/2}(r) \quad (136)$$

En substituant les formes factorisées (130) des fonctions $A(r, t)$ et $B(r, t)$, avec $b(r) = r^2$, on obtient

$$\frac{\partial^2 \epsilon^1}{\partial \theta^2} \frac{a}{r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\ln r) \epsilon^1 + \frac{\partial}{\partial r} (\ln r) \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} \quad (137)$$

soit

$$\frac{\partial^2 \epsilon^1}{\partial \theta^2} = \frac{r^2}{a} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \epsilon^1 \right) = \frac{r^2}{a} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\epsilon^1}{r} \right) \quad (138)$$

et si on substitue alors (136) dans (138) alors

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = \frac{r^2}{a^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ra^{1/2}} \right) = C \quad (139)$$

En effet, l'expression à droite de l'équation (139) est une fonction des variables angulaires θ et ϕ seulement, alors que l'expression de gauche est une fonction de la variable r seulement. Donc,

les deux côtés de l'équation (139) sont nécessairement égaux à une constante C . Cette constante peut être déterminée en utilisant (139):

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = C e \quad (140)$$

Maintenant, choisissons que la translation (111) se fasse le long de l'axe polaire (axe z). Dans ce cas, dans les coordonnées cartésiennes correspondantes on a $e(\theta, \phi) \simeq \cos\theta$. Ceci impose que $C = -1$. On obtient ainsi l'équation différentielle de $a(r)$:

$$\frac{r^2}{a^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ra^{1/2}} \right) = -1 \quad (141)$$

dont la solution est

$$a(r) = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (142)$$

En substituant (142) dans (134) on obtient le résultat final pour la forme de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (143)$$

où $R(t)$ est une fonction dynamique de la coordonnée temporelle t qui a la dimension d'une longueur. Elle sera ultérieurement calculée comme une solution des équations du champ gravitationnel. k est la *constante de courbure* qui décrit la géométrie de l'espace tri-dimensionnel à un instant particulier.

L'élément infinitésimal de distance propre entre deux galaxies, donné par $c dt$, peut être calculé à partir de la condition $ds^2 = 0$ grâce à (143):

$$c dt = R(t) d\sigma \quad , \quad d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (144)$$

où $d\sigma^2$ est la métrique de l'espace tri-dimensionnel pour une valeur fixée de la coordonnée t que l'on appelle le *temps cosmique*. Le temps cosmique est un temps universel, égal pour tous les observateurs au repos par rapport à la matière locale.

En utilisant l'équation (144) on aussi écrire $c \Delta t = R(t) \Delta \sigma$ pour des distances propres finies. Toutes les mesures sont faites à la même époque t . La coordonnée radiale r est une coordonnée co-mobile et elle reste fixe pour chaque galaxie. Les coordonnées angulaires θ et ϕ restent fixes elles-aussi pour le mouvement isotrope de chaque galaxie. Ainsi, la métrique spatiale $d\sigma^2$ est figée et la distance propre entre deux galaxies est seulement calibrée par la fonction $R(t)$ lorsque le temps cosmique varie.

La fonction $R(t)$ ayant la dimension d'une longueur, elle est appelée *rayon d'échelle* ou *facteur d'échelle*. Elle croît ou décroît suivant que l'Univers s'étend ou se contracte.

En résumé, pour les univers homogènes et isotropes

1. il existe un temps universel. Dans ce cas, l'espace-temps peut toujours être décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle. On peut toujours écrire la métrique sous la forme:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (145)$$

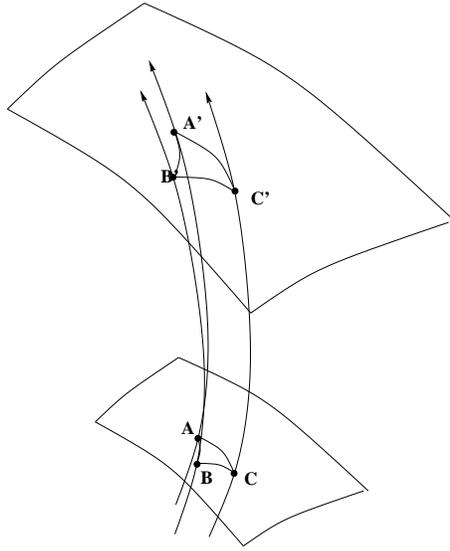


Figure 37: Évolution temporelle d'un triangle sur une hyper-surface $t = Cte$ pour deux coordonnées de temps t et t' . Les deux triangles sont homologues. Les lignes d'univers sont orthogonales aux hyper-surfaces. Elles ne se croisent donc jamais, ce qui permet de définir un temps universel.

où dl^2 représente la composante spatiale de la métrique. La coordonnée t est le temps mesuré, c'est à dire le temps propre d'un observateur dont la ligne d'univers est orthogonale aux coordonnées spatiales.

2. La composante spatiale de l'Univers est homogène et isotrope. On a vu que dans ce cas dl^2 peut se mettre sous la forme

$$dl^2 = B(r, t)dx^2 \quad \text{avec} \quad B(r, t) = R^2(t)F(r) \quad (146)$$

où le coefficient de similitude, R , ne dépend que du temps. En effet, considérons par exemple un triangle semblable observé au temps t et t' (cf Figure 37). En vertu du principe d'homogénéité et d'isotropie, le coefficient de similitude doit être indépendant du triangle choisi et de la position du triangle dans l'espace.

Une conséquence immédiate c'est que les g_{ij} doivent avoir la même forme à tout instant, à un facteur conforme près indépendant du temps.

Par ailleurs, il est possible de démontrer que les sections spatiales sont des hyper-surfaces à *courbure constante*. L'expression la plus générale pour $F(r)$ est

$$F(r)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2}; k = -1, 0, 1 \quad (147)$$

3. La seule métrique satisfaisant le principe cosmologique est la métrique suivante, dite de Friedmann-Roberston-Walker (FRW):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (148)$$

Il existe donc trois types de modèles d'univers homogènes et isotropes, et ils sont caractérisés

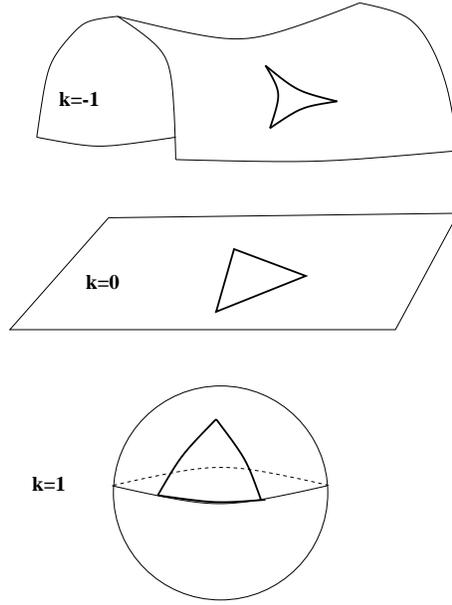


Figure 38: Les trois modèles : ouvert ($k=-1$), plat ($k=0$) et fermé ($k=1$).

par leur courbure. En utilisant $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 \quad dl^2 = R^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ k = 1 \quad dl^2 = R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2) \quad 0 \leq \chi \leq \pi \\ k = -1 \quad dl^2 = R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = R^2(t) (d\chi^2 + \text{sh}^2\chi d\Omega^2) \quad 0 \leq \chi \leq \infty \end{array} \right. \quad (149)$$

Ces trois solutions génériques sont illustrées sur la figure 38.

A partir de ces solutions on peut calculer le volume correspondant (implicitement $R = R(t)$):

$$V = R^3(t) \int_0^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{1-kr^2}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (150)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{k=0} = \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \\ V_{k=1} = \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \left[\frac{3}{2} \frac{\arcsin(r)}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{(1-r^2)^{1/2}}{r^2} \right] \\ V_{k=-1} = \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \left[\frac{3}{2} \frac{(1+r^2)^{1/2}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{\text{argsh}(r)}{r^3} \right] \end{array} \right. \quad (151)$$

L'hypothèse d'un univers isotrope a une base observationnelle relativement solide. Le rayonnement cosmologique résiduel est remarquablement isotrope. Les fluctuations de températures sont uniformément distribuées dans le ciel, et dans tous les cas elles ne dépassent pas des amplitudes de l'ordre de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$. La distribution des galaxies et des quasars (voir par exemple les figures 18 et 34) et des radiosources est aussi remarquablement isotrope. Les évidences concernant l'homogénéité sont moins nombreuses. La distribution des quasars du récent relevé

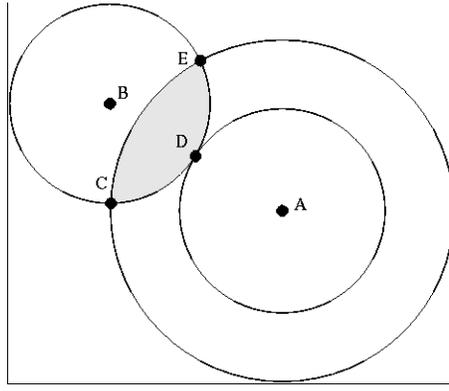


Figure 39: Une justification simple de Peacock (*Cosmological Physics*, Cambridge University Press 1999) qu'un univers partout isotrope implique qu'il est homogène. Pour l'observateur placé au point B, l'isotropie implique que les points C, D et E sont identiques. Dans ce cas, comme l'observateur B n'est pas privilégié, il doit en être de même pour A. Il faut donc nécessairement que cet univers soit homogène.

2dF (Figure 34) est cependant convaincante. Des données identiques sur les radiosources montrent aussi cette homogénéité et la cartographie à très grande échelle des galaxies du relevé 2dF donne des premiers indices que sur des échelles supérieures à 200 Mpc la distribution est homogène. On a donc de fortes présomptions qui confortent un des principes essentiels de la cosmologie physique moderne. Il faut cependant noter que l'hypothèse d'un univers *partout* isotrope (Principe copernicien) implique qu'il est nécessairement homogène. Ceci est illustré sur la figure 39. L'idée exprimée par le principe copernicien utilisée conjointement avec les évidences observationnelles d'isotropie de l'Univers consolident l'hypothèse qu'il est aussi homogène.

Il existe un principe cosmologique fort qui ajoute que l'Univers est immuable dans le temps. C'est en particulier un principe de base des modèles d'univers statique. Cependant l'hypothèse d'un univers statique est en contradiction avec certains faits observationnels, comme le paradoxe d'Olbers ou la forme du spectre de corps noir du rayonnement cosmologique fossile. En effet, l'existence de ce rayonnement n'a pas de sens dans le cadre des modèles statiques, sauf s'il est produit par d'hypothétiques poussières. Le spectre prédit dans cette hypothèse n'a pas la forme observée par le satellite COBE. Par la suite nous admettrons le principe cosmologique sans l'hypothèse d'un temps immuable.

5.3 Conséquences du principe cosmologique

5.3.1 Loi de Hubble

La *distance propre*, D_{pr} , d'un point P par rapport à un point P_0 , que nous prendrons à l'origine d'un système de coordonnées polaires, est la distance parcourue par un photon (cdt), soit:

$$D_{pr} = \int_0^r \frac{R(t)dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t)f(r) \quad (152)$$

où $f(r) = \arcsin(r)$, r , $\text{argsh}(r)$ pour $k = 1, 0, -1$ respectivement.

On peut comparer la distance propre au temps t à celle au temps t_0 :

$$D_{pr}(t) = R(t)f(r) \quad ; \quad D_{pr}(t_0) = R(t_0)f(r) \quad (153)$$

et donc

$$D_{pr}(t_0) = \frac{R(t_0)}{R(t)} D_{pr}(t) \quad (154)$$

Ainsi, la distance propre change avec le temps. Les objets ont donc une vitesse radiale

$$v_r = \frac{dD_{pr}(t)}{dt} = \dot{R}(t)f(r) = \dot{R}(t)\frac{D_{pr}}{R(t)} = H(t)D_{pr} . \quad (155)$$

C'est la *loi de Hubble*. La quantité

$$\dot{R}(t)/R(t) = H(t) \quad (156)$$

est le *paramètre de Hubble*.

C'est une conséquence directe du principe cosmologique.

5.3.2 Redshift

Par définition, le décalage spectral (redshift) z s'exprime en fonction de la longueur d'onde observée au point O au temps t_0 et de la longueur d'onde émise au temps t_e sous la forme

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (157)$$

Comme un photon a pour caractéristique $ds^2 = 0$, on a donc

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (158)$$

Soient deux maxima consécutifs de l'onde, l'un émis à t_e et reçu à t_0 et l'autre émis à $t_e + \delta t_e$ et reçu à $t_0 + \delta t_0$. On a

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} \quad (159)$$

soit

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \Phi(t_0 + \delta t_0) - \Phi(t_e + \delta t_e) - \Phi(t_0) + \Phi(t_e) = \Phi'(t_0)\delta t_0 - \Phi'(t_e)\delta t_e = 0 , \quad (160)$$

où Φ' est la dérivée de Φ , et par conséquent

$$\frac{\delta t_e}{R(t_e)} - \frac{\delta t_0}{R(t_0)} = 0 . \quad (161)$$

C'est en particulier vrai pour $\delta t = 1/\nu$, où ν est la fréquence de l'onde. Il est donc immédiat que $\nu_e R(t_e) = \nu_0 R(t_0)$, et donc

$$\frac{R(t)}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{\lambda_0} \quad (162)$$

Le redshift exprime donc le rapport des facteurs d'échelle:

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)} \quad (163)$$

L'existence du décalage spectral cosmologique est donc aussi une conséquence du principe cosmologique.

6 Cosmographie: grandeurs physiques des univers homogènes et isotropes

6.1 Paramètre de décélération

Le paramètre de Hubble mesure le taux d'expansion à un temps t , mais il varie en fonction du temps selon une loi qui dépend du contenu de l'Univers. En effet

$$R(t) = R(t_0) + (t - t_0) \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)_{t=t_0} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \left(\frac{d^2R(t)}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \dots \quad (164)$$

Ecrivons

$$\left(\frac{dR(t)}{dt} \right)_{t=t_0} = R_0 \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)_{t=t_0} \quad (165)$$

où $R_0 = R(t_0)$. On a donc, en notant $H_0 = H(t_0)$:

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = R_0 \left(\frac{d \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)}{dt} \right) = R_0 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} \left(\frac{R_0}{\dot{R}(t_0)} \right)^2 = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t) R_0}{\dot{R}^2(t_0)} \quad (166)$$

on a donc

$$R(t) = R_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right] \quad (167)$$

où

$$q_0 = - \frac{\ddot{R}(t_0) R_0}{\dot{R}^2(t_0)} \quad (168)$$

est le *paramètre de décélération*.

6.2 Temps écoulé

Connaissant l'expression du redshift, on peut calculer $1 + z$ et $(t_0 - t)$, le temps écoulé depuis t , pour des petits $H_0(t - t_0)$:

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{1}{\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right]} \quad (169)$$

que l'on développe sous la forme $(1 + u)^{-1}$ avec $u = \left(H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right)$ en conservant tous les termes jusqu'à l'ordre $H_0^2(t - t_0)^2$. On en déduit

$$1 + z = 1 + H_0(t_0 - t) + H_0^2(t_0 - t)^2 \left[1 + \frac{q_0}{2} \right] + \dots \quad (170)$$

On peut inverser cette expression et déduire le temps écoulé entre le redshift z et maintenant:

$$t(0) - t(z) = t_0 - t = \frac{-H_0 + H_0 \sqrt{1 + 4z \left(1 + \frac{q_0}{2} \right)}}{2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2} \quad (171)$$

d'où

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \left[z - z^2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) + \dots \right] \quad (172)$$

La figure 40 montre comment ce temps dépend du redshift d'une façon générale pour des modèles plus complexes. Les relations entre le temps écoulé, le facteur d'expansion et le redshift sont montrées pour toute une série de modèles cosmologiques sur la figure 41.

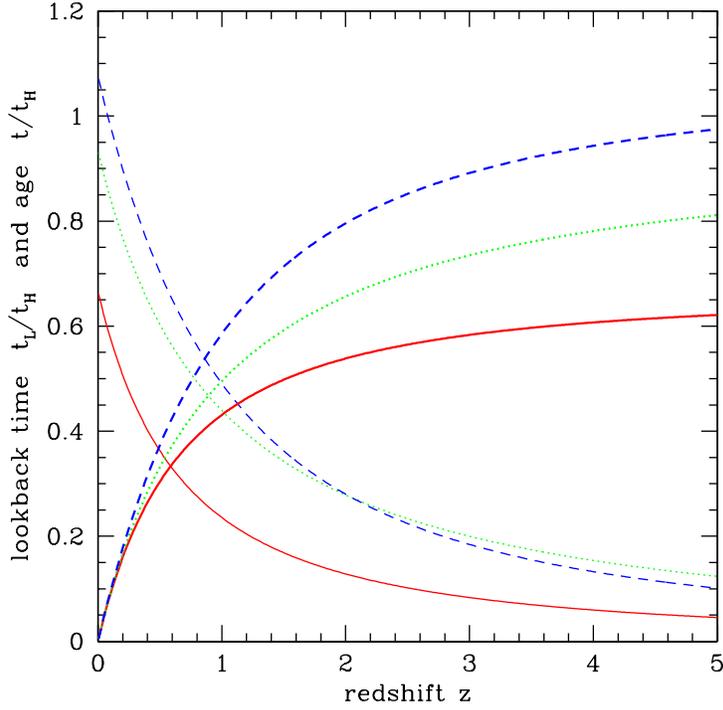


Figure 40: Les échelles de temps en fonction des paramètres cosmologiques. En traits fins (décroissants), l'âge de l'Univers, en traits épais (croissants), le temps écoulé. Les traits continus rouges sont pour $(\Omega_m = 1.0; \Omega_\Lambda = 0.0)$, les traits pointillés verts sont pour $(\Omega_m = 0.05; \Omega_\Lambda = 0.0)$, les tirets bleus sont pour $(\Omega_m = 0.2; \Omega_\Lambda = 0.8)$. L'unité est le temps de Hubble, $t_H = 9.8 \times 10^9 h^{-1}$ ans.

6.3 Distances et magnitudes

A cause de la vitesse finie de la propagation des photons et de l'expansion de l'Univers, le concept et la mesure des distances demandent une attention particulière. Lorsque l'on parle de distance, il faut donc préciser ce que nous mesurons, comment nous le mesurons et à quel instant nous le mesurons.

Les distances utilisées en cosmologie s'articulent autour de la coordonnée comobile radiale, $dr/\sqrt{1-kr^2}$, et de la *distance propre* pour définir des distances mesurables en fonction des grandeurs physiques auxquelles elles sont associées.

6.3.1 Distance propre

La distance propre entre un observateur situé à l'origine des coordonnées et un objet astronomique est la distance physique instantannée à un temps t . C'est la distance (en mètres) entre l'observateur et la position d'un objet céleste sur notre hypersurface de temps constant (i.e. $dt=0$). Comme il s'agit de distance radiale, on a donc:

$$D_{pr} = \int_0^r \frac{R(t)dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = R(t)f(r) \quad (173)$$

On peut facilement exprimer la coordonnée comobile r en fonction de H_0 , q_0 et z . En effet

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \approx r + \mathcal{O}(r^3) \quad (174)$$

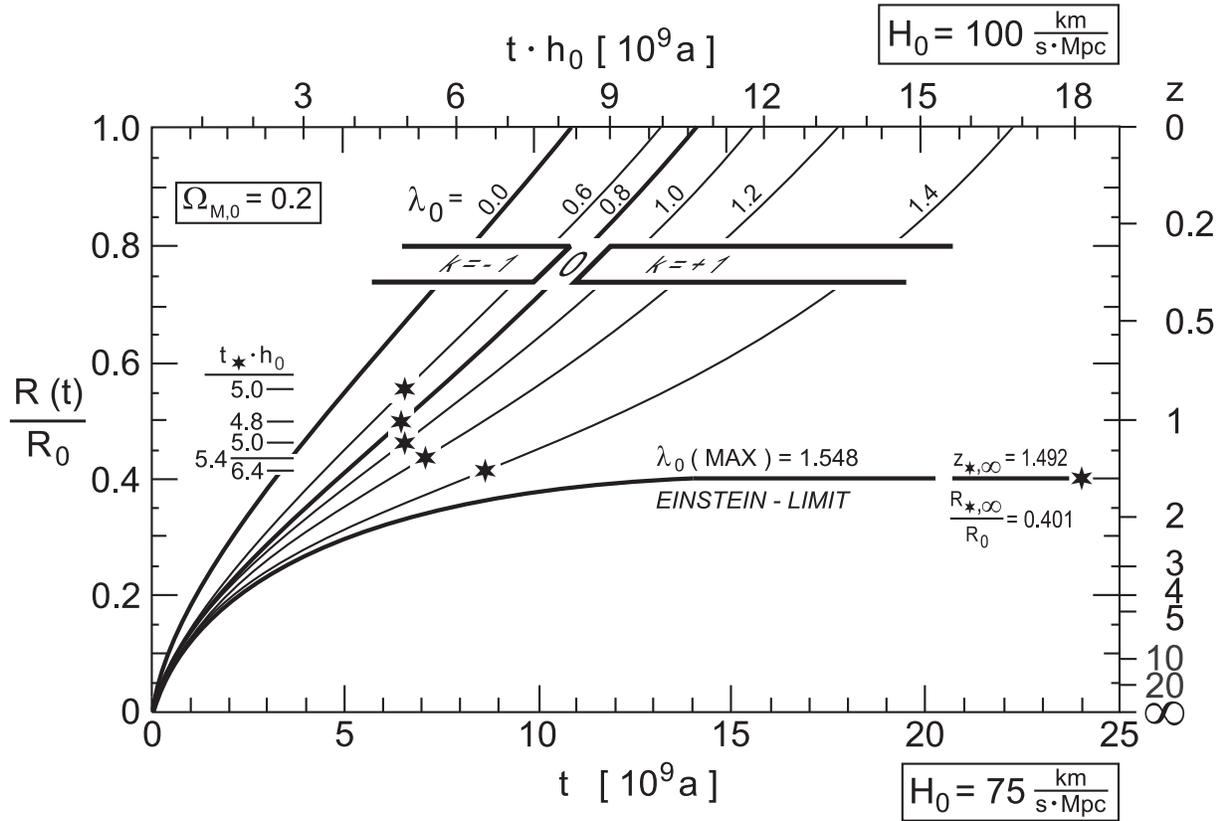


Figure 41: Relations entre temps cosmique, facteur d'échelle (normalisé à $t = t_0$) et redshift (à droite) selon les valeurs des paramètres cosmologiques fondamentaux, pour $\Omega_m = 0.2$ et une série de valeur de la courbure, k ou de la constante cosmologique λ_0 . L'abscisse du temps est calibrée suivant $H_0 = 75$ (en bas) ou $H_0 = 100$ (en haut). D'après van de Bruck et Priester 1998, astro-ph/9810340.

Donc au premier ordre

$$\frac{c}{R_0} \int_{t_e}^{t_0} (1+z) dt = r \quad (175)$$

D'après l'expression de $1+z$ (Eq. 170), on a

$$\frac{c}{R_0} \left[(t_0 - t) + \frac{H_0}{2} (t_0 - t)^2 + \dots \right] = r \quad (176)$$

et compte tenu de l'expression de $(t_0 - t)$ donnée par l'équation (172), on a finalement

$$r = \frac{c}{R_0 H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) + \dots \right] \quad (177)$$

La distance propre peut donc s'exprimer en fonction du redshift $D_{pr} = R(t)f(z)$ et, comme celui-ci dépend du temps (voir Eq.163), lorsqu'on différencie par rapport au temps on obtient une expression générale de la vitesse qui comporte un terme de récession, v_{rec} et un terme intrinsèque, v_{pec} :

$$v = \frac{dD_{pr}(t)}{dt} = \dot{R}(t)f(r) + R(t)\dot{f}(z) = v_{rec} + v_{pec} . \quad (178)$$

Il en résulte que suivant l'expansion nous pouvons avoir des vitesses superluminiques. En effet, pour un photon $ds = 0$ et donc

$$cdt = R(t) df(r) \implies v_{pec} = c . \quad (179)$$

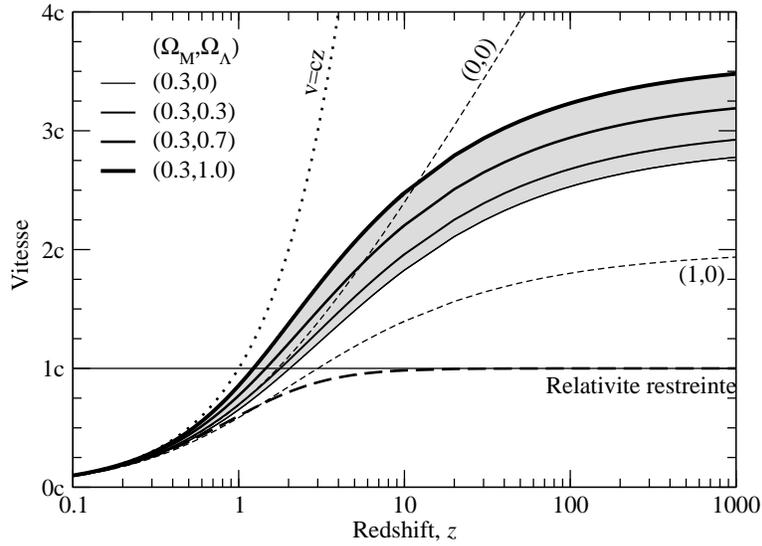


Figure 42: Comportement des vitesses relativistes en fonction du redshift. La courbe en pointillés représente le terme cz . L'évolution de la vitesse relativiste au sens de la relativité restreinte est la ligne en tirets qui asymptote $v = c$. Les autres courbes sont des termes de vitesse de récession de gravitation relativiste pour différents modèles cosmologiques caractérisés par les paramètres Ω_m et Ω_Λ . La zone grisée montre le domaine de paramètres qui semble les plus réalistes compte tenu de nos connaissances actuelles. On voit que pour tous ces modèles $v_{rec} > c$ pour $z > 2$. D'après Davis & Lineweaver 2003, astro-ph/0310808.

Pour un photon qui s'approche de l'observateur on peut avoir en principe $v = v_{rec} - c > 0$ suivant l'histoire de l'expansion contenue dans le terme $\dot{R}(t)f(r)$ qui dépend du redshift et donc du temps écoulé depuis l'émission du photon. Comme le terme $f(r)$ contient la courbure la possibilité d'avoir des vitesses superluminiques dépend donc du modèle d'univers considéré.

Cette propriété remarquable n'est pas en contradiction avec la relativité restreinte car v_{rec} traduit la vitesse d'expansion de l'espace et non pas celle d'un objet dans cet espace. C'est un terme relativiste, mais au sens de la gravitation et les deux termes relativistes sont en fait très différents:

$$v_{Grav/rec} = \dot{R}(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad , \quad \text{alors que} \quad v_{Rela/rec} = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \quad . \quad (180)$$

La fréquente confusion entre ces deux termes vient du fait qu'à bas redshift, l'expansion s'écrit $v = H_0 D = c z$ à cause de la mesure des vitesses par le décalage spectral, alors que la vitesse relativiste au sens de la relativité restreinte se simplifie aussi en $v = c z$. La figure 42 montre explicitement le comportement des deux termes en fonction du redshift et notamment comment varie la vitesse d'expansion en fonction du modèle cosmologique

6.3.2 Séparation comobile

La séparation physique entre deux objets subit aussi l'expansion et n'est donc pas une quantité constante. Cependant, si on mesure la séparation entre deux galaxies proches, par exemple, on peut admettre que la *séparation propre* est mesurable et est effectivement la distance séparant les deux galaxies aujourd'hui. Cette distance peut s'exprimer sous la forme

$$d\vec{D}(t) = R(t)d\vec{r} \quad (181)$$

On peut alors normaliser par le facteur d'échelle aujourd'hui, $R(t_0)$ tel que $d\vec{D}(t_0) = R_0 d\vec{r} = \vec{d}r$ et comme le redshift est donné par $(1+z) = R_0/R(t)$ on définit la séparation comobile à l'instant t par

$$d\vec{D}(t) = R(t) d\vec{r} = \frac{\vec{d}r}{1+z}. \quad (182)$$

Ainsi, par définition la séparation comobile à l'époque présente correspond à la séparation propre. Comme on pouvait s'y attendre elle décroît comme $(1+z)$ lorsque z croît. Elle indique la distance/séparation nous mesurerions *aujourd'hui* entre deux objets pris dans le flot de l'expansion.

6.3.3 Distance de Hubble

La distance de Hubble est par définition

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 9.25 \times 10^{25} h^{-1} \text{ cm} = 3000 h^{-1} \text{ Mpc} \quad (183)$$

6.3.4 Distance lumineuse

La distance lumineuse D_L est définie pour préserver la loi de diminution de la luminosité en fonction de la distance telle qu'elle est définie pour un univers euclidien:

$$D_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (184)$$

où L est la luminosité absolue, c'est à dire la puissance émise à la coordonnée comobile r au temps t , et l est le flux reçu par l'observateur à $t = t_0$. La distance lumineuse dépend fortement de la distance comobile et du redshift. En effet, soit un observateur O situé à la coordonnée $r = 0$ et qui reçoit au temps t_0 des photons d'une source située à la coordonnée r_1

1. Si la source a une luminosité absolue L , elle émet une énergie $L dt_1$ pendant l'intervalle dt_1 ;
2. cette énergie sera distribuée sur une sphère d'aire $4\pi R_0^2 r_1^2$ mais sera maintenant reçue pendant un intervalle de temps dt_0 plus long

$$dt_0 = \frac{R_0}{R(t_1)} dt_1 \quad (185)$$

3. et la densité de flux (qui s'exprime en $\text{erg.cm}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$) est aussi affectée par le décalage vers le rouge d'une quantité $R_0/R(t_1)$.

Par conséquent,

$$4\pi R_0^2 r_1^2 dt_0 l = L dt_1 \frac{1}{1+z} \quad (186)$$

soit

$$l = \frac{L}{4\pi R_0^2 r_1^2} \frac{1}{(1+z)^2}. \quad (187)$$

Compte tenu de la définition de la distance lumineuse, on a donc

$$D_L(z) = R_0 r (1+z) = \frac{R_0^2}{R(t)} r \quad (188)$$

En poursuivant avec les développements au premier ordre de la coordonnée comobile r en fonction de z (Eq. 177) on a

$$D_L = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] \quad (189)$$

La figure 43 montre le comportement de la distance lumineuse avec le redshift.

On peut alors s'intéresser plus précisément aux relations entre les flux observés et ceux reçus lorsque l'expansion doit être prise en compte.

Soit $S(\nu_0)$, la *densité de flux de la source*, c'est à dire l'énergie reçue par unité de temps, par unité de surface et par unité de fréquence. Soit $N(\nu_1)$, le nombre de photons émis d'énergie $h\nu_1$ dans la bande de fréquence $\Delta\nu_1$ pendant le temps Δt_1 . La luminosité de la source dans la bande ν_1 est donc

$$L(\nu_1) = \frac{N(\nu_1) h\nu_1}{\Delta t_1 \Delta\nu_1} \quad (190)$$

Supposons que l'énergie reçue de la source soit captée par un collecteur couvrant une aire $\pi\Delta l^2/4$ et que cette aire corresponde à un angle solide d'émission de $\Delta\Omega/4\pi$. L'énergie reçue pendant une durée Δt_0 est donc:

$$S(\nu_0) = \frac{N(\nu_1) \left(\frac{\Delta\Omega}{4\pi} \right)}{\Delta t_0 \Delta\nu_0 \left(\frac{\pi\Delta l^2}{4} \right)} h\nu_0 \quad (191)$$

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_1) \Delta t_1 \Delta\nu_1}{h\nu_1} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{h\nu_0}{\Delta t_0 \Delta\nu_0 \left(\frac{\pi\Delta l^2}{4} \right)} \quad (192)$$

Or

$$\Delta t_0 \Delta\nu_0 \quad \text{et} \quad \Delta t_1 \Delta\nu_1 = 1 \quad (193)$$

et par ailleurs, si la source se trouve à une distance propre radiale $D = rR(t_0)$, on a

$$\Delta l = D\Delta\theta \quad \text{et} \quad \Delta\Omega = \frac{\pi}{4}\Delta\theta^2 \quad (194)$$

Donc

$$S(\nu_0) = L(\nu_1) \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{1}{4\pi D^2} = \frac{L(\nu_1)}{4\pi D^2(1+z)} \quad (195)$$

On peut maintenant estimer la luminosité bolométrique:

$$L_{Bol} = L(\nu_1) \Delta\nu_1 = 4\pi D^2(1+z) S(\nu_0) \Delta\nu_1 \quad (196)$$

Soit

$$L_{Bol} = 4\pi D^2(1+z)^2 S(\nu_0) \Delta\nu_0 = 4\pi D^2(1+z)^2 S_{Bol} \quad (197)$$

et donc

$$S_{Bol} = \frac{L_{Bol}}{4\pi D^2(1+z)^2} = \frac{L_{Bol}}{4\pi D_L^2} \quad (198)$$

avec $D = rR(t_0)$. Il est intéressant de remarquer que l'on peut aussi écrire

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_0)}{4\pi D_L^2} \left[\frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right] \quad (199)$$

Dans ce cas, pour une densité de flux monochromatique, le terme

$$-2.5 \log_{10} \left[\frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right] \quad (200)$$

est appelé *K*-correction.

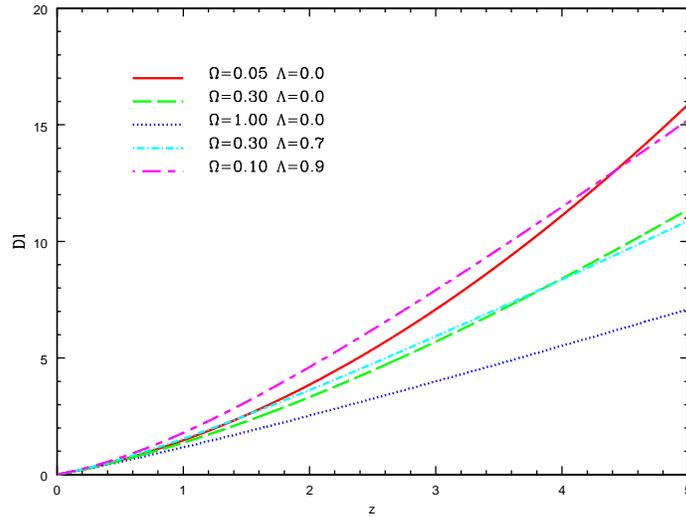


Figure 43: Comportement de la distance lumineuse en fonction du décalage spectral pour 5 modèles cosmologiques. L'unité de distance est le rayon de Hubble, $c/H_0 = 3 \cdot h^{-1}$ Gpc.

6.3.5 Distance diamètre angulaire

A l'instar de la distance lumineuse, la distance diamètre angulaire est construite pour préserver les propriétés de l'espace euclidien pour la variation angulaire d'un objet en fonction de la distance à l'observateur. Elle convertit donc une séparation angulaire observée d'un objet en une dimension physique transverse.

Soit D_{pr} le *diamètre propre* d'une source placée en r au temps t . Si $\Delta\theta$ est l'angle sous-tendu par D_{pr} , alors $D_{pr} = R(t)r\Delta\theta$. Par définition, la distance diamètre angulaire est

$$D_A = \frac{D_{pr}}{\Delta\theta} = R(t)r \quad (201)$$

La relation entre la distance angulaire et la distance lumineuse est donc

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2} \quad (202)$$

La distance diamètre angulaire a la propriété remarquable de ne pas nécessairement croître indéfiniment avec le décalage spectral et de diminuer au-delà de $z \approx 1$ (voir figure 44). Ainsi, pour certaines cosmologies, les objets les plus lointains ont une dimension angulaire plus grande que les objets proches. Ainsi, pour une cosmologie sans constante cosmologique, l'angle sous-tendu, θ , par un objet dont la dimension est D_{pr} est donc

$$\theta = \left(\frac{D_{pr}H_0}{c} \right) \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0z + (q_0 - 1) (\sqrt{1 + 2q_0z} - 1)} \quad (203)$$

6.3.6 Relation magnitude-redshift

Par définition le module de distance est la différence entre la magnitude apparente, m , et la magnitude absolue, M d'un objet. Il s'exprime en fonction de la distance lumineuse:

$$m - M = -5 + 5\log(D_L) \quad (204)$$

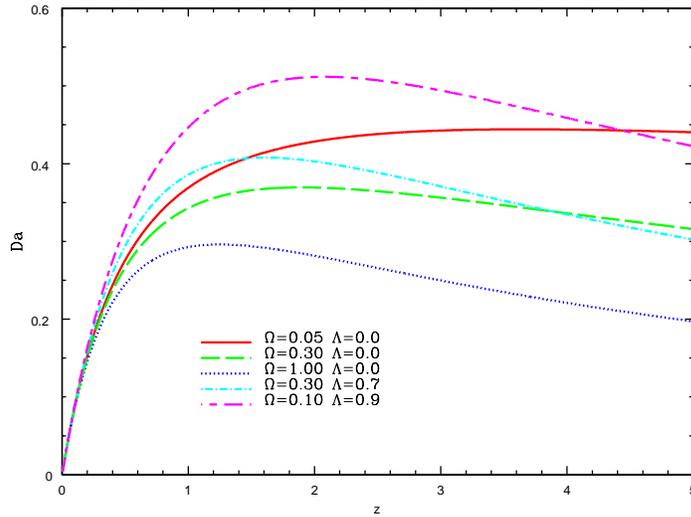


Figure 44: Comportement de la distance diamètre angulaire en fonction du décalage spectral pour les mêmes modèles cosmologiques que la figure 43. Pour la plupart, la distance décroît au-delà d'un redshift de 1, ce qui signifie que l'objet a une dimension angulaire apparente qui croît. L'unité de distance est le rayon de Hubble, $c/H_0 = 3. h^{-1}$ Gpc.

où d_L est en parsec. Comme on connaît la relation entre D_L et r on peut donc exprimer le module de distance en fonction de z et q_0 . Dans le cas général, on peut montrer que dans une cosmologie avec une constante cosmologique nulle, la distance lumineuse est donnée par la *relation de Mattig* et le module de distance s'écrit alors

$$m - M = -5 - 5 \log H_0 + 5 \log \left[\frac{1}{q_0^2} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left[\sqrt{2q_0 + 1} - 1 \right] \right] \right]. \quad (205)$$

Pour des petits z , on peut utiliser l'équation (189) et dans ce cas

$$m - M = -5 + 5 \log \left[\frac{10^6 cz}{H_0} \right] + 5 \log \left[1 + \frac{1}{2} (1 - q_0) z \right]. \quad (206)$$

Le terme 10^6 provient de la transformation des Mégaparsecs (cz/H_0) en parsec. On a donc:

$$m - M = 25 - 5 \log \left[H_0 (\text{km.s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}) \right] + 5 \log \left[cz (\text{km.s}^{-1}) \right] + 1.086(1 - q_0)z + \dots \quad (207)$$

On remarque que la magnitude apparente est sensible au paramètre de décélération q_0 . On peut donc en principe construire des diagrammes $m(z)$ pour évaluer la valeur de ce paramètre cosmologique.

6.3.7 Relation Comptage-magnitude

On peut déterminer comment varie le nombre de sources de luminosité apparente supérieure à l en fonction de l , $N(> l)$. Pour un univers euclidien, si toutes les galaxies ont même luminosité absolue L et si les objets sont distribués uniformément avec une densité n_0 on a simplement

$$N(l) = \frac{4}{3} \pi n_0 D_L^3 \quad (208)$$

Comme

$$D_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (209)$$

on a

$$N(l) \propto l^{-3/2} . \quad (210)$$

Puisque la magnitude apparente est donnée par une expression de la forme $m = -2.5\log l + K$, on a donc une relation linéaire simple entre la densité numérique de galaxies et la magnitude apparente.

$$\log N(l) = 0.6m + K' \quad (211)$$

soit

$$\alpha = \frac{d \log N(l)}{dm} = 0.6 \quad (212)$$

qui peut être comparée directement aux observations (voir Section 4.1.5). C'est une propriété caractéristique des modèles euclidiens. En fait on peut démontrer qu'elle reste exacte lorsque les galaxies n'ont pas toute la même luminosité absolue. La pente des comptages des galaxies permet donc en principe de tester si notre univers est localement euclidien.

Dans le cas plus général, on a

$$N(l) = 4\pi \int_0^r n[t(r')] R[t(r')]^3 \frac{r'^2}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' \quad (213)$$

où $t(r')$ est le temps auquel une source placée en r' a émis un signal qui arrive à l'observateur à t_0 (maintenant).

Si les galaxies ne sont ni créées ni détruites pendant l'intervalle $t(r) < t < t_0$, alors $nR^3 = n_0R_0^3$ et donc

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \int_0^r \frac{r'^2}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' \quad (214)$$

L'intégrant vaut $\sin(r)$, r , $\text{sh}(r)$ suivant la valeur de k . En développant en série de Taylor, on a, au premier ordre:

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{1}{10} kr^5 + \dots \right] \quad (215)$$

En utilisant l'expression de r (Eq. 177) on obtient

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \frac{r^3}{3} \left[1 + \frac{3}{10} kr^2 \right] \approx 4\pi n_0 R_0^3 z^3 \left[1 + \frac{z}{2} (1 + q_0) \right]^3 \quad (216)$$

soit

$$\log N(l) = 3\log z - 0.651(1 + q_0)z + K' \quad (217)$$

qui permet donc en principe de déterminer q_0 à partir des comptages des galaxies.

6.3.8 “Dimming factor”: effet de brillance de surface

Considérons la brillance de surface d'une source dans un univers sans expansion. Soit B_{int} sa brillance de surface intrinsèque. On suppose par simplicité qu'elle est uniforme et correspond à la brillance de surface bolométrique. B_{int} est la puissance émise par une source par unité de surface et unité d'angle solide. La luminosité intrinsèque L d'une section de la source d'aire S est $L_{int} = 2\pi S B_{int}$.

Soit un pinceau d'angle solide Ω d'une source à la distance euclidienne D , on a

$$L = 2\pi B_{int} S = 2\pi B_{int} \Omega D^2 . \quad (218)$$

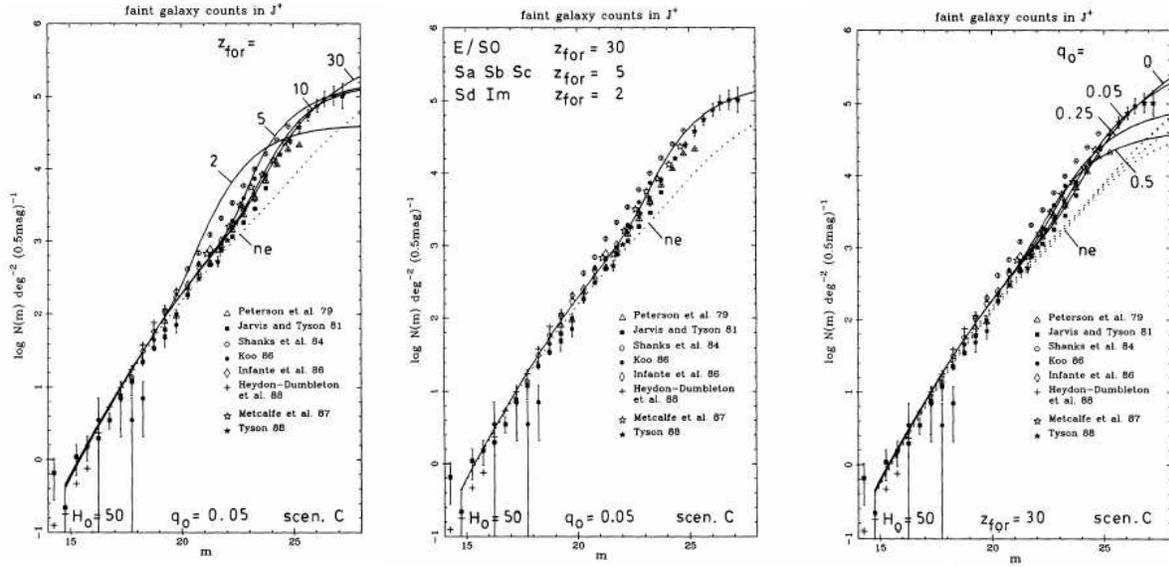


Figure 45: Comptages de galaxies par intervalle de magnitude. Les points sont les mesures obtenues par différentes observations. Les lignes continues représentent des scénarios d'univers avec évolution et les lignes pointillées les mêmes modèles sans évolution. De gauche à droite: effet du redshift de formation, effet du flux UV, effet de q_0 . Les modèles présentés ne parviennent pas à reproduire correctement les comptages. Les effets cosmologiques et les effets d'évolution se combinent. La complexité des phénomènes conduit à une dégénérescence qu'il est difficile de lever, ce qui limite la portée de ce type de d'observation pour tester les modèles d'univers. D'après Guiderdoni et Rocca-volmerange 1990, A&A 227, 362

Le flux sera

$$f = \frac{L}{4\pi D^2} \quad (219)$$

et donc

$$\frac{f}{\Omega} = B_{int} \quad (220)$$

Ainsi donc, le flux mesuré par l'observateur est constant et vaut ΩB_{int} quelle que soit la distance de l'objet. C'est une propriété particulière des univers sans expansion: la luminosité apparente décroît comme $1/D^2$ alors que l'angle solide couvre une aire de la source qui croît comme D^2 . Les deux effets se compensent donc exactement.

Dans le cas d'un univers en expansion ce n'est plus vrai. En effet, on a

$$L = 2\pi B_{int} \Omega D_A^2 = 2\pi f D_L^2 \quad (221)$$

car il faut effectivement prendre d'une part la distance luminosité pour exprimer le flux et d'autre part la distance angulaire pour exprimer l'aire de la source couverte. On a dans ce cas

$$B_{obs} = \frac{f}{\Omega} = B_{int} \left(\frac{D_L}{D_A} \right)^2 \quad (222)$$

et il est immédiat que

$$B_{obs} = \frac{B_{int}}{(1+z)^4}. \quad (223)$$

C'est le "dimming factor" ou facteur d'atténuation cosmologique. Cet effet a été utilisé comme un test cosmologique (test de Tolman). Il a un effet dramatique sur la visibilité des galaxies de très grand redshift.

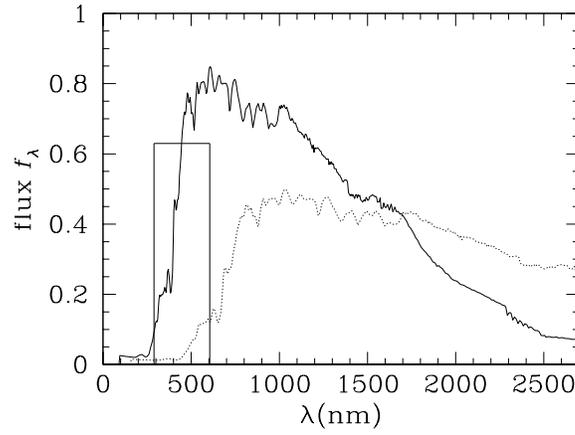


Figure 46: Évolution de la distribution spectrale d'énergie d'une galaxie en fonction du redshift. Le spectre en trait plein et celui en pointillé représentent la même galaxie à $z = 0$ (trait plein) et à $z = 0.7$ (trait pointillé). Le décalage spectral du flux est nettement visible. Le rectangle noir représente la position et la transmission d'un filtre fictif. Il est clair que le filtre ne voit pas le même domaine spectral et que la comparaison du flux dans ce filtre n'a de sens qu'après avoir corrigé de l'effet du décalage spectral, ce qui implique de connaître le spectre intrinsèque de l'objet.

6.3.9 K-correction

L'évaluation des magnitudes d'une galaxie à un redshift z dans un filtre donné et la comparaison avec une galaxie à $z = 0$ doit tenir compte du décalage spectral du flux. Il est donc nécessaire de calibrer préalablement le flux de la galaxie au redshift z . Cette correction qui porte le nom de *K-correction* est un pur problème observationnel associé au fait que l'on n'observe qu'à travers un filtre de bande passante finie. La luminosité bolométrique a donc une K-correction nulle. Pour un filtre F son expression est

$$K_F(t_e, z) = 2.5 \log(1 + z) - 2.5 \log \left[\frac{\left[\int_0^\infty E_e \left(t_e, \frac{\lambda}{1+z} \right) T_F(\lambda) d\lambda \right]}{\left[\int_0^\infty E_e(t_e, \lambda) T_F(\lambda) d\lambda \right]} \right] \quad (224)$$

où T_F est la transmission du filtre F et E_e est le flux émis par la source. La correction est illustrée sur la figure 46 et se comprend simplement en supposant un spectre de galaxies plat. Dans ce cas, le flux reçu dans le filtre à un redshift z et centré sur la longueur d'onde λ_0 est donc émis par la source à la longueur d'onde $\lambda_0/(1+z)$. D'où le premier terme de la K-correction. Par ailleurs, le spectre est dilaté par l'expansion et donc l'énergie reçue dans tout le filtre provient en fait d'un intervalle spectral contracté de $(1+z)$. D'où l'expression de l'émission au dénominateur du second terme.

6.4 Les tests cosmologiques classiques

Les expressions des distances, volumes, magnitudes et comptages vues précédemment ont servi de base pour l'interprétation des premiers relevés observationnels cosmologiques. Au cours des années 1960-1970 sont apparus les premiers "tests classiques" utilisant les propriétés décrites dans les sections précédentes. Ils avaient pour objectifs de mesurer le paramètre q_0 ou le paramètre de densité Ω_0 :

1. relation décalage spectral-magnitude apparente,

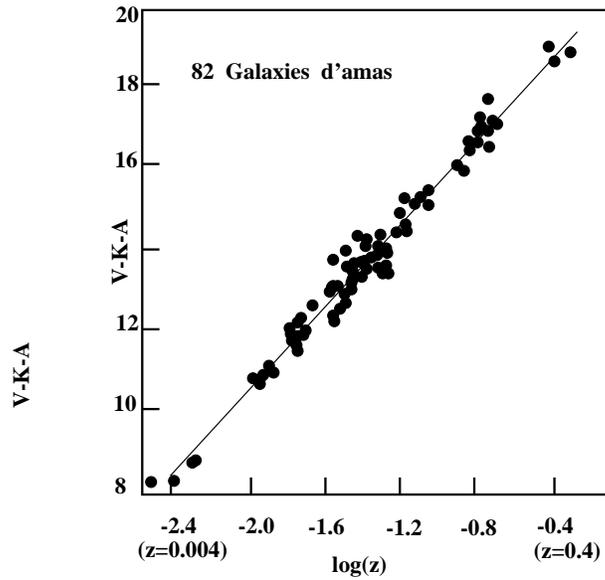


Figure 47: Test classique: évolution de la magnitude des galaxies en fonction du redshift (c'est un diagramme de Hubble, donc). Il s'agit de 82 galaxies d'amas dont la magnitude est corrigée de la K-correction. Le domaine de redshift est trop faible pour que des effets cosmologiques ou d'évolution soient visibles.

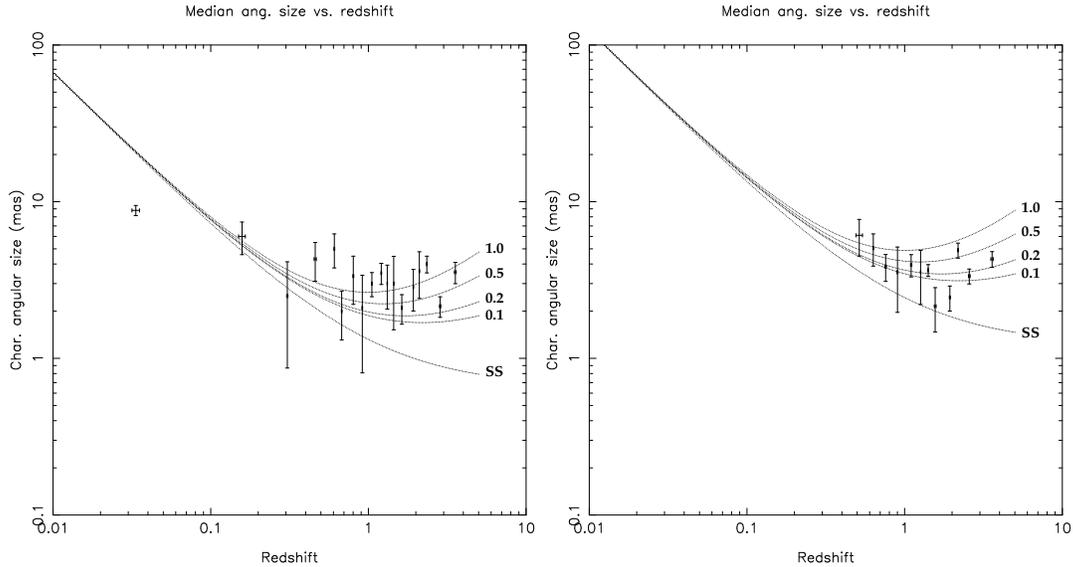


Figure 48: Test classique: évolution du diamètre angulaire d'un échantillon de radio-galaxies compactes (droite) et étendues (gauche) en fonction du redshift. Les effets cosmologiques commencent à devenir sensible à partir de $z = 0.5$. Les courbes continues sont des prédictions de certains modèles cosmologiques. Tous, ont $\Omega_\Lambda = 0$, *SS* indique le modèle statique (Steady State). On voit qu'il est difficile de séparer les trois paramètres d'accélération $q_0 = 1, 0.5, 0$ montrés sur la figure. Cependant, cette figure rejette aussi des modèles à $q_0 \gg 1$, ce qui est déjà une information importante. D'après Kellermann et al 1999, A&A 342, 378.

2. relation volume-comptage des galaxies,
3. âge des galaxies lointaines,
4. relation décalage spectral-diamètre apparent,
5. relation brillance de surface-redshift (test de Tolman; teste l'expansion),
6. conservation du nombre de galaxies (test de Loh et Spillar).

Ces tests ont été au coeur de la cosmologie observationnelle dans le courant des années 1960-1980. Ils ont notamment conduit aux toutes premières contraintes sur le paramètre de décélération de l'Univers, q_0 , et sur le paramètre de densité Ω_m . Ils ont permis de dégager clairement des zones d'exclusion robustes pour le paramètre de décélération qui s'est trouvé définitivement confiné dans le secteur $0 < q_0 < 2$, du moins pour les modèles d'univers standards les plus discutés de l'époque.

Malheureusement, ils ne peuvent apporter aucune valeur précise des paramètres cosmologiques pour une raison qui nous semble aujourd'hui évidente: comme les manifestations de leurs effets ne sont visibles que sur des échelles cosmologiques, il faut observer des objets extragalactiques qui se distribuent sur des échelles temporelles de l'ordre du milliard d'années au moins. Mais sur de telles échelles de temps les galaxies évoluent en nombre, en taille, en luminosité, en couleur et en morphologie et ces effets sont au moins aussi importants que les effets cosmologiques. C'est ce qu'illustre la figure 45 où l'on voit distinctement que ces effets d'évolution modifient les comptages profonds des galaxies autant que les effets géométriques de l'Univers.

7 Les modèles d'univers de Friedmann

Le principe cosmologique implique que la métrique de l'espace-temps est celle de Friedmann-Roberson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (225)$$

Les composantes temporelles et spatiales sont donc

$$x^0 = ct \ ; \ x^1 = r \ ; \ x^2 = \theta \ ; \ x^3 = \phi \quad (226)$$

et on peut donc calculer toutes les composantes des tenseurs métriques, de Ricci, d'Einstein et les symboles de Christoffel. Ces éléments sont indispensables pour établir les équations de Friedmann.

7.1 Abrégé des composantes non-nulles des tenseurs d'intérêt cosmologique

Dans les quatre sections suivantes, je présente les expressions les composantes non nulles de ces tenseurs de façon exhaustive. Pour parvenir à ces résultats il faut un peu de temps et de sueur pour conduire les calculs à leur terme. Je ne les détaille pas ici; l'énumération qui suit a pour but principal de montrer le chemin directeur pour parvenir aux équations de Friedmann. Cependant, pour ceux qui souhaitent approfondir, à titre d'exercices, pour pouvez vous reporter à l'Annexe G où j'explique toutes les étapes en détail, composante par composante.

7.1.1 Éléments non-nuls du tenseur métrique

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_{00} = 1 & g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1-kr^2} \\ g_{22} = -R^2(t)r^2 & g_{33} = -R^2(t)r^2\sin^2\theta \\ g^{00} = 1 & g^{11} = -\frac{1-kr^2}{R^2(t)} \\ g^{22} = -\frac{1}{R^2(t)r^2} & g^{33} = -\frac{1}{R^2(t)r^2\sin^2\theta} \end{array} \right. \quad (227)$$

et

$$(-g)^{1/2} = \frac{R^2(t)r^2\sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (228)$$

On a utilisé la relation: $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 1$.

7.1.2 Éléments non-nuls des symboles de Christoffel

On part des relations suivantes:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) ; \quad (229)$$

où $\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ et sachant que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} & \\ \Gamma_{11}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)}{c(1-kr^2)} & \Gamma_{22}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)r^2}{c} \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)r^2\sin^2\theta}{c} & \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2) & \\ \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2)\sin^2\theta & \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{23}^3 = \cotg\theta \end{array} \right. \quad (230)$$

7.1.3 Composantes du tenseur de Ricci et courbure scalaire

On utilise la définition:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}, \quad (231)$$

d'où:

$$\begin{cases} R_0^0 = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \\ R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{2\dot{R}^2(t) + 2kc^2}{R^2(t)} \right) \end{cases} \quad (232)$$

D'où l'on déduit la courbure scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

$$R = \frac{6}{c^2} \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \left(\frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} \right) \quad (233)$$

7.1.4 Composantes du tenseur d'Einstein

Définies par $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$:

$$\begin{cases} G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = R_1^1 - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{c^2} \left(2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} \right) \\ G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} \right) \end{cases} \quad (234)$$

7.2 Équations de Friedmann sans constante cosmologique

À partir des éléments résumés ci-dessus et de l'équation d'Einstein, on retrouve les équations de Friedmann:

$$\begin{cases} 2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 & (a) \\ \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 & (b) \end{cases} \quad (235)$$

Il reste à déterminer les composantes du tenseur impulsion-énergie. Tout d'abord, pour des raisons de symétrie conformément à l'hypothèse d'isotropie, ce tenseur doit avoir tous les éléments non-diagonaux nuls.

Dans le cas le plus simple, un fluide parfait, on peut montrer que ce tenseur s'exprime uniquement à partir de la densité d'énergie, ρ , et de la pression, P du fluide. C'est une matrice diagonale de composantes:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (236)$$

Pour des raisons de clarté nous écrivons désormais $R(t) = R$, $\dot{R}(t) = \dot{R}$ et $\ddot{R}(t) = \ddot{R}$. Sachant que

$$\frac{d}{dt} \left[R \left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) \right] = \dot{R} \left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R} \right] \quad (237)$$

et que d'après l'équation (235-a) et l'équation (236)

$$\left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R} \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P \quad (238)$$

alors

$$\frac{1}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left[R \left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P \quad (239)$$

et d'après l'équation (235-b)

$$\left(\dot{R}^2 + kc^2\right) = \frac{8\pi G}{3c^2} R^2 \rho c^2 \quad (240)$$

on a donc

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left[\frac{8\pi G}{3c^2} R^3 \rho c^2 \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P \quad (241)$$

d'où l'équation de conservation

$$\frac{d}{dR} \left[\rho c^2 R^3 \right] + 3PR^2 = 0 \quad (242)$$

Le sens de cette équation est relativement simple: $d[\rho c^2 R^3]$ exprime une variation d'énergie totale. $3PR^2 dR$ exprime un travail. Par conséquent l'équation (242) exprime la variation d'énergie pendant l'expansion adiabatique de l'Univers. Il faut noter que c'est une conséquence directe des lois de conservation contenues implicitement dans les équations d'Einstein.

7.2.1 Interprétation Newtonnienne des équations de Friedmann

La signification physique des équations de Friedmann est relativement simple si l'on tente d'en fournir une vision Newtonnienne classique.

Considérons une sphère de rayon l , de masse totale m dont la distribution de matière soit homogène, isotrope et de densité ρ . L'accélération subie par une masse unité située à une distance l du centre de la sphère est

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{Gm}{l^2} = -\frac{G}{l^2} \frac{4}{3} \pi l^3 \rho \quad (243)$$

En multipliant cette équation par $dl/dt = \dot{l}$ on trouve immédiatement que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{l}^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{Gm}{l} \right) \quad (244)$$

et donc par intégration

$$\frac{1}{2} \dot{l}^2 = \frac{Gm}{l} + C \quad (245)$$

qui exprime la conservation de l'énergie par unité de masse, la constante C devant être proportionnelle à l'énergie totale.

Par ailleurs, le principe cosmologique conduit à la loi d'échelle

$$\frac{l}{R} = \frac{l_0}{R_0} \implies l = l_0 \frac{R}{R_0} \quad (246)$$

En substituant dans l'équation (245) on trouve

$$\frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} \dot{R} \right)^2 = G \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{l_0}{R_0} R \right)^2 + C \quad (247)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\dot{R}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \quad (248)$$

avec

$$C = -\frac{K}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} c \right)^2 \quad (249)$$

qui est la forme des équations de Friedmann. Il est clair que l'on peut toujours définir l_0 pour que la constante K prenne les valeurs $-1, 0, 1$. Pour $K = 1$, $C < 1$ et l'énergie totale est négative. Un effondrement de la sphère est possible. Pour $K = -1$, $C > 1$ et l'expansion ne peut pas être stoppée. Enfin pour $K = 0$, l'énergie totale est nulle, on atteint exactement la vitesse d'évasion. L'expansion s'arrête pour $t \rightarrow \infty$.

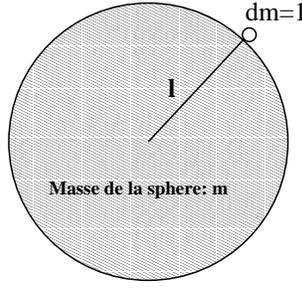


Figure 49: Sphère de masse totale m de densité homogène et isotrope. On s'intéresse à l'accélération de l'élément de masse unité dm .

7.2.2 Propriétés générales des modèles de Friedmann

Les équations de Friedmann en fonction des paramètres cosmologiques : Prenons le cas d'un fluide parfait que l'on peut décrire par une équation d'état de la forme $P = \omega\rho c^2$ avec $0 \leq \omega \leq 1$. Le cas $\omega = 1/3$ correspond à un univers dominé par le rayonnement. Celui $\omega = 0$ est un univers à pression nulle, appelé "univers poussière". Il décrit les propriétés du fluide actuel dominé par la matière.

Dans ce cas, en utilisant les équations (235-b et 238) on peut écrire les équations de Friedmann sous la forme:

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 & (b) \end{cases} \quad (250)$$

En divisant l'équation (250-b) par R_0^2 on obtient

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (251)$$

On définit

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (252)$$

qui est la densité critique de l'Univers aujourd'hui. On peut calculer sa valeur en fonction de H_0 :

$$\rho_{0c} = 2. \times 10^{-29} h^2 \text{g.cm}^{-3} = 1.1 \times 10^4 h^2 \text{ eV.cm}^{-3} \quad (253)$$

Avec ce nouveau paramètre, l'équation (251) devient

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (254)$$

L'équation (254) est valide quel que soit t , et donc en particulier pour $t = t_0$. Elle s'écrit alors:

$$\left(\frac{\dot{R}_0}{R_0} \right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (255)$$

soit

$$H_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \right] = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (256)$$

En égalisant les membres de droite des équations (255) et (256) on obtient finalement

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad (257)$$

où on définit le paramètre de densité

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \quad (258)$$

L'expansion adiabatique des univers de Friedmann : Les modèles de Friedmann sont fondés sur l'hypothèse implicite que l'Univers est en expansion adiabatique. En fait, pour satisfaire simultanément des équations (250) (a) et (b), l'Univers doit nécessairement être en expansion adiabatique. Cette condition impose en effet que:

$$dU = dQ - PdV \quad \text{avec} \quad dQ = 0 . \quad (259)$$

Or

$$dU = d(\rho c^2 R^3) \quad \text{et} \quad dV = d(R^3) . \quad (260)$$

Donc

$$d(\rho c^2 R^3) = -Pd(R^3) = R^3 dP - d(PR^3) , \quad (261)$$

ce qui implique que

$$R^3 dP = d(\rho c^2 R^3 + PR^3) = d(R^3 [\rho c^2 + P]) . \quad (262)$$

Soit, en transformant $dP \implies dP/dt$, puis en dérivant par rapport au temps les termes de droite:

$$R^3 \dot{P} = 3R^3 \dot{R} [\rho c^2 + P] + R^3 \dot{\rho} c^2 + R^3 \dot{P} . \quad (263)$$

Ce qui conduit à la relation

$$\frac{\dot{\rho} R^2}{\dot{R}} = -3R \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (264)$$

Par ailleurs, on peut écrire l'équation (250)(b) sous la forme

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 - kc^2 , \quad (265)$$

puis, en dérivant par rapport au temps

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho} R^2 + 2\rho R\dot{R}) , \quad (266)$$

soit

$$\ddot{R} = \frac{4\pi G}{3} \left(\dot{\rho} \frac{R^2}{\dot{R}} + 2\rho \dot{R} \right) \quad (267)$$

On peut maintenant utiliser l'expression de $\frac{\dot{\rho} R^2}{\dot{R}}$ déduite de la condition adiabatique, (264), que l'on substitue alors dans (267). On a donc

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R , \quad (268)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (250)(a). (CQFD).

Donc dans les modèles d'univers de Friedmann, l'expansion, si elle existe, est adiabatique.

Évolution de la densité en fonction du redshift : Supposons que $P = \omega \rho c^2$ et ω constant au cours du temps. Comme (voir Eq. 242)

$$d(\rho R^3) = -\frac{3P}{c^2} R^2 dR \quad (269)$$

on a donc

$$R^3 d\rho + 3R^2 \rho dR = -3\rho \omega R^2 dR \quad (270)$$

soit

$$d[\rho R^{3(1+\omega)}] = 0 \quad \implies \quad \rho R^{3(1+\omega)} = Cte = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)} \quad (271)$$

Ainsi,

- pour un univers “poussière”, $\omega = 0$, on a

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3, \quad (272)$$

$$\text{soit } \rho = \rho_0 (1+z)^3,$$

- et pour un univers dominé par le rayonnement, $\omega = 1/3$, on a

$$\rho R^4 = \rho_0 R_0^4, \quad (273)$$

$$\text{soit } \rho = \rho_0 (1+z)^4.$$

Ainsi, la densité de photons décroît plus vite que celle de la matière. Dans le cadre d’un univers en expansion qui serait passé par une phase chaude dominée par le rayonnement, il est donc inéluctable que l’on assiste à une transition vers une phase dominée par la poussière.

Existence d’une singularité; Big Bang : Les modèles d’univers avec $-1/3 \leq \omega \leq 1$ possèdent une singularité à $t = 0$ où la densité diverge.

En effet, compte tenu de (271) on a

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega}. \quad (274)$$

Par ailleurs, on peut transformer l’équation (257) et la mettre sous la forme

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_0 c} \rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad (275)$$

soit, en utilisant (274)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad (276)$$

et donc, on peut décrire l’évolution du paramètre de Hubble

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_0) \right] \quad (277)$$

Supposons qu’à $t = t_0$ l’Univers soit dans une phase expansion, c’est à dire $\dot{R} > 0$. D’après l’équation (250-a) $\ddot{R} < 0$ quel que soit t si $\rho + 3P/c^2 > 0$, c’est à dire $1 + 3\omega > 0$ (car $\rho > 0$!).

$R(t)$ est donc concave, et $R/\dot{R} = 1/H$ est une échelle de temps caractéristique. Le Big Bang est donc inévitable dans tous les modèles d’univers homogènes et isotropes constitués de fluides d’équation d’état $P = \omega \rho c^2$ avec $\omega > -1/3$.

Il faut bien souligner que le Big Bang n’est pas du à un effet de pression mais aux conditions initiales décrivant un univers homogène et isotrope.

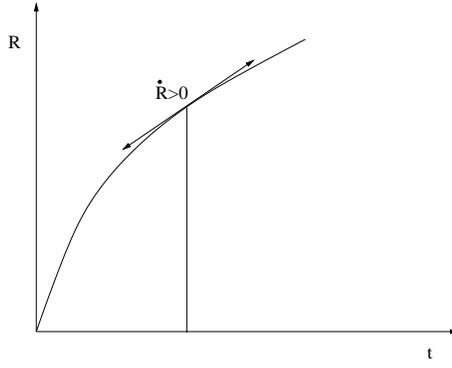


Figure 50: Illustration de la singularité initiale inévitable dans le cas des fluides considérés dans ce cours pour les univers homogènes et isotropes.

7.3 Exemple: l'Univers Einstein-de Sitter (EdS): $\Omega_m = 1$

Pour $\Omega = 1$, l'équation (277) se réduit à

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1+z)^{1+3\omega}; \quad (278)$$

soit

$$R^{\frac{1+3\omega}{2}} \dot{R} = H_0 R_0 R_0^{\frac{1+3\omega}{2}} \quad (279)$$

donc

$$R^{\frac{3}{2}(1+\omega)-1} \dot{R} = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{d}{dt} \left[R^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \right] = H_0 R_0^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \quad (280)$$

qui s'intègre immédiatement. L'évolution temporelle du facteur d'expansion est donc

$$R(t) = \left[\frac{3H_0(1+\omega)}{2} \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} R_0 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (281)$$

où

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} \quad (282)$$

Connaissant l'évolution de $R(t)$ et sachant que $\rho R^{3(1+\omega)} = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$ on peut déterminer l'évolution de tous les paramètres du modèle:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)t} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \\ q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{1+3\omega}{2} = q_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^2 = \frac{1}{6\pi G (1+\omega)^2 t^2} \\ \rho_0 c t_0^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} t_0^2 = \frac{1}{6\pi G (1+\omega)^2} \end{array} \right. \quad (283)$$

La période radiative, dominée par le rayonnement: $\omega = 1/3$: Je ne discute pas dans le détail ce cas qui peut être immédiatement calculé avec les équations et les exemples détaillés auparavant.

En résumé:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \\ t = t_0 (1+z)^{-2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{1}{2t} = H_0 (1+z)^2 \\ q_0 = 1 \\ t_{0c} = t_0 = \frac{1}{2H_0} \end{array} \right. \quad (284)$$

Le modèle poussière, dominé par la matière: $\omega = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \\ t = t_0 (1+z)^{-3/2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{2}{3t} = H_0 (1+z)^{3/2} \\ q_0 = \frac{1}{2} \\ t_{0c} = t_0 = \frac{2}{3H_0} \end{array} \right. \quad (285)$$

Il est important de remarquer la différence entre les deux cas ci-dessus qui représentent les deux modèles de référence en cosmologie. Les comportements de la croissance du facteur d'expansion, $R(t) \propto t^{1/2}$, pour la phase dominée par le rayonnement, et $R(t) \propto t^{2/3}$, pour la phase dominée par la matière, illustrent les deux grandes époques de l'évolution de notre univers. Ces comportements différents ont aussi un impact sur l'histoire de la croissance des structures (voir l'Annexe H et le cours d'E. Audit).

Comportement asymptotique quasi-EdS des modèles courbes, $\Omega_m \neq 1$: Exprimons l'équation (277) en fonction du redshift:

$$H(t)^2 = H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_0 (1+z)^{(1+3\omega)} + (1 - \Omega_0) \right] . \quad (286)$$

Il existe donc une période où le terme $1 - \Omega_0$ peut être négligé. Elle correspond à cas où

$$\frac{R_0}{R} = 1+z \gg \left| \frac{1}{\Omega_0} - 1 \right|^{\frac{1}{1+3\omega}} = \frac{R_0}{R^*} = 1+z^* \quad (287)$$

et donc pendant la période initiale $0 \leq R \leq R^*$ le comportement de l'Univers est décrit par une évolution relativement simple de $H(t)$,

$$H^2 \approx H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\omega)} = H_0^2 \Omega_0 (1+z)^{3(1+\omega)} , \quad (288)$$

tout à fait analogue au cas Einstein-de Sitter en substituant $H_0 \Omega_0$ à H_0 . Par conséquent pendant la phase initiale d'expansion tous ces modèles ont un comportement identique.

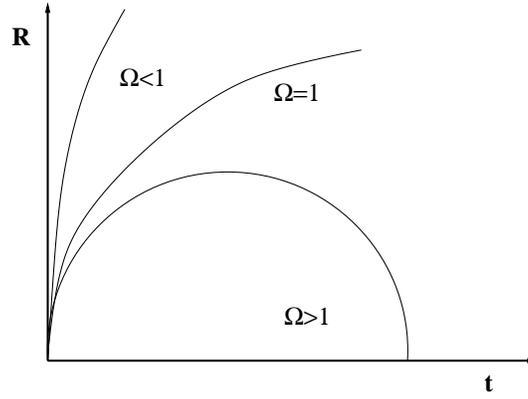


Figure 51: Évolution du facteur d'échelle pour les trois types de modèles d'univers standards. À l'origine les trois modèles fusionnent et se comportent identiquement à $t = 0$.

8 Description de quelques modèles

8.1 Les 3 modèles standards, sans constante cosmologique

8.1.1 Modèles “poussière”, $\omega = 0$

L'équation (277) peut s'écrire simplement

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right) + 1 - \Omega_0 \right] \quad (289)$$

Posons $x = R/R_0$

$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}} \quad (290)$$

En prenant comme conditions initiales $t = 0$, $R(t = 0) = 0$ on a donc

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 - \frac{\Omega_0}{x}}} \quad (291)$$

L'âge de l'Univers est donc

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}} \quad (292)$$

Ce qui signifie que pour $\Omega > 0$, $t < 1/H_0$.

1. Modèle euclidien: $k = 0$: On a $\Omega = 1$, $\rho = \rho_c$ (densité critique) et donc

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (293)$$

L'âge de l'Univers est $t_0 = 2/(3H_0)$ soit approximativement 10^{10} ans.

2. Modèle elliptique (fermé) $k = 1$, $\Omega > 1$: On a $\rho_0 > \rho_c$.

Posons

$$1 - \cos\theta = 2 \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} x \quad ; \quad \sin\theta d\theta = 2 \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} dx \quad (294)$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\Omega_0 - 1) \left[-1 + \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)x} \right]}} \quad (295)$$

et donc

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \left[-1 + \frac{2}{1 - \cos\theta} \right]^{-1/2} \sin\theta d\theta \quad (296)$$

Avec $u = -\cos\theta$, on obtient

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du \quad (297)$$

soit

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\text{Arcsin} \left[u - \sqrt{1-u^2} \right] \right] \quad (298)$$

D'où l'expression de t et du facteur d'expansion x :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [\theta - \sin\theta] \quad (299)$$

$$x = \frac{R}{R_0} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} [1 - \cos\theta] \quad (300)$$

qui est la courbe paramétrique d'une cycloïde.

Les points caractéristiques sont

$$\theta = 0 \rightarrow R = 0 \quad (301)$$

$$\theta = \pi \rightarrow R = R_{max} = R_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad \text{pour} \quad t_{max} = \frac{\pi \Omega_0}{2H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}} \quad (302)$$

$$\theta = 2\pi \rightarrow R = 0 \quad \text{pour} \quad t = 2t_{max} \quad (303)$$

L'âge de l'Univers est alors

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\text{Arcos} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_0} (\Omega_0 - 1)^{1/2} \right] < \frac{2}{3H_0} \quad (304)$$

À titre d'exemple, pour $\Omega = 2$ et $H_0 = 100 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $t_0 \approx 6 \times 10^9$ ans, le maximum d'expansion se produit alors à

$$t_{max} \approx 3.2 \times 10^{10} \text{ ans} . \quad (305)$$

3. Modèle hyperbolique (ouvert) $k = -1$, $\Omega < 1$: On a donc $\rho_0 < \rho_c$. On établit les mêmes équations que précédemment en substituant $i\varphi = \theta$ à θ . On trouve alors

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} [\text{sh}\varphi - \varphi] \quad (306)$$

et

$$R = \frac{R_0}{2} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)} [\text{ch}\varphi - 1] \quad (307)$$

et l'âge de l'Univers s'écrit donc

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{(1 - \Omega_0)} \left[1 - \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{1/2}} \text{Argch} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) \right] > \frac{2}{3H_0} \quad (308)$$

8.1.2 Modèles radiatifs, $\omega = 1/3$

On a dans ce cas

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_r \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + (1 - \Omega_r) \right] \quad (309)$$

où $\Omega_r = \Omega$ pendant la période radiative.

Il faut noter que le terme (R_0/R) est maintenant au carré. Dans ce cas, on a

$$R = R_0 \left(2H_0\Omega_r^{1/2}t \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1 - \Omega_r}{2\Omega_r^{1/2}} H_0 t \right]^{1/2} \quad (310)$$

8.2 Modèles à constante cosmologique

L'introduction de la constante cosmologique dans les équations d'Einstein ajoute un terme supplémentaire dans les équations de Friedmann (250-a,b):

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 & (b) \end{cases} \quad (311)$$

On peut d'ores et déjà prédire ses effets potentiels sur le facteur d'expansion en remarquant qu'elle s'apparente à un terme de pression négative dans l'équation (311). En effet, on peut formuler les équations précédentes de la façon suivante:

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\rho + \frac{3}{c^2} \left(P - \frac{\Lambda c^4}{12\pi G} \right) \right] R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \right) R^2 & (b) \end{cases} \quad (312)$$

Pour certaines valeurs de Λ on doit donc s'attendre à une expansion renforcée, même pour des modèles d'univers à densité de matière sous-critique.

On utilise plutôt la constante cosmologique réduite qui intervient dans le terme de courbure:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} . \quad (313)$$

On constate immédiatement que Ω_Λ est la racine carrée de l'inverse d'une longueur. L'échelle caractéristique est fixée naturellement pour

$$\Omega_\Lambda \approx 1 \implies L \approx \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{c}{H_0} \approx 1.7 h^{-1} \text{Gpc} . \quad (314)$$

Cette distance fixe l'échelle à partir de laquelle la densité d'énergie du vide devrait contribuer de façon significative à la géométrie de l'espace-temps. La courbure de l'Univers est donc constituée d'un terme de plus:

$$\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda , \quad (315)$$

avec

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 R^2} , \quad \Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho , \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} , \quad (316)$$

et le paramètre de décélération d'un univers à pression nulle devient

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda . \quad (317)$$

L'introduction d'une constante cosmologique affecte la dynamique de l'Univers. En particulier l'évolution du facteur d'échelle s'écrit

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right] , \quad (318)$$

où le paramètre de densité $\Omega_m = \Omega(t=0)$ est maintenant clairement identifié comme la contribution matérielle à la courbure de l'Univers. En effectuant les changements de variable $\left([R(t); \dot{R}(t)] \rightarrow [z; t]\right)$, on peut exprimer le temps écoulé entre z et $z=0$:

$$t(0) - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{1+z} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} , \quad (319)$$

d'où l'on déduit l'expression de $H(z)$:

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda} , \quad (320)$$

qui montre comment l'âge de l'Univers dépend de la constante cosmologique. De la même façon la coordonnée radiale de la métrique peut être calculée:

$$r(z) = \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right] , \quad (321)$$

où

$$r(z) = \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \chi(z) \right] , \quad (322)$$

avec

$$\begin{cases} \text{Sinn}(x) = \text{sh}(x) & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda > 0 \\ \text{Sinn}(x) = x & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda = 0 \\ \text{Sinn}(x) = \sin(x) & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda < 0 . \end{cases} \quad (323)$$

Le volume $V(z)$ est alors

$$V(z) = \frac{1}{2H_0^3} \left[\frac{\text{Sinn} \left[2 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \right] \chi(z)}{|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} - \chi(z) \right] . \quad (324)$$

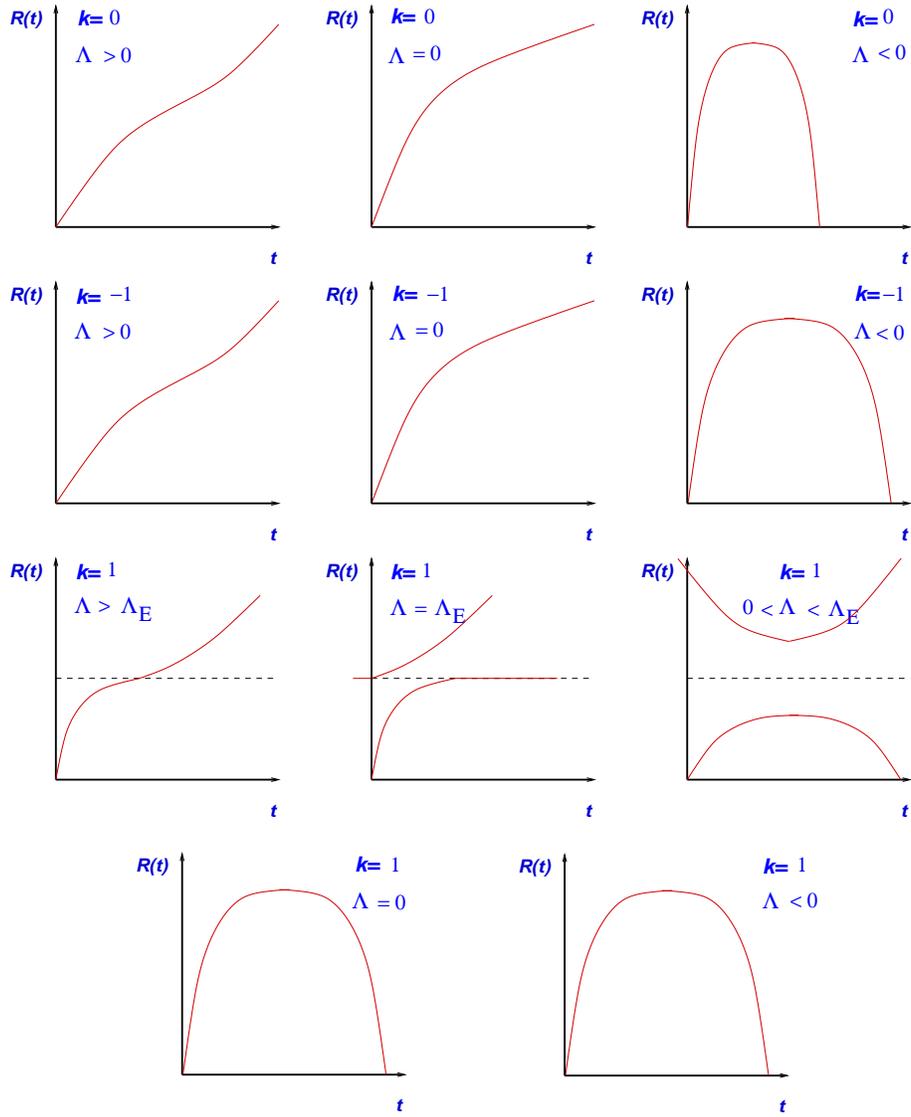


Figure 52: Récapitulatif du comportement du facteur d'expansion $R(t)$ des modèles cosmologiques homogènes et isotropes en fonction de la valeur de la courbure, k et de la constante cosmologique, Λ (Ω_Λ). Λ_E correspond à la valeur critique d'Einstein permettant de construire un univers statique.

Les distances angulaire et luminosité sont donc aussi modifiées

$$D_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right] \quad (325)$$

On s'attend donc à des prédictions différentes des modèles standards (sans constante cosmologique) sur tous les observables: magnitudes apparentes, comptages de galaxies, évolution de la fraction d'amas de galaxies, champs de vitesse à grande échelle, fluctuations des anisotropies du fond diffus cosmologiques. Les figures 52 et 53 illustrent la multitude de modèles qu'engendre l'introduction d'une constante cosmologique et comment le contenu en matière-énergie de l'Univers affecte l'histoire de son expansion.

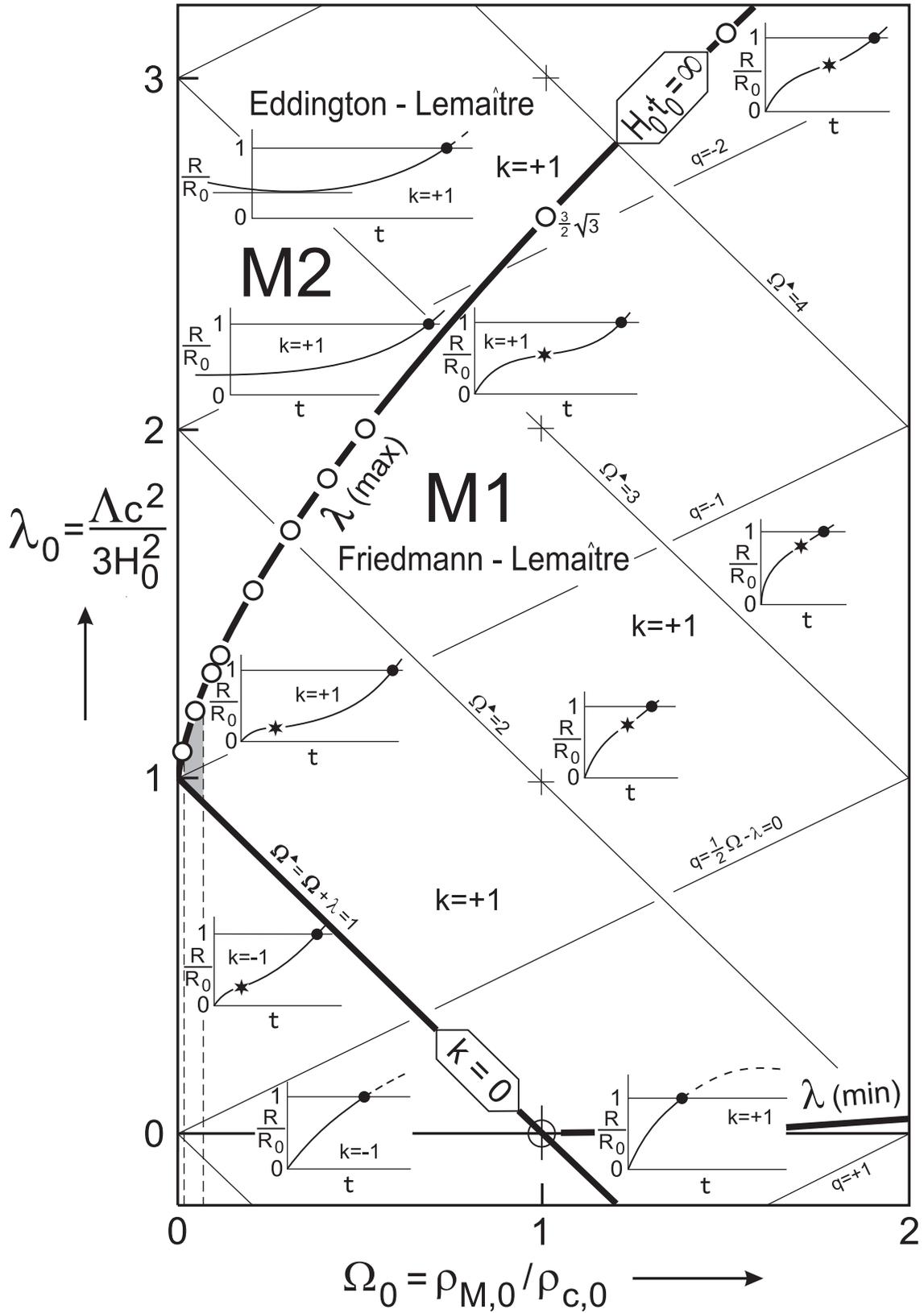


Figure 53: Positions des modèles d'univers dans un plan $(\Omega_{m,0} - \lambda_0)$. Cette figure illustre comment le contenu en matière-énergie modifie l'histoire de l'expansion. D'après van de Bruck et Priester 1998, astro-ph/9810340.

Composante	Equation d'état	$(\rho + 3P/c^2)$	ρ
Matière non relativiste	$P = 0$	> 0	$\rho \propto R^{-3}$
Matière relativiste (γ, ν)	$P = \frac{1}{3}\rho c^2$	> 0	$\rho \propto R^{-4}$
Vide	$P = -\rho c^2$	< 0	$\rho \propto Cte$
Murs de domaine	$P = -\frac{2}{3}\rho c^2$	< 0	$\rho \propto R^{-1}$
Cordes cosmiques	$P = -\frac{1}{3}\rho c^2$	$= 0$	$\rho \propto R^{-2}$
Milieu avec $v_{son} = c$	$P = \rho c^2$	> 0	$\rho \propto R^{-6}$

Table 3: Equation d'état suivant la composante matière-énergie considérée

8.3 Cas général des modèles à courbure nulle

Pour un fluide composé de plusieurs composantes de densité ρ_i , on peut écrire en toute généralité:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{R^2}. \quad (326)$$

Dans le cas d'un univers plat, $k = 0$,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \sum_i \rho_i, \quad (327)$$

où ρ_{0c} est la densité critique $t = 0 = t_0$. Or, d'après l'équation d'état d'un fluide parfait, on sait que pour chaque composante i du gaz on a:

$$\rho_i = \rho_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}. \quad (328)$$

Les constituants de l'Univers peuvent tous être caractérisés par une équation d'état $\omega = P/\rho$ effective spécifique. La Table 3 liste quelques exemples de correspondance entre l'équation d'état et la nature de la composante.

L'évolution de $H(t)$ est alors:

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \sum_i \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad (329)$$

donc

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}. \quad (330)$$

et donc la dynamique de l'Univers peut être exprimée en fonction de $H(z)$ et des contributions à la densité de la matière (m), des photons (γ) (éventuellement des neutrinos) et d'une composante homogène sans fluctuation (X):

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_{0\gamma} (1+z)^4 + \Omega_{0X} (1+z)^{3(1+\omega_X)}. \quad (331)$$

De même, on peut donner l'expression générale du paramètre de décélération. D'après les équations d'Einstein on a:

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m + \sum_i \frac{3P_i}{c^2}\right) \quad (332)$$

L'équation d'état permet de distinguer 3 régimes:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \begin{cases} < 0 & \text{si } P/\rho c^2 > -1/3 & \text{gravitation attractive} \\ = 0 & \text{si } P/\rho c^2 = -1/3 & \text{gravitation nulle} \\ > 0 & \text{si } P/\rho c^2 < -1/3 & \text{gravitation repulsive} \end{cases} \quad (333)$$

De la même façon que pour $H(z)$ on peut aussi exprimer la dérivée seconde de R en fonction du redshift et des diverses contributions à la densité:

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{H_0^2}{2\rho_{0c}} \left(\rho_m + \sum_i 3\omega_i \rho_i\right) \quad (334)$$

soit

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{H_0^2}{2} \left(\Omega_{0m} (1+z)^3 + 3 \sum_i \omega_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}\right). \quad (335)$$

Le paramètre de décélération actuel est donc

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} = \left[\frac{\Omega_{0m}}{2} + \frac{3}{2} \sum_i \omega_i \Omega_{0i}\right] \quad (336)$$

et à un redshift quelconque il vaut:

$$q(z) = -\frac{\ddot{R}}{RH^2(z)} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{0m} (1+z)^3 + 3 \sum_i \omega_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}{\Omega_{0m} (1+z)^3 + \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}. \quad (337)$$

L'accélération de l'Univers est donc contrôlée par le signe des ω_i du numérateur.

Le temps écoulé est déduit immédiatement sachant que $R = R_0/(1+z)$, avec $\dot{R} = dR/dt$:

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')H(z')} \quad (338)$$

9 Les observations cosmologiques dans des univers de Friedmann

9.1 Expression de la distance angulaire des modèles de Friedmann

On peut maintenant étendre les calculs détaillés en Section (6.2) dans l'approximation des petits z , mais cette fois pour toutes les valeurs de z et pour les trois cosmologies standards, et en y explicitant la dépendance en Ω_0 . La coordonnée radiale $r(t)$ est donnée par

$$f(r) = \int_0^r \frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{cdR}{RR}. \quad (339)$$

En substituant aux termes R_i l'expression $R_0(1+z_i)^{-1}$ et à \dot{R} les expressions calculées avec les équations précédentes (notamment Eq. (277)), on trouve

$$f(r) = \frac{c}{R_0 H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \left[1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}\right]^{1/2} \frac{dx}{x} \quad (340)$$

Rayon de Hubble	4.222 Gpc
Distance comobile limite future de visibilité	19.027 Gpc
Distance comobile de la fin de la période d'inflation	14.283 Gpc
Distance comobile de l'époque de découplage	14.165 Gpc
Distance comobile de la recombinaison	10.000 Gpc
Distance comobile à $z = 6$	8.422 Gpc
Distance comobile à $z = 3$	6.461 Gpc
Distance comobile à $z = 1$	3.317 Gpc
Distance comobile à $z = 0.2$	0.809 Gpc

Table 4: Distances caractéristiques de quelques événements dans un univers parmi les plus probables, compte tenu des observations les plus récentes (WMAP, notamment).

soit

$$r = \frac{c}{H_0 R_0 \Omega_0^2 (1+z)} \left[2\Omega_0 z + (2\Omega_0 - 4) \left(\sqrt{1 + \Omega_0 z} - 1 \right) \right] \quad (341)$$

d'où l'on déduit la distance angulaire

$$D_A = R_0 r(z) (1+z)^{-1} = \frac{c}{H_0} \frac{r(z)}{(1+z)} \quad (342)$$

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2 (1+z)^2} \left[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) \left(\sqrt{1 + \Omega_0 z} - 1 \right) \right]. \quad (343)$$

On peut noter que lorsque $z \gg 1$ on a

$$D_A(z) \approx \frac{2c}{H_0 \Omega_0 z}. \quad (344)$$

A titre d'exemple, des distances calculées par les expressions d'un modèle ($\Omega_k = 0$; $\Omega_m = 0.28$; $\Omega_\Lambda = 0.72$) sont données dans la Table 4.

9.2 L'horizon

L'âge fini de l'Univers et la vitesse finie de la lumière, impliquent qu'il existe une distance maximale parcourue par un photon depuis l'origine de l'Univers jusqu'à un temps t . Cette distance est appelée *l'horizon*; c 'est une quantité très importante puisqu'elle définit en particulier la taille de l'Univers observable. En fait, on différencie deux types d'horizon: l'horizon " particule" et l'horizon "événement".

9.2.1 L'horizon "particule"

L'horizon "particule" définit la distance propre limite contenant l'Univers observable. Pour le déterminer on calcule la coordonnée radiale r_H correspondant à un redshift $z \rightarrow \infty$. La distance propre limite est donc:

$$R_H = R_0 \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (345)$$

A titre d'exemple, pour un univers sans constante cosmologique:

$$\begin{cases} R_H = 2 \cdot \frac{c}{H_0} & k = 0 \quad (\Omega_0 = 1) \\ R_H = 2 \cdot \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \text{Arcsin} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} & k = 1 \quad (\Omega_0 > 1) \\ R_H = 2 \cdot \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \text{Argsh} \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^{1/2} & k = -1 \quad (\Omega_0 < 1) \end{cases} \quad (346)$$

L'existence d'une valeur finie de R_H exprime le fait que l'Univers a effectivement un horizon "particule". Tous les phénomènes dont les distances radiales $r_{max} > r_H$ nous sont inobservables aujourd'hui.

9.2.2 L'horizon "événement"

Alors que l'horizon particule détermine quels événements du passé nous sont aujourd'hui accessibles et sépare donc les particules observables à $t = t_0$ des autres, l'horizon "événement" sépare les événements entre ceux qui seront un jour ou l'autre observables et ceux qui ne seront jamais. Il détermine donc si un événement qui se produit en un point de l'Univers aujourd'hui (disons en $r = r_1$, $t = t_0$) nous sera un jour accessible dans le futur (disons en $r = 0$ $t = t_L$). Pour un photon se propageant depuis $t = t_0$ on a

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (347)$$

Il se trouve que l'intégrale de gauche peut éventuellement converger pour $t_1 \rightarrow \infty$. Pour cette limite cela signifie qu'il existe une distance radiale limite $r_1 = r_H$. En d'autres termes, on ne peut jamais avoir $r_1 > r_H$ et donc tout événement se produisant en $r_1 > r_H$ ne sera *jamais* visible pour un observateur en $r = 0$. Cette limite est appelée l'horizon "événement". Cet horizon dépend de la façon dont se déroule l'expansion, il n'existe donc pas nécessairement car il dépend du modèle cosmologique.

9.2.3 Le problème de l'horizon

Le *problème de l'horizon* peut s'exprimer ainsi. À la surface de dernière diffusion¹³, la taille de l'horizon correspond à celle attendue à $z = 1000$ dans un univers dominé par le rayonnement. On peut facilement la calculer pour tous les modèles d'univers et en déduire aussi la dimension angulaire dans le ciel, θ_H :

$$\theta_H = \frac{d_H(t)}{D_A}, \quad (348)$$

où D_A vaut $\frac{2c}{zH_0\Omega_0}$ (cas où $\Omega z \gg 1$). On peut facilement montrer que

$$\theta_H = 1.8 \Omega_0^{1/2} \text{deg.} . \quad (349)$$

Par conséquent on ne peut pas avoir d'événements ayant des liens causaux sur des échelles angulaires supérieures à 2 degrés à la surface de dernière diffusion ($z = 1000$). Le problème est donc de comprendre pourquoi le fond diffus cosmologique est isotrope sur tout le ciel et que les fluctuations n'excèdent nulle part des variations relatives de température supérieures à 10^{-5} . A priori, il n'y a en effet aucune raison que des secteurs séparés de plus de quelques degrés

¹³Voir la section sur l'histoire thermique de l'Univers.

et sans relations causales présentent des propriétés statistiques identiques des fluctuations de température.

Ce problème est un paradoxe sérieux des modèles d'univers de Freidmann vis à vis des observations. Il est résolu dans les modèles d'inflation qui proposent une phase d'expansion exponentielle de l'Univers.

9.3 Le problème de la platitude

Connaissant la relation entre Ω et H , on peut exprimer l'évolution temporelle de Ω . D'une part

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho \quad (350)$$

et d'autre part

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda} . \quad (351)$$

Prenons par exemple le cas ($k = 0$; $\Omega_\Lambda > 0$), Il est facile de montrer à partir de (350) et (351) que

$$\Omega = \frac{\Omega_0 (1+z)^3}{\Omega_0 (1+z)^3 + 1 - \Omega_0} . \quad (352)$$

Par conséquent, Ω était nécessairement très proche de l'unité à grand redshift. En inversant l'équation (352), on peut se rendre compte à quel point c'est critique: si $\Omega = 0.998$ à $z = 1500$, alors $\Omega_0 = 1.5 \times 10^{-7}$ ce qui est évidemment totalement irréaliste. De même, si $\Omega > 1$ à $z = 1500$, alors $\Omega_0 < 0$!! Ce constat, qui n'est pas particulier aux modèles d'univers à courbure nulle et constante cosmologique, exprime le *problème de la platitude*: pourquoi Ω était-il si proche de l'unité ?

9.4 Comptage en fonction du redshift

Soit dN nombre de galaxies dans un volume dV

$$dN = n(z)dV , \quad (353)$$

où $n(z)$ est la densité comobile. Si l'on suppose que le nombre de galaxies est conservé, alors $n(z) = n_0 (1+z)^3$. Le nombre de galaxies observées dans l'intervalle de redshift dz , dans un angle solide $\delta\Omega$ est donc

$$\frac{dN}{dz} = n(z) D_A^2 \frac{dl \delta\Omega}{dz} \quad (354)$$

Or

$$\frac{dl}{dz} = c \frac{dt}{dz} = c \frac{1}{R} \frac{dR}{dz} = \frac{c}{H(z)(1+z)} . \quad (355)$$

Sachant que

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda} \quad (356)$$

et que

$$D_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right] \quad (357)$$

On peut donc prédire en particulier les comptages des galaxies en fonction des modèles cosmologiques et les comparer notamment à ceux observés dans les grands relevés spectroscopiques.

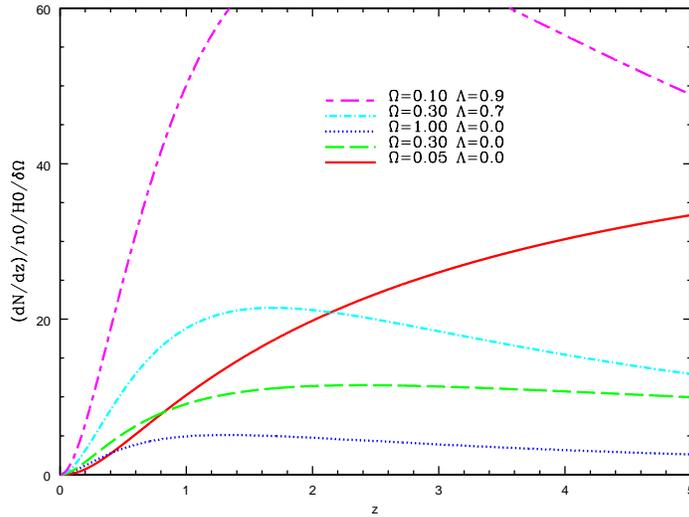


Figure 54: Comptage des galaxies par élément de redshift en fonction du modèle cosmologique. L'ordonnée est calculée avec $c = 1..$

- Cas $k = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{4c^3 n_0 \delta \Omega}{H_0^3} \frac{(\sqrt{1+z} - 1)^3}{(1+z)^{5/2}} \quad (358)$$

- Cas $\Omega_m = 0.1$, $\Omega_\Lambda = 0$:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{4c^3 n_0 \delta \Omega_m}{H_0^3} \frac{[\Omega_m z + (\Omega_m - 2)(\sqrt{1 + \Omega_m z} - 1)]^2}{\Omega_m^4 (1+z)^3 \sqrt{1 + \Omega_m z}} \quad (359)$$

La figure 54 montre les prédictions pour 5 modèles cosmologiques.

9.5 Profondeur optique

Par définition la profondeur optique τ est définie par

$$\tau = \int n(z) \sigma(z) dl, \quad (360)$$

où $n(z)$ est la densité numérique comobile de particules et $\sigma(z)$ la section efficace comobile. Dans le cas d'un univers dominé par la matière les équations (355) et (356) de la section précédente nous permettent d'exprimer τ en fonction du redshift:

$$\tau(z) = \int n(z) \sigma(z) \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda}} \frac{dz}{1+z}. \quad (361)$$

Applications:

- Cas de la diffusion Thomson dans un milieu ionisé:

Dans ce cas, la conservation de la densité comobile d'électrons implique que

$$n_e(z) = n_{e,0} (1+z)^3. \quad (362)$$

Or

$$n_{e,0} = \frac{\rho_0}{m_p} = \frac{\rho_{0,c}\Omega_0}{m_p} , \quad (363)$$

où m_p est la masse du proton et $\rho_{0,c}$ la densité critique actuelle. Donc

$$\tau(z) = \frac{\rho_{0,c}\Omega_0\sigma_{TC}}{m_p H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} (1+z)^2 dz . \quad (364)$$

Par exemple, pour un univers avec ($\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0$),

$$\tau(z) = 0.045 h f_{b,i} \left[(1+z)^{3/2} - 1 \right] , \quad (365)$$

où $f_{b,i}$ est la fraction de baryons ionisés.

- Cas des effets statistiques de lentille gravitationnelle:

Dans ce cas, la conservation du nombre de galaxies (ce qui n'est pas réaliste...) implique de la même façon:

$$n_g(z) = n_{g,0} (1+z)^3 . \quad (366)$$

et la section efficace d'interaction est donnée par la section de la galaxie:

$$\sigma(z) = \pi R_g^2 . \quad (367)$$

Pour ce cas simple, la profondeur optique est donc

$$\tau(z) = \frac{n_{g,0}\pi R_g^2 c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} (1+z)^2 dz . \quad (368)$$

Pour un univers $\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0$, on a donc:

$$\tau(z) = \frac{2}{3} \frac{n_{g,0}\pi R_g^2 c}{H_0} (1+z)^{3/2} . \quad (369)$$

Ainsi, pour une galaxie de 10 kpc de rayon et avec $n_{g,0}$ donnée par la fonction de luminosité des galaxies: $n_{g,0} \approx 0.01 \text{ gal.Mpc}^{-3}$:

- $\tau(z = 0.3) = 0.008$;
- $\tau(z = 1) = 0.02$;
- $\tau(z = 30) = 1$.

Ces valeurs signifient qu'une galaxie très lointaine, au-delà de $z = 1$, a une forte probabilité de subir une déflexion de ses rayons lumineux par une autre galaxie en avant plan située le long d'une ligne de visée d'un observateur sur Terre. Cette estimation est instructive mais est un cas assez académique car $n_{g,0}$ et R_g ne sont certainement pas constants.

9.6 Évolution du spectre du corps noir cosmologique

Nous avons vu que la découverte de l'expansion adiabatique conduit inévitablement à un univers dont la densité devait être très élevée dans le passé. Le taux d'accroissement pendant la période radiative est

$$\rho = \rho_0 (1+z)^4 \quad (370)$$

Par ailleurs, les observations du spectre du fond cosmologique démontrent qu'il s'agit un rayonnement de corps noir.

L'expansion de l'Univers conserve le corps noir, mais en modifie sa température. En effet, soit $n_\nu d\nu$ la densité de photons dans le domaine de fréquence ν et $\nu + d\nu$. On a, pour un corps noir:

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (371)$$

Le nombre total de photons est donc

$$n = \int_0^\infty n_\nu d\nu = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \quad (372)$$

où $\zeta(3) = 2.404$.

La densité d'énergie de rayonnement est

$$u_r = \rho c^2 = \int_0^\infty h\nu n_\nu d\nu = aT^4 \quad (373)$$

À cause de l'expansion, la fréquence d'un photon est décalée et devient $\nu' = \nu(1+z)$. Le nombre de photons dans ce domaine de fréquence contenus dans un volume V est par ailleurs $N_\nu d\nu = n_\nu V d\nu$. Or, l'expansion affecte le volume qui devient $V' = V/(1+z)^3$. Si les photons sont sans interaction, alors leur nombre doit être conservé

$$n_\nu V d\nu = n'_{\nu'} V' d\nu' \quad (374)$$

Donc

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right] V d\nu = \frac{8\pi\nu'^2 (1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z) d\nu \quad (375)$$

soit

$$\frac{8\pi\nu^2 (1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z) d\nu = \frac{8\pi\nu'^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] V d\nu \quad (376)$$

Ainsi, le spectre est toujours celui d'un corps noir mais de température

$$T' = \frac{T}{1+z} \quad (377)$$

On peut donc en permanence prédire la température de l'Univers T à partir de la mesure de la température actuelle T_0 : $T = T_0(1+z)$. L'Univers était donc plus chaud dans le passé et les processus physiques qui s'y sont déroulés racontent cette histoire thermique liée à cette évolution en température.

9.7 L'effet Sunyaev-Zeldovich (SZ)

Lorsque les photons du milieu inter-galactique traversent le gaz chaud intra-amas ils interagissent avec les électrons de ce gaz par diffusion Compton. C'est en particulier le cas des photons du fond diffus cosmologique. La diffusion transfère l'énergie des photons du fond diffus aux électrons qui la re-émettent ensuite à plus haute fréquence (voir la figure 55). Cette redistribution spectrale affecte tout le coeur dense des amas de galaxies et se traduit par une modification spatiale des propriétés de l'émission du fond diffus au travers les amas. Elle apparaît sous la forme d'un décrétement de la carte de température autour de l'amas de galaxies (voir la figure 56). C'est

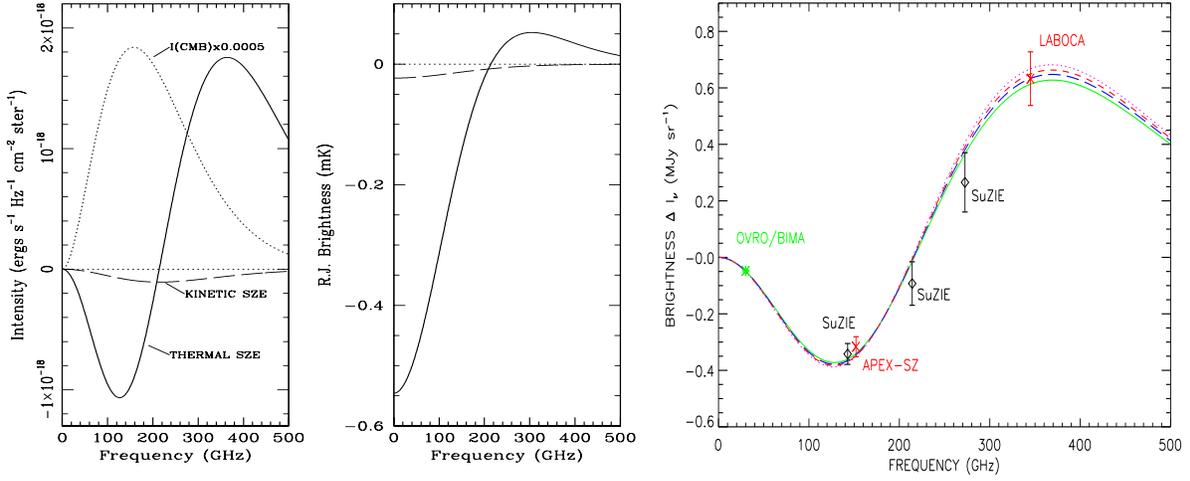


Figure 55: Distorsion du spectre du fond diffus cosmologique produit par l'effet SZ. La figure à gauche montre l'effet sur l'intensité et celle du centre l'effet sur la température dans la limite de Rayleigh Jeans, telle qu'elle est décrite par l'Eq.(378). Il y a deux effets, le SZ thermique et le SZ cinétique. Pour ce qui concerne ici, seul l'effet SZ thermique est discuté (à l'extrême gauche de cette figure). Pour illustrer l'amplitude réelle de l'effet, le spectre thermique du fond diffus est montré en ligne pointillée, mais $\times 0.0005$. (D'après Carlstrom et al 2000, Physica Scripta, Vol. T85, 148). L'effet SZ est détecté au travers des amas de galaxies, par l'interaction des photons du CMB avec les ions du plasma chaud intra-amas. La figure de droite montre un magnifique exemple sur l'amas de galaxies Abell 2163 (D'après Nord et al 2009, A&A 506, 623). La distorsion du spectre suit parfaitement les prédictions, illustrées à l'extrême gauche.

l'effet Sunyaev-Zeldovich thermique.

La carte de température observée à la distance radiale R du centre de l'amas montre alors une variation caractéristique de son profil

$$\frac{\Delta T(R)}{T_{CMB}} = -2 \frac{k_B \sigma_T}{m_e c^2} \int n_e(l) T_e(l) dl = -2y, \quad (378)$$

où n_e , m_e , $T_e(R)$ sont respectivement la densité numérique, la masse et la température des électrons du gaz, σ_T la section efficace de diffusion Thomson ($6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$), T_{CMB} est la température du fond diffus cosmologique, R est le rayon projeté relativement au centre de l'amas et $dl = c dt$ est la longueur du trajet du photon dans le gaz chaud. La quantité y s'appelle le *paramètre- y de Compton* et traduit l'amplitude de la déformation du spectre (voir Fig.55).

La cartographie de la déplétion est un moyen de sonder la quantité de baryons chauds dans les amas de galaxies. Cette méthode est très complémentaire de l'analyse des cartes X. En effet, le rayonnement de freinage thermique dépend de la densité électronique comme n_e^2 alors que l'effet SZ en dépend comme n_e . On peut donc en couplant les deux méthodes identifier des sous-structures dans le gaz, déterminer et cartographier le rapport des distributions baryon/matière noire, voire construire une carte tri-dimensionnelle de la distribution de matière.

Par ailleurs, l'émissivité X dépend de la constante de Hubble comme $h^{1/2}$ alors que dans l'effet SZ la dépendance est en h . En supposant donc que l'on soit en mesure de produire une analyse détaillée de la distribution de matière dans l'amas, on peut déduire une valeur de h .

Un point remarquable et très intéressant de l'effet SZ concerne sa dépendance au redshift. Comme le montre l'expression de y , l'amplitude de l'effet SZ est indépendante du redshift de l'amas responsable de la diffusion Compton. C'est une conséquence immédiate du fait que y est le

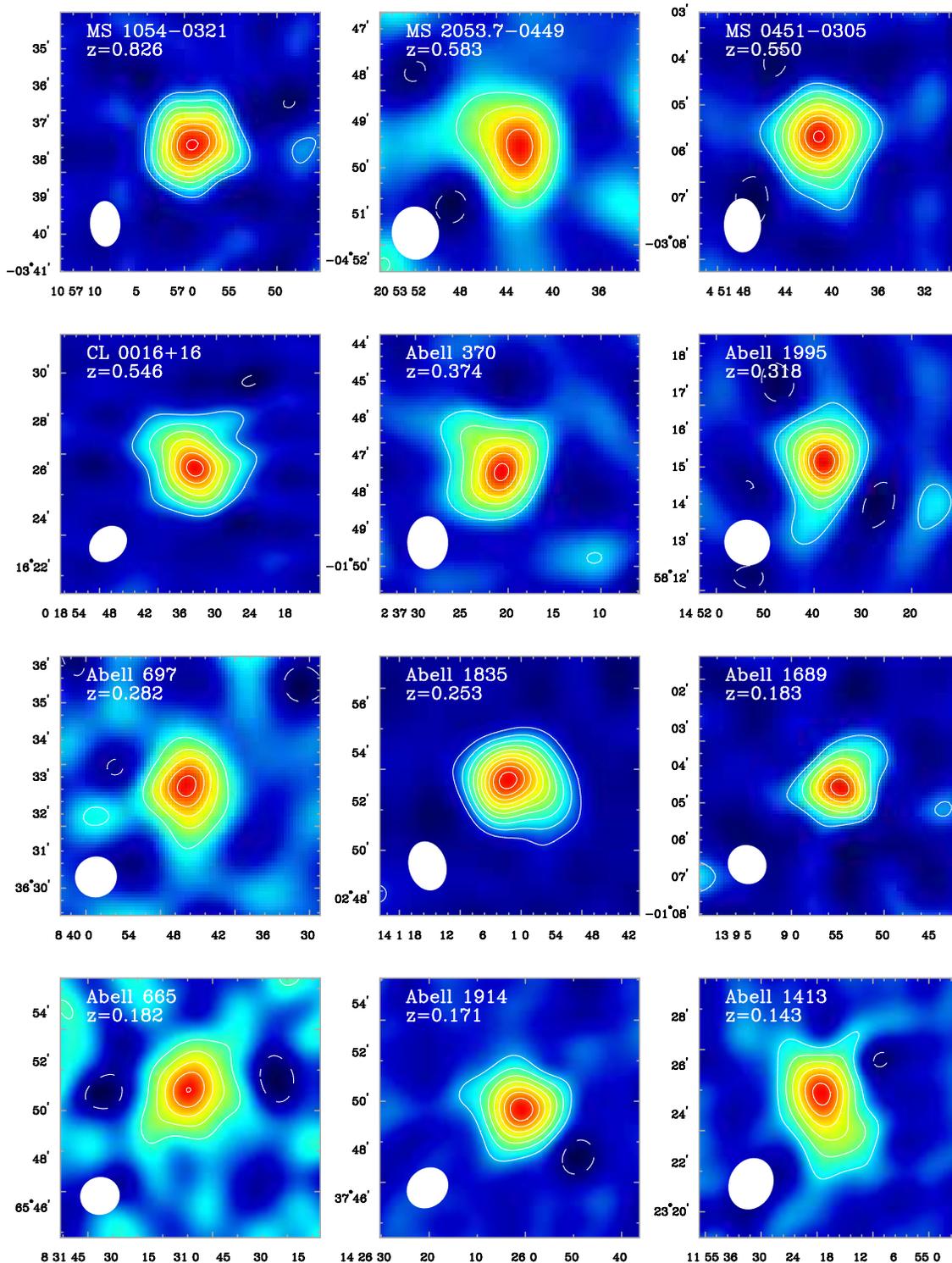


Figure 56: Cartographie de la déplétion SZ de 12 amas de galaxies lointains. Les contours sont des lignes d'iso-températures observées avec les détecteurs millimétriques ORVO et BIMA. On voit que la température décroît vers l'intérieur progressivement avec l'amplitude de l'effet SZ. L'ellipse blanche en bas à gauche donne la résolution effective de l'instrument (D'après Carlstrom et al 2000, Physica Scripta, Vol. T85, 148).

rapport de deux températures qui subissent les mêmes effets du “Dimming-factor”. On peut donc observer par cette méthode des amas de galaxies lointains sans être affecté par les atténuations produites par les effets de distance.

10 Mesure des paramètres cosmologiques

10.1 Une vingtaine de paramètres...

La mesure des paramètres cosmologiques désigne les méthodes et les analyses de données visant à déterminer les paramètres caractérisant les modèles d’univers. Pour explorer en détail les scénarios cosmologiques il faut inclure les quantités que nous avons discutées pour les modèles de Friedmann, mais aussi l’âge de l’Univers, la description du spectre de puissance des fluctuations de densité (forme, notamment l’indice s’il s’agit d’une loi de puissance, et normalisation, σ_8) et la nature des fluctuations (gaussiennes, fraction de défauts topologiques, adiabatiques ou iso-courbes, etc..). Le degré de dégénérescence des contraintes est en général important et il faut être très prudent sur l’interprétation et la portée réelle des résultats discutés dans la littérature. D’une façon générale, mesurer les paramètres cosmologiques au sens large devrait au moins inclure toutes les quantités suivantes:

- Description de la géométrie et du contenu de l’Univers:
 - H_o : constante de Hubble
 - Ω_k : courbure de l’Univers ($\Omega_{totale} = 1 - \Omega_k$)
 - Ω_Λ : constante cosmologique
 - Ω_w : contenu en “*énergie sombre*” (autre que Ω_Λ , qui correspondrait à $w = -1$)
 - Ω_b : fraction de matière baryonique
 - Ω_m : fraction de matière totale (baryon, matière noire chaude et/ou froide)
 - Ω_c : fraction de matière noire froide
 - Ω_γ : fraction de photons
 - Ω_ν : fraction de neutrinos
 - ω : rapport P/ρ caractérisant l’équation d’état de l’énergie sombre ($\omega = -1$ pour une constante cosmologique)
 - $\omega_1 = d\omega/dz$: paramétrisation de la dépendance en redshift (temporelle) de ω (dans ce cas: $\omega \approx \omega_0 + \omega_1(z)$)
 - M_ν : somme des masses des composantes de neutrinos
 - N_ν : nombre d’espèces de neutrinos
- Description astrophysique du milieu
 - τ : profondeur optique de re-ionisation à la période du découplage
 - b : facteur de biais linéaire
- Description de la physique de l’Univers primordiale
 - C_{10} : normalisation du spectre de puissance des fluctuations de densité initiales
 - n_s : indice de la composante scalaire du spectre du puissance des fluctuations
 - n_T : indice de la composante tensorielle du spectre du puissance des fluctuations

- r : rapport des amplitudes scalaires et vectorielles
- $\alpha = \text{dln}n_s/\text{dln}k$: *running spectral index* caractérisant l'évolution de l'indice du spectre scalaire en fonction de l'échelle.
- t_0 : age de l'Univers

Si l'on disposait d'informations concernant tous ces paramètres, nous serions en mesure d'apporter d'énormes contraintes sur l'Univers et son histoire. En particulier, nous pourrions confronter les scénarios d'inflation aux observations. Malheureusement, nous sommes encore loins d'y parvenir, même si des progrès rapides et spectaculaires ont été accomplis. Il est important de mesurer le sens et les limites actuelles des résultats qui sont résumés dans cette section, même si se dessine progressivement un scénario cohérent.

On peut d'ores et déjà calculer la fraction de photons. Le rayonnement fossile cosmologique représentant plus de 90% des photons, il suffit de déterminer

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_{CMB}}{\rho_{critic}} . \quad (379)$$

D'après l'Eq. (60) on déduit donc que

$$\Omega_\gamma = \frac{4.8 \cdot 10^{-34}}{1.88 \cdot 10^{-29} h^2} = 2.55 \times 10^{-5} h^{-2} \quad (380)$$

10.2 L'âge de l'Univers

Un certain nombre de contraintes permettent de fixer l'âge ou une limite inférieure à l'âge de l'Univers. Toutes ces méthodes montrent qu'il se situe entre 10 et 20 milliards d'années. Cependant, les incertitudes sont grandes.

10.2.1 Nucléocosmochronologie

Le moyen le plus robuste a été initialement proposé par Hoyle et Fowler en 1960. Il consiste à utiliser la *nucléocosmochronologie* qui détermine l'âge de l'Univers à partir de l'abondance des éléments radioactifs à longue période. La plupart des noyaux radioactifs de cette catégorie a été créée par des réactions nucléaires rapides. Ces processus se déroulent principalement dans les supernovae, pendant la phase d'explosion. Donc, étant donné que les supernovae sont à l'origine des étoiles massives dont la durée de vie est très courte ($\approx 10^7$ ans), la nucléocosmochronologie permet en principe de déterminer le moment où les étoiles et les galaxies se sont formées.

La nucléocosmochronologie présente l'avantage de pouvoir construire l'histoire de la Terre, du Système Solaire ou de la Galaxie à partir d'échantillons de météorites retrouvées sur Terre. C'est le cas par exemple avec les isotopes d'Uranium et de Plomb qui permettent de fixer l'âge du Système Solaire, t_s .

L'isotope ^{235}U se transforme en ^{207}Pb avec un temps de décroissance $\tau_{235} = 10^9$ ans; l'isotope ^{238}U se transforme en ^{206}Pb avec un temps de décroissance $\tau_{238} = 6.3 \times 10^9$ ans. On a donc

$$^{235}\text{U}_i + ^{207}\text{Pb}_i = ^{235}\text{U}_0 + ^{207}\text{Pb}_0 = ^{235}\text{U}_0 \exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] + ^{207}\text{Pb}_i , \quad (381)$$

où l'indice "i" indique le temps initial et l'indice "0" l'époque actuelle. De même

$$^{238}\text{U}_i + ^{206}\text{Pb}_i = ^{238}\text{U}_0 + ^{206}\text{Pb}_0 = ^{238}\text{U}_0 \exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] + ^{206}\text{Pb}_i . \quad (382)$$

Par ailleurs, comme ^{204}Pb n'a pas de progéniteur, $^{204}\text{Pb}_i = ^{204}\text{Pb}_0$. Les rapports d'abondance avec ^{204}Pb sont donc:

$$R_{207} = \frac{^{207}\text{Pb}_0}{^{204}\text{Pb}_0} = \frac{^{207}\text{Pb}_i}{^{204}\text{Pb}_0} + \frac{^{235}\text{U}_0}{^{204}\text{Pb}_0} \left[\exp \left[\frac{t_s}{\tau_{235}} \right] - 1 \right], \quad (383)$$

et

$$R_{206} = \frac{^{206}\text{Pb}_0}{^{204}\text{Pb}_0} = \frac{^{206}\text{Pb}_i}{^{204}\text{Pb}_0} + \frac{^{238}\text{U}_0}{^{204}\text{Pb}_0} \left[\exp \left[\frac{t_s}{\tau_{238}} \right] - 1 \right]. \quad (384)$$

En mesurant R_{207} et R_{206} dans deux météorites, $m1$ et $m2$ on peut mesurer t_s :

$$\frac{R_{207,m1} - R_{207,m2}}{R_{206,m1} - R_{206,m2}} = \left(\frac{^{235}\text{U}_0}{^{238}\text{U}_0} \right) \frac{\exp \left[\frac{t_s}{\tau_{235}} \right] - 1}{\exp \left[\frac{t_s}{\tau_{238}} \right] - 1}. \quad (385)$$

On trouve alors, pour le Système Solaire:

$$t_s = 4.6 \times 10^9 \text{ ans}. \quad (386)$$

Après la formation de la Galaxie, les noyaux radioactifs à longue période se transforment lentement pour atteindre des quantités négligeables au temps T . Entre cette date et le moment de la formation du Système Solaire, il s'écoule une courte période Δ qui s'appelle la période d'isolation. L'âge de la Galaxie est donc

$$t_G = T + \Delta + t_s. \quad (387)$$

On peut mesurer T et Δ par des méthodes analogues à celle décrite pour t_s . Les noyaux radioactifs à courte durée de vie, comme le ^{129}I et le ^{244}Pu fixent Δ entre 1 et 2×10^8 ans. Les noyaux à longue durée de vie comme le ^{232}Th - ^{238}U ou le ^{187}Os - ^{187}Re permettent de contraindre l'âge de notre Galaxie de la même façon que pour le Système Solaire. On trouve finalement

$$t_G \approx (0.6 - 2) \times 10^{10} \text{ ans}. \quad (388)$$

10.2.2 Âge des amas globulaires

L'utilisation des amas globulaires est simple dans son principe. La méthode consiste à tracer le diagramme couleur-magnitude des étoiles d'un amas globulaire qui est une représentation du diagramme Hertzsprung-Russell (HR). Ce diagramme qui illustre l'histoire de la population stellaire de l'amas montre des caractéristiques qui fixent son âge. En particulier la position du décrochage des étoiles de la séquence principale (*turnoff point*) vers la branche des géantes rouges indique la masse des étoiles qui sont en forte évolution et donne un âge relativement précis. On peut de cette façon ajuster des tracés d'évolution stellaire, les *isochrones*, à la totalité des points du diagramme HR. Ces tracés donnent *in fine* l'âge de l'amas globulaire. Les incertitudes de cette méthode proviennent des modèles d'évolution stellaire et de l'influence de certains paramètres comme la métallicité. Compte tenu de ces indéterminations, on peut dire que l'âge des amas globulaires, t_{glo} , se trouve dans la fourchette

$$10.2 \times 10^9 < t_{glo} < 12.8 \times 10^9 \text{ ans} \quad (389)$$

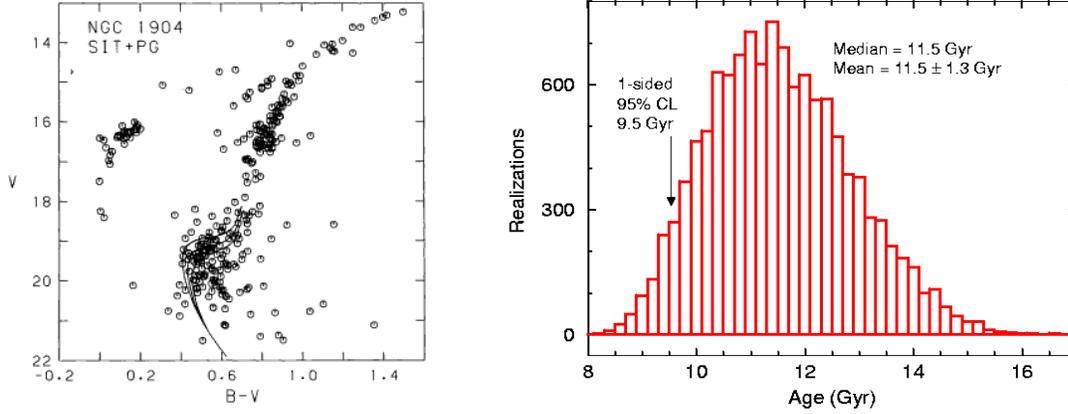


Figure 57: A gauche: diagramme couleur-magnitude d'un amas globulaire. Le point de rebroussement en bas repère les étoiles qui s'échappent de la séquence principale, ce qui fixe l'âge du système. Les trois lignes représentent trois isochrones correspondant à trois métallicités légèrement différentes. On obtient alors trois âges possibles: 12, 15 ou 18 milliards d'années. A droite: histogramme de la distribution des âges possibles de 17 amas globulaires. La distribution échantillonne plusieurs modèles d'évolution stellaire ce qui explique le grand nombre de réalisations. L'histogramme illustre bien la diversité des âges possibles suivant le modèle d'évolution stellaire considéré.

10.2.3 Temps de refroidissement des naines blanches

La séquence d'évolution finale des naines blanches semble relativement simple à déterminer car on n'attend pas de changement de leur structure pendant la phase ultime de refroidissement. Cette propriété, qui résulte du fait que l'équation d'état d'un gaz dégénéré ne dépend pas de sa température. Elle conduit à une relation simple entre la luminosité absolue de la naine blanche en fonction du temps:

$$L_{NB} \propto M_{NB} t^{-1.5} . \quad (390)$$

On attend donc une coupure assez brusque de la fonction de luminosité des naines blanches qui permet de déterminer leur âge.

Cette méthode a été appliquée sur certains amas globulaires (Fig. 58) et aux étoiles du disque de notre galaxie. Pour le disque de la Galaxie, on trouve:

$$t_{Gal} = 9.3 \pm 2.0 \times 10^9 \text{ ans} . \quad (391)$$

10.3 Mesure de la constante de Hubble, H_0

La mesure de H_0 fait partie des grandes aventures à rebondissement de la cosmologie. Ce fut sans doute la constante la plus controversée et, de fait, la plus fluctuante des 50 dernières années. Elle est restée longtemps dans une fourchette $50 < H_0 < 100$ sans qu'une valeur finale n'émerge. En fait, la discussion autour de la valeur de la constante de Hubble est un exemple caractéristique des problèmes techniques auxquels il faut faire face pour exploiter et interpréter

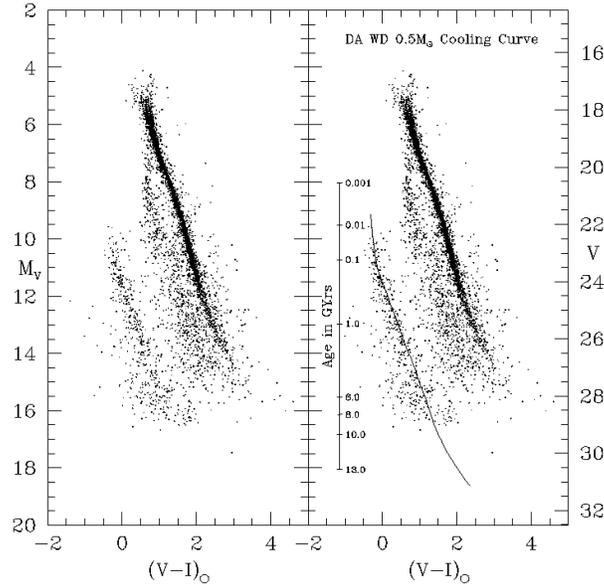


Figure 58: Diagramme couleur-magnitude de l'amas globulaire M4 tracé à partir d'observations du HST. La figure de droite montre la séquence de refroidissement. Elle présente une coupure brusque pour $t = 9 \times 10^9$ ans.

des observations astronomiques et des grands relevés de données. La mesure de H_0 exprimée dans la loi de Hubble,

$$v_{rec} = H_0 \times D = cz , \quad (392)$$

n'est possible que si l'on parvient à mesurer la distance D indépendamment du redshift. Toute la difficulté est donc dans la construction d'un système de lois physiques théoriques ou empiriques qui permettent de relier une propriété d'un objet céleste à sa distance, sans avoir recours à la mesure du décalage spectral. Il faut par ailleurs que la loi s'accompagne d'une méthode observationnelle de mesure précise et sans biais systématique de la propriété de l'objet céleste.

L'histoire de H_0 est donc étroitement associée à celle de la construction de *l'échelle des distances cosmiques*, c'est à dire à la mise en place d'un échaffaudage de méthodes observationnelles qui forment des paliers établis comme des références pour progresser de la Terre et du Système Solaire vers les objets les plus lointains, pour mesurer des distances et construire à chaque palier des nouveaux calibrateurs pour les mesures suivantes abordant des échelles cosmiques plus grandes. La difficulté s'accroît au fur et à mesure que la distance que sondent les indicateurs croît. Comme les incertitudes et les erreurs systématiques s'accumulent lorsque l'on passe d'un calibrateur au suivant, les astronomes ont recours à de multiples méthodes indépendantes. Ce n'est que la corrélation croisée des résultats de chacune qui fonde la confiance dans la mesure finale de H_0 . La figure 59 illustre la construction de l'échelle des distances telle qu'on peut la résumer aujourd'hui.

On distingue trois catégories de calibrateurs. Ils forment une hiérarchie qui caractérise leur portée en distance et leur niveau d'incertitude: les calibrateurs primaires (RR-Lyrae, Céphéides, novae, SNIa), secondaires (Tully-Fisher, Faber-Jackson ou plan fondamental, GCFL, PNFL, SFB) ou tertiaires (BCG des amas de galaxies, FdL des amas de galaxies). Les indicateurs primaires ont les bases physiques et les calibrations les plus solides et fournissent les mesures les plus sûres et les mieux contrôlées. Ils sont calibrés sur des objets astronomiques de notre Galaxie. Les indicateurs tertiaires sont les moins sûrs car ils sont calibrés sur des échelles extragalactiques, sont en général construits sur des lois empiriques grossières et sont sensibles aux multiples effets

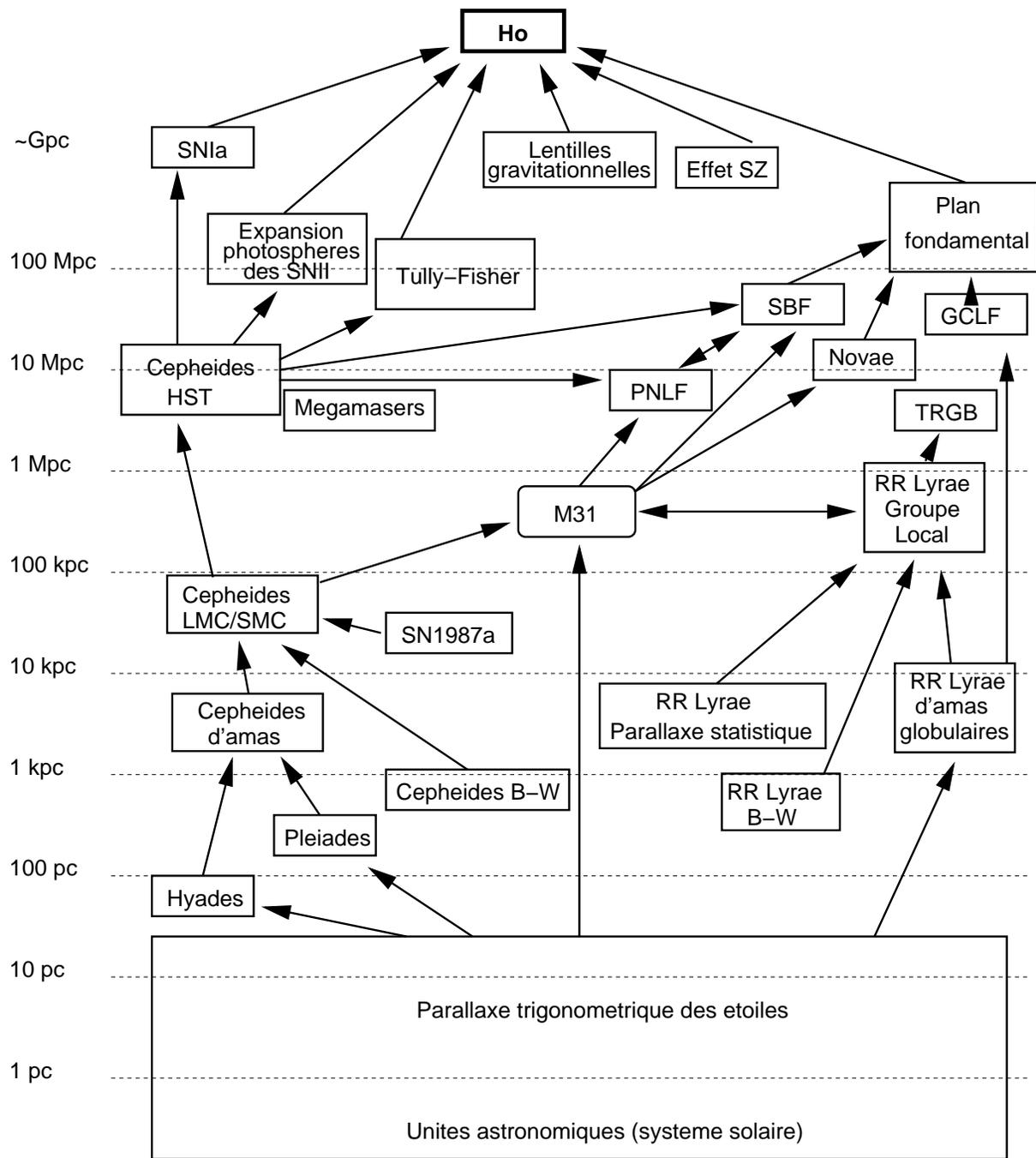


Figure 59: L'échelle des distances cosmiques, depuis les estimateurs de distances "terrestres" jusqu'aux échelles cosmologiques. Chacune représente une méthode de mesure de distance (sauf M31 qui a un statut particulier dans cette organisation). La hauteur des boites donne l'intervalle de distance où la méthode s'applique. Certaines portent des acronymes: B-W =Baade-Wiesselink ; TRGB = Tip of the Red Giant Branch ; GCLF=Globular Cluster Luminosity Function; PNLF = Planetary Nebulae Luminosity Function ; SFB=Surface Brightness Fluctuation; SZ=effet Sunyaev Zeldovich. "Lentilles gravitationnelles" signifie la mesure de décalage temporel. D'après Webb 2001, "Measuring the Universe", Springer.

d'évolution (dynamique, spectral, morphologique) et aux effets de biais de sélection qui peuvent affecter les sélections de populations d'objets extragalactiques très lointains.

Il existe une multitude de méthodes, plus ou moins sûre, tant sur le plan du fondement physique ou astrophysique que sur le plan de la précision observationnelle des mesures. D'une façon générale on peut dire que les techniques se séparent en deux classes; celles qui mesurent H_0 dans notre environnement proche ($D < 100$ Mpc) et celles qui mesurent H_0 sur des échelles cosmologiques. Céphéides, TRGB (*Tip of the Red Giant Branch*), GCLF (*Globular Cluster Luminosity Function*), Baade-Wiesslink, SBF (*Surface Brightness Fluctuation*), Plan fondamental (ou Faber-Jackson), Tully-Fisher et SNIa sont les méthodes les plus connues des méthodes locales. Elles présentent l'avantage de pouvoir être bien calibrées.

SNIa, effet SZ, et décalage temporel induit par les lentilles gravitationnelles sont des techniques non-locales. En effet, elles ne sont pas sensibles aux variations locales des champs de vitesse produits par le Superamas Local qui ajoute à la composante de vitesse due à l'expansion de chaque galaxie une composante particulière, v_{pec} , engendrée par le champ gravitationnel du superamas. La vitesse mesurée est alors

$$v_{mes} = H_0 D + v_{pec} \quad (393)$$

ce qui peut créer des biais dans la valeur de H_0 si par erreur $v_{mes} = HD$ était interprété comme un simple terme d'expansion. Les estimateurs "cosmologiques" qui se fondent sur des objets célestes à grand décalage spectral présentent l'avantage que le terme v_{pec} est totalement négligeable devant $H_0 D$.

Sans entrer dans les détails de toutes ces approches, je résume dans la Table 5 les résultats des diverses estimations. Tout confondu il ressort que

$$H_0 = 74 \pm 15 \text{ km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} . \quad (394)$$

Cependant, cette moyenne n'a pas grand sens car il faudrait la pondérer par la fiabilité des méthodes. En particulier l'approche SZ est encore à valider car peu d'amas ont été analysés et les résultats dépendent fortement du modèle de potentiel gravitationnel utilisé. De même, en ce qui concerne les méthodes traditionnelles, il faut aussi effectuer des pondérations. En prenant en compte ces performances relatives, on peut dire que pour le moment

$$H_0 = 72 \pm 5 \text{ km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} . \quad (395)$$

Cette valeur étant principalement fondée sur des mesures de la relation Période-Luminosité-Couleur de Céphéides observées avec le HST et celle, indépendante, de WMAP. Elle fait l'objet d'un consensus de la communauté. Cependant, il existe encore des sources possibles d'erreurs, notamment sur la détermination par les Céphéides du HST, qui pourraient moduler les erreurs données sur cette valeur.

10.4 De la mesure du rapport M/L à l'estimation de Ω_m

L'intérêt cosmologique de mesurer la masse des systèmes gravitants est contenu dans l'évaluation des rapports M/L ¹⁴. Ils permettent en effet de donner un ordre de grandeur de la contribution de chaque système physique observé à Ω_m .

Nous avons vu dans la Section (4.1) que la densité de lumière des galaxies, ρ_L était donnée par la fonction de luminosité. Pour une loi de Schechter, les observations les plus récentes donnent

$$\rho_L = 2. \pm 1. \times 10^8 h L_\odot \text{Mpc}^{-3} . \quad (396)$$

¹⁴Je rappelle que ce rapport est évalué relativement au rapport M_\odot/L_\odot

Méthode	H_0
Méthodes traditionnelles (toutes confondues)	74 ± 10
Baade-Wiesslink	60 ± 10
Cepheid HST	72 ± 8
SnIa	64 ± 3
SZ	55 ± 17
Décalage temporel	66 ± 8
WMAP-5 (CMB)	72 ± 3
WMAP-5 (CMB) + BAO + SNIa	70.1 ± 1.3

Table 5: Court résumé des valeurs de H_0 suivant les méthodes. Sous le chapeau “Méthodes traditionnelles” se cachent une multitude d’approches, notamment celles utilisant les variables Céphéides, RR-Lyrae, W-virginis, les méthodes utilisant les fonctions de luminosités des amas globulaires et des nébuleuses planétaires, celles fondées sur les relations de Tully-Fisher, Faber-Jackson ou sur les fluctuations de brillance de surface des galaxies. La méthode de Baade-Wiesslink utilise l’expansion des enveloppes des novae ou supernovae. La méthode “SNIa” utilise la magnitude apparente des supernovae de type Ia au pic de luminosité et l’évolution des courbes de lumière apparente des supernovae. La méthode du “décalage temporel” utilise les effets de lentille gravitationnelle qui engendrent des décalages temporels des événements identiques survenant sur différentes images de la même source.

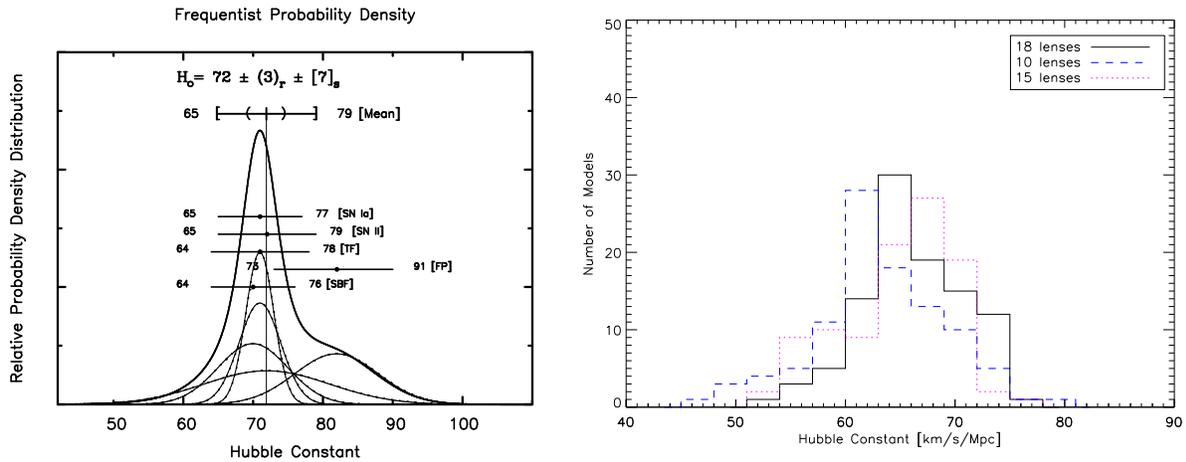


Figure 60: Une compilation de mesure de H_0 . A gauche, la distribution des mesures obtenues par le HST Hubble Key Project et fondée sur 5 méthodes. D’après Freedman et al 2001, ApJ 553, 47. A droite, les distributions des des mesures de décalages temporels d’images de lentilles gravitationnelles (GL) de Paraficz & Hjorth (2010, arXiv:1002.2570; trait continu en noir), Saha et al (2006, ApJ 650, L17; tirets en bleu) et Oguri (2007, ApJ 660, 1; pointillés en magenta).

Par ailleurs, nous avons calculé la densité critique de l'Univers

$$\rho_{crit} = 1.88 h^2 \times 10^{-29} \text{g.cm}^{-3} = 2.75 h^2 \times 10^{11} M_{\odot} \text{Mpc}^{-3} . \quad (397)$$

On peut donc calculer le rapport M/L critique correspondant à une densité de matière d'un univers ayant la densité critique:

$$\left(\frac{M}{L}\right)_{crit} = \frac{\rho_{crit}}{\rho_L} = 1375 h \pm 50\% . \quad (398)$$

Cette valeur est donc une référence qui permet d'affecter un paramètre Ω_{m_i} à toutes les composantes i pour lesquelles un rapport M/L moyen sur une vaste population d'objets peut être calculé. Il est déterminé par

$$\Omega_{m_i} = \frac{\langle M/L \rangle_i}{(M/L)_{crit}} \quad (399)$$

10.4.1 Galaxies

Les masses des galaxies elliptiques peuvent être déterminées de plusieurs façons: comparaison du profil de lumière à un profil de masse d'une sphère isotherme ayant la dispersion de vitesse des étoiles (mesurée par la largeur des raies stellaires), analyse dynamique par le théorème du viriel, analyse du gaz émetteur X des galaxies selon la même procédure que celle décrite pour les amas de galaxies en Section (11.2.3), analyse dynamique des galaxies à coquilles. Le rapport M/L des galaxies elliptiques est de 20 à 100, avec une grande dispersion.

Les masses des galaxies spirales sont déterminées par la modélisation des courbes de rotation plates en ajustant un profil à deux composantes représentant le disque et un halo. Les rapports M/L sont d'environ 10 à 30.

Ces ordres de grandeur pour les galaxies sont confirmés par les méthodes utilisant les lentilles gravitationnelles (voir l'Annexe E et la section suivante sur les amas de galaxies). En particulier par l'analyse des anneaux d'Einstein autour des galaxies, ou le "galaxy-galaxy lensing" (la déflexion des rayons lumineux des galaxies lointaines par les galaxies proches). Ces mesures estiment la masse des galaxies dans un halo de grand rayon, s'étendant au-delà de leur contrepartie stellaire observée dans le domaine visible..

10.4.2 Groupes de galaxies

Les groupes de galaxies sont principalement analysés par le théorème du viriel ou l'analyse du gaz X. Les résultats concernant leur masse sont très dispersés. Il n'est pas encore clair si les groupes forment un ensemble homogène avec des propriétés dynamiques identiques car ils présentent une grande disparité en morphologie. Il est donc difficile de donner un rapport M/L moyen ferme. Une valeur médiane de 200 semble raisonnable.

10.4.3 Amas de galaxies

La distribution de la matière dans les amas de galaxies est un problème important pour la cosmologie, et pour comprendre la physique de la formation des structures et des systèmes gravitants. Historiquement, c'est suite à une analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma que Zwicky, en 1936, mit en évidence une contradiction entre la distribution de lumière et la masse totale mesurée par le théorème du viriel. C'est ce travail qui a donné naissance au problème de la *masse manquante* (qui d'ailleurs ne manque pas... en fait c'est plutôt qu'il y en

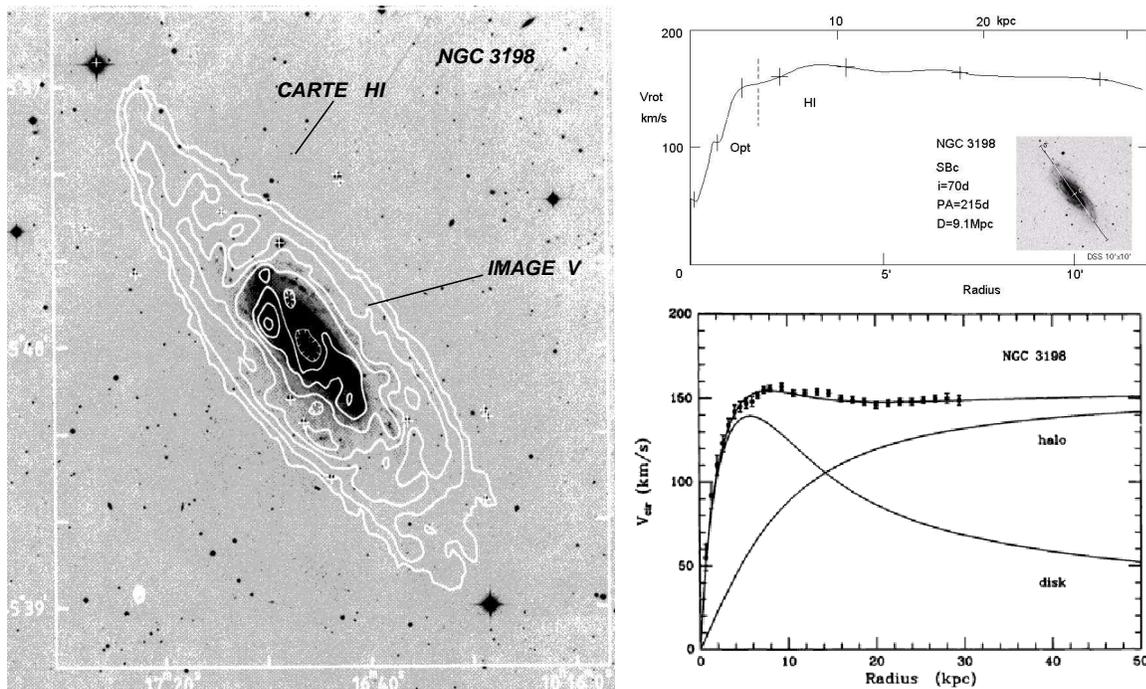


Figure 61: Analyse dynamique d'une galaxie spirale typique. A gauche: une photographie visible de la galaxie sur laquelle les contours d'émission HI ont été superposés. La raie radio 21cm, la raie du CO et la raie optique H_{α} peuvent être utilisées pour calculer la vitesse de rotation en fonction de la distance au centre. La courbe de rotation déduite des observations optique (Opt) et raio (HI) est montrée sur la figure de gauche, en haut. On voit qu'à grande distance la courbe de rotation reste plate. A gauche, en bas: un modèle du halo+disque qui ajuste les valeurs observées. Seul l'addition d'un hypothétique halo invisible de matière semble pouvoir en rendre compte. D'après van Albada et al 1985, ApJ 295, 305.

a trop!), ou de la *masse cachée*, ou de la *masse invisible*. Il est évidemment important de vérifier si cette quantité de matière noire excède significativement l'abondance de baryons prédite par la nucléosynthèse primordiale. Pour cela, il faut mesurer avec précision, et avec des estimateurs indépendants, la masse des amas de galaxies.

Il y a 3 grandes méthodes pour accéder à la masse des amas de galaxies:

1. l'analyse *dynamique* qui utilise les galaxies de l'amas comme des particules d'un gaz. Elle se fonde sur le théorème du viriel;
2. l'analyse du *rayonnement X* du gaz, basée sur l'équilibre hydrostatique du gaz intergalactique intra-amas;
3. l'analyse des effets de *lentille gravitationnelle*, utilisant les arcs gravitationnels ou l'analyse statistique des distorsions gravitationnelles faibles.

1. Masse dynamique : Supposons que les galaxies d'un amas donné soient des particules d'un gaz confiné dans un puits de potentiel gravitationnel. Supposons ensuite, qu'en première approximation cet amas ait atteint un état stationnaire. Dans ce cas, il est en équilibre du viriel et donc l'énergie cinétique totale des particules, E_c , est reliée simplement à l'énergie potentielle

du système gravitant, E_g (voir Annexe C):

$$2E_c + E_g = 0 , \quad (400)$$

et donc, si le gaz de galaxies a une dispersion de vitesse σ :

$$\sigma^2 = \frac{GM_{dyn}}{R} , \quad (401)$$

où M_{dyn} est la masse de l'amas, appelée *masse virielle*, et R le rayon caractéristique de l'amas, appelé *rayon de viriel*.

D'un point de vue observationnel, la difficulté consiste à estimer la dispersion de vitesse et de rayon de viriel. En effet, on ne mesure que la vitesse radiale des particules et le rayon de l'amas est une quantité mal définie. Elle se fonde sur des données apparentes projetées sur le ciel, sur l'hypothèse que la géométrie tri-dimensionnelle de la distribution des galaxies est connue et que l'on connaisse la "limite" de l'amas de galaxies l'isolant du reste de l'Univers est de l'expansion. Dans le cas simple d'un modèle sphérique, il est cependant possible de mesurer la masse virielle à partir de ces observations.

Soit

$$E_c = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 , \quad (402)$$

l'énergie cinétique totale des N galaxies de l'amas dont les masses et les vitesses individuelles dans le repère de l'amas sont respectivement m_i et v_i , et soit

$$E_g = - \sum_{\text{paires}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (403)$$

l'énergie potentielle, calculée à partir des distances entre les galaxies. La vitesse radiale de chaque galaxie est

$$v_{ri} = v_i \cos \theta_i , \quad (404)$$

où θ_i est l'angle entre la direction de la ligne de visée de la galaxie i et la direction de son vecteur vitesse par rapport au centre de masse de l'amas, et

$$R_{ij} = r_{ij} \sin \phi_{ij} , \quad (405)$$

la distance entre les galaxies i et j projetée sur le plan du ciel.

Dans le cas d'un amas sphérique la moyenne des angles peut être calculée, en admettant que les vitesses v_i et les masses m_i ne sont pas corrélées aux orientations des galaxies. On a alors

$$\langle \cos \theta_i \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \, d\phi} = \frac{1}{3} , \quad (406)$$

et

$$\left\langle \frac{1}{\sin \phi_{ij}} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi_{ij}^{-1} \sin \phi_{ij} \, d\phi_{ij} \, d\psi_{ij}}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi_{ij} \, d\phi_{ij} \, d\psi_{ij}} = \frac{\pi}{2} , \quad (407)$$

À ce stade, on peut calculer la masse à condition de se donner une prescription permettant d'associer les N particule-galaxies aux masses m_i . Si par exemple on suppose que toutes les galaxies ont la même masse individuelle m alors, $M_{dyn} = N \times m$, et on a donc:

$$\frac{1}{3} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{3} M \frac{\sum_i v_i^2}{N} = \frac{1}{3} M \sigma^2 , \quad (408)$$

et

$$\sum_{\text{paires}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{M}{N} \frac{M}{N} \sum_{\text{paires}} \frac{1}{R_{ij}} \left\langle \frac{1}{\sin \phi_{ij}} \right\rangle^{-1} = M^2 \left[\frac{1}{N^2} \sum_{\text{paires}} \frac{1}{R_{ij}} \right] \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} M^2 \left\langle \frac{1}{R_{ij}} \right\rangle. \quad (409)$$

Avec ces approximations, on peut déterminer simplement la masse d'un système gravitant en mesurant les vitesses radiales individuelles par spectroscopie et le rayon du viriel par imagerie des positions individuelles de chaque galaxie:

$$M_{dyn} = \frac{3\sigma^2 \pi}{G} \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{R_{ij}} \right\rangle^{-1}, \quad (410)$$

où σ est la dispersion de vitesse radiale. La quantité $\pi/2 \langle 1/R_{ij} \rangle^{-1}$ est appelé rayon de viriel tridimensionnel.

L'expression (410) donne un mode opératoire pour déterminer une masse sur la base de données observationnelles. Cet exemple illustre le fait que la manipulation des observables, qui sont des quantités projetées sur le ciel, n'est jamais immédiate. On doit faire appel à un certains nombres d'hypothèses dynamiques et géométriques concernant le système qui sont fréquemment mal fondées, voire contestables.

On peut calculer rapidement les ordres de grandeur à partir de l'expression (410). La dispersion de vitesse des galaxies telle qu'elle est mesurée à partir de catalogue de vitesses radiales est de l'ordre de 1000 km.s⁻¹. Le rayon caractéristique est de l'ordre de 1 Mpc. Donc

$$M_{dyn} = \frac{3 \times 3.08 \times 10^{24} \text{ (cm)} \times (10^8)^2 \text{ (cm.s}^{-1})^2}{6.67 \times 10^{-8} \text{ (cm}^2\text{g}^{-1}\text{s}^{-2})} = 6.9 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot} \quad (411)$$

Masse X, par l'analyse du plasma intra-amas : Les satellites équipés de détecteurs à rayons X embarqués ont permis de découvrir que les amas de galaxies contenaient un gaz inter-galactique intra-amas dans lequel baignent les galaxies (voir figure 62). Ce gaz chaud et ionisé est détecté par le rayonnement de freinage thermique émis par les ions. Sa température, 10⁸ K, est évaluée par les raies d'émission d'éléments lourds fortement ionisés comme le Fe XIV. Dans le cas simple d'un modèle sphérique, et si l'on suppose que le gaz est en équilibre hydrostatique (cette hypothèse se justifie pour ce gaz, car hormis les zones les plus centrales, le temps de refroidissement du gaz est très largement supérieur au temps de propagation d'une onde acoustique dans le milieu), on peut mesurer la masse totale de l'amas de galaxies, $M_t(r)$, contenue dans une sphère de rayon r .

Si P_X est la pression du gaz émetteur X et ρ_X sa densité, alors

$$\frac{dP_X}{dr} = -\frac{GM_t}{r^2} \rho_X \quad (412)$$

La pression est donnée par la loi des gaz parfaits

$$P_X = \frac{\rho_X k_B T_X}{\mu m_H} \quad (413)$$

où T_X est la température du gaz chaud, m_H est la masse de l'atome d'Hydrogène, μ la masse moléculaire moyenne du gaz et k_B la constante de Boltzmann. La masse dans le rayon r est donc

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_X(r) r^2}{G \mu m_H} \left[\frac{d(\ln \rho_X)}{dr} + \frac{d(\ln T_X)}{dr} \right]. \quad (414)$$

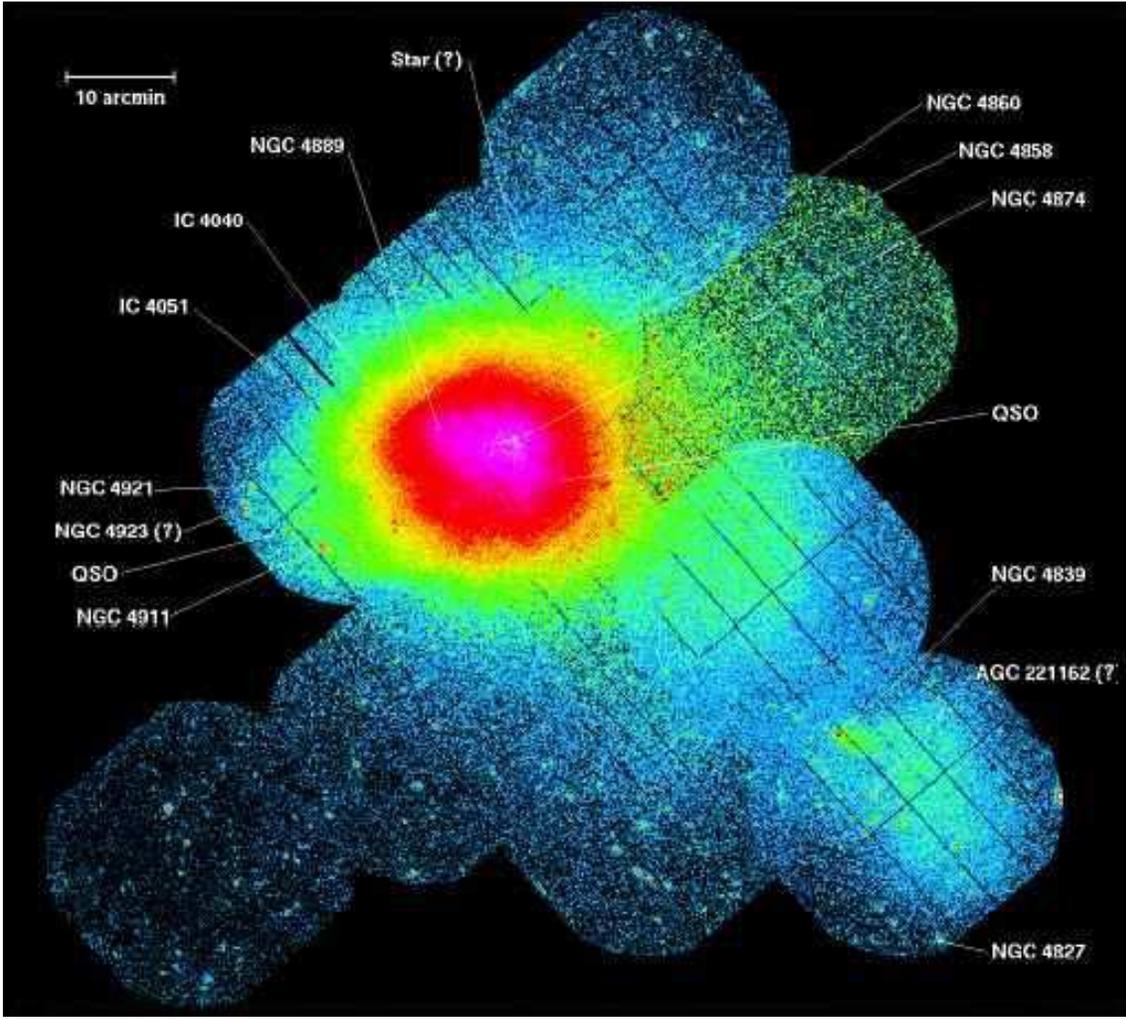


Figure 62: Carte de l'émissivité X de l'amas de galaxies Coma ($z = 0.023$) observée avec le satellite XMM-Newton. L'imagerie X révèle la distribution du plasma chaud piégé dans les régions les plus denses des amas de galaxies. L'analyse des propriétés du rayonnement X de ce plasma permet de reconstruire les propriétés des puits de potentiels gravitationnels et de déterminer les quantités de matière noire et de baryon qui s'y trouvent confinées. D'après Briel et al 2001, A&A 365, L67.

Si l'équilibre hydrostatique est aussi vérifié pour les autres composantes, alors on a de même, pour la matière noire, DM :

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_{DM}(r) r^2}{G \mu_{DM} m_{DM}} \left[\frac{d(\ln \rho_{DM})}{dr} + \frac{d(\ln T_{DM})}{dr} \right]. \quad (415)$$

Prenons par exemple le cas d'une sphère isotherme. Le terme de gradient de température est donc nul. Par ailleurs, si la dispersion de vitesse de la matière noire est isotrope, on peut exprimer la température de la matière noire en fonction de sa dispersion de vitesse:

$$\sigma_{DM}^2 = \frac{k_B T_{DM}}{\mu_{DM} m_{DM}} \quad (416)$$

et donc

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_X(r) r^2}{G \mu m_H} \left[\frac{d(\ln \rho_X)}{dr} \right] = -\frac{\sigma_{DM}^2 r^2}{G} \left[\frac{d(\ln \rho_{DM})}{dr} \right] \quad (417)$$

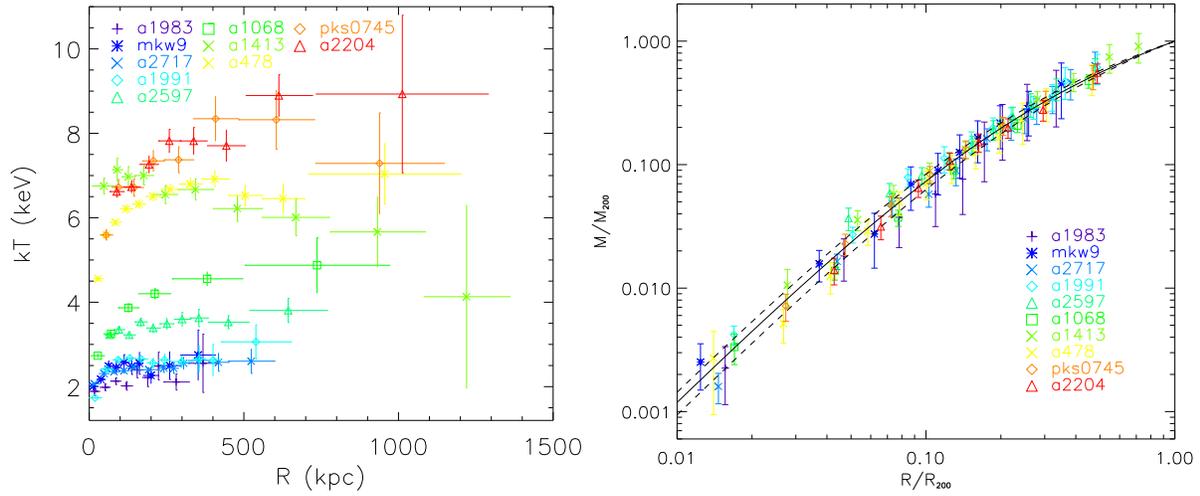


Figure 63: Analyse X d’amas de galaxies dans le domaine d’énergie [0-9] keV avec le satellite XMM-Newton. A gauche, le profil radial projeté de la température du gaz intra-amas (moyennes dans des anneaux concentriques). A droite, le profil radial de la distribution de masse totale des mêmes amas dérivé de la modélisation. La courbe continue noire montre le meilleur ajustement à un profil ”NFW” (Navarro-Frenk-White). Ce profil est prédit par des simulations numériques de la formation des structures dans les modèles CDM. D’après Pointecouteau et al 2005, A&A 435, 1.

et donc on a une relation simple entre les deux profils de densité

$$\frac{d\ln\rho_X}{dr} = \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{\sigma_{DM}^2}{T_X} \frac{d\ln\rho_{DM}}{dr}, \quad (418)$$

Dans le cas simple d’une sphère isotherme, il est facile de montrer que des modèles de distributions de matière comme les profils de King représentent bien le profil de masse des sphères isothermes tout en conservant l’idée que le potentiel à une échelle caractéristique r_c appelé rayon de coeur (voir Annexe D):

$$\rho(r) = \rho_o \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (419)$$

Donc les expressions paramétriques ont la forme suivante:

$$\rho_t(r) = \rho_{ot} \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (420)$$

et

$$\rho_X(r) = \rho_{oX} \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-3\beta/2}, \quad (421)$$

où

$$\beta = \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{\sigma_{DM}^2}{T_X}, \quad (422)$$

est simplement le rapport de la température de la matière totale (donc quasiment celle de la matière noire), à celle du gaz intra-amas.

En pratique, on mesure une émissivité X , qui permet de construire un profil de densité de particules $n(R)$ projeté sur le ciel, et donc un profil de densité en masse $\mu m_H n(R)$ projeté. Il est ensuite facile d’ajuster le paramètre β avec le profil de densité projeté, puis de déprojeter le profil pour obtenir $\rho_X(r)$ (voir Annexe D, équation 611). Ainsi, sans connaître σ_{DM} on peut

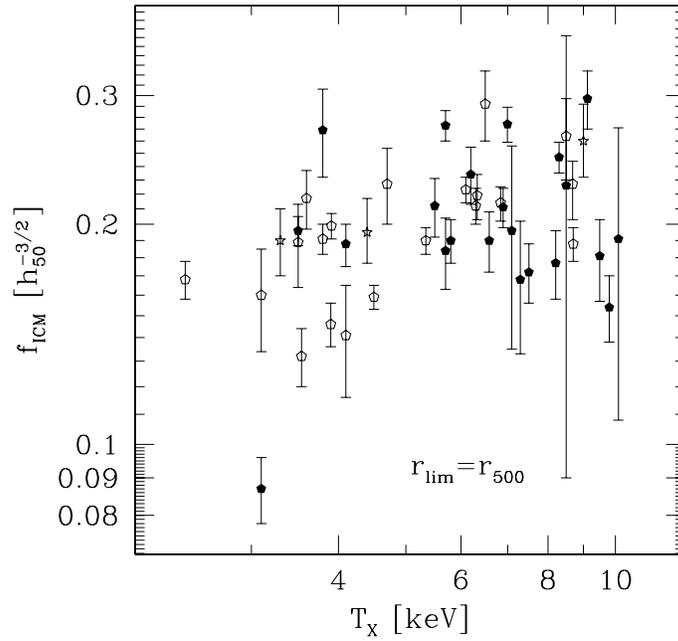


Figure 64: Fraction de matière baryonique confinée sous forme de gaz ionisé dans les amas de galaxies calculée pour 45 amas. On voit qu'indépendamment de la température du gaz, cette fraction se situe dans le domaine 10-30% (d'après Mohr et al 1999).

tout de même déterminer ρ_{DM} grâce à l'ajustement de β aux données.

Cette approche est intéressante car elle permet de déduire à la fois la quantité de masse totale et la quantité de masse sous forme de gaz ionisé qui est déterminée par le profil radial de l'émissivité X. En y ajoutant le contenu en matière des galaxies, on peut donc mesurer la fraction de masse sous forme baryonique relativement à la matière noire.

On peut exprimer simplement la masse totale $M_t(r)$ déterminée par les cartes X:

$$M_t(r) = 1.13 \times 10^{15} \beta \left(\frac{T_X}{10 \text{ keV}} \right) \times \left(\frac{r}{\text{Mpc}} \right) \frac{\left(\frac{r}{r_c} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]} h^{-1} M_\odot \quad (423)$$

À ce jour une cinquantaine d'amas de galaxies ont fait l'objet de ce type d'investigation (voir par exemple la figure 63). Il ressort que M_X est tout à fait compatible avec M_{dyn} , la dispersion de l'écart étant de l'ordre de 10% .

Plus remarquable encore, la fraction de gaz déduite de ces études atteint 10 à 30% de la masse totale, ce qui est considérable (voir Figure 64). En effet, si l'Univers a pour densité la densité critique et si la fraction de baryons dans l'Univers est de l'ordre de 1% (voir la suite du cours), alors, si la fraction de masse du gaz est de 20%, tous les baryons dans un rayon

$$R = \left(\frac{20}{100} \frac{3. \times 1. \times 10^{15} \times 2.10^{33}}{0.01 \times 1.9 \times 10^{-29} \times 4\pi} \right)^{1/3} = 20h^{-1} \text{Mpc} \quad (424)$$

ont été engloutis dans l'amas.

Les estimateurs présentés dans les paragraphes précédents sont confrontés à trois difficultés:

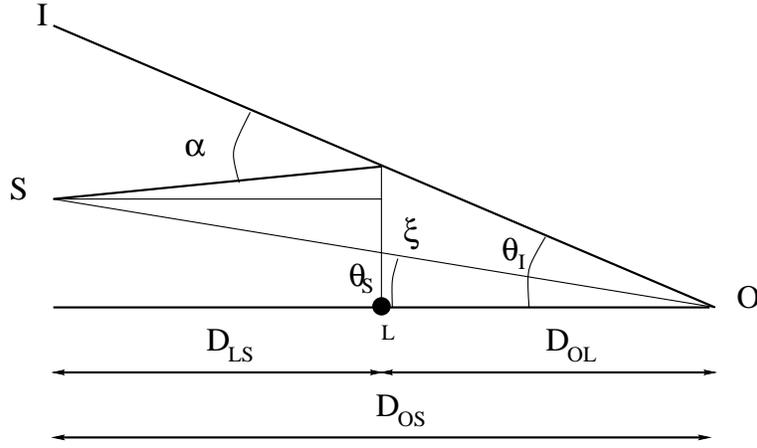


Figure 65: Schéma d'une configuration de lentille gravitationnelle. L'angle de déflexion est α . θ_I est la position angulaire de l'image, θ_S est la position angulaire de la source.

1. ils sont fondés sur des hypothèses simplificatrices qui définissent la géométrie et l'état dynamique des systèmes gravitants mais dont les justifications physiques sont incertaines et critiquables;
2. les observations semblent démontrer que la matière noire domine l'Univers et que la fraction de matière visible diminue progressivement lorsque les dimensions des systèmes augmentent des galaxies vers les amas de galaxies. Ce comportement suivant l'échelle est problématique, d'autant plus qu'il est difficile de trouver un outil robuste qui permet d'analyser de façon homogène la totalité des échelles sur lesquelles se distribue la matière. La baisse de la fraction de matière visible avec l'accroissement de la dimension de la structure pourrait n'être qu'apparente et artificiellement induite par les estimateurs eux-mêmes;
3. pour la plupart, les méthodes d'analyse dynamique des systèmes utilisent des propriétés révélées par les photons qu'ils émettent. Or, ceux-ci ne montrent que la partie visible, sans que l'on sache établir sur des bases physiques rigoureuses le rapport entre la matière visible et la matière invisible. Ce lien pourrait dépendre de la position dans l'espace, de la nature des sources lumineuses et certainement du temps (les populations stellaires évoluant avec le temps cosmique).

3. Masse par effet de lentille gravitationnelle : Les lentilles gravitationnelles apportent des solutions à certaines de ces difficultés. Dans la situation des *champs faibles* et pour une *lentille mince* (de dimensions négligeables devant les distances SL et LO , voir Figure 65), la relation entre la position réelle de la source et la position de l'image vue par un observateur est donnée par l'équation des lentilles:

$$\theta_s D_{OS} + \alpha D_{LS} = \theta_i D_{OS} , \quad (425)$$

où θ_s est le vecteur définissant la position sur le ciel de la source et θ_i celle de l'image. Les composantes de θ_s et de θ_i sont donc des angles. Les D_{IJ} représentent donc les distances angulaires (implicitement D_A).

Considérons le cas simple d'un défecteur constitué d'une masse ponctuelle. La déflexion des rayons lumineux est alors (voir l'Annexe E, dont les équations (645-648):

$$\alpha = \frac{4G}{c^2} \frac{M}{D_{OL}\theta} , \quad (426)$$

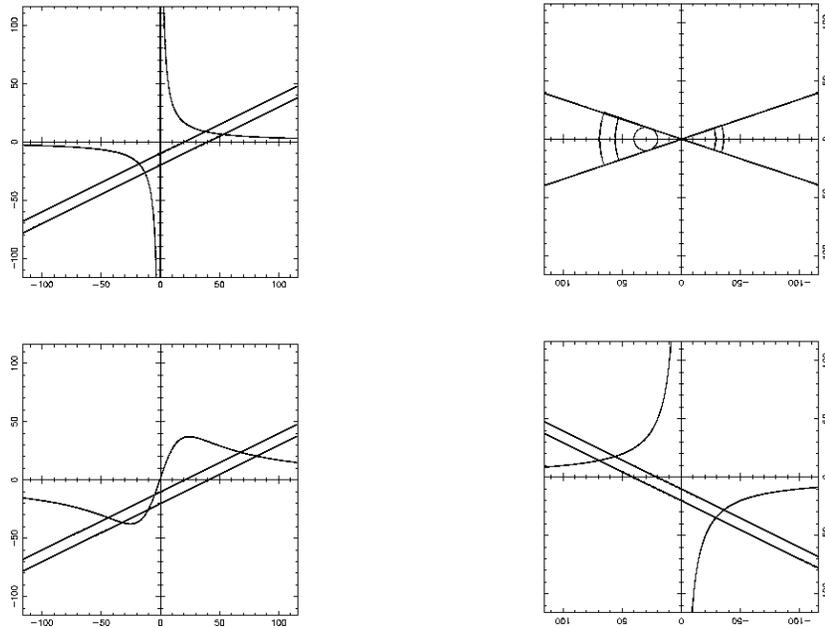


Figure 66: Description des images produites par des lentilles gravitationnelles simples. Le cadre en haut à gauche illustre comment une source assimilée à un segment de droite porté sur l'axe des abscisses produit deux images dont les longueurs sont les deux arcs portés par l'hyperbole. Les deux images n'ont pas la longueur du segment de départ. C'est l'effet de grandissement. La figure en haut à droite illustre le grandissement d'une source circulaire. Elle se déduit de la première par simple multiplication des segments qui sont toutes les cordes traversant la source et dont les directions passent par le centre de la lentille. Le cadre en bas à gauche montre les mêmes propriétés pour une lentille non singulière (d'après A. Mazure, G. Mathez, Y., Mellier, *Chronique de l'espace-temps*, Masson. 1997.).

qui, avec l'équation des lentilles, conduit à une équation du second degré et donc à la formation de deux images. Les images correspondent donc, dans le plan (θ_i, α) aux intersections d'une droite $y = D(\theta_i - \theta_s)$ et d'une hyperbole $y = K/\theta_i$, et la position de la source est l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses. Des cas plus réalistes où la masse est nulle à l'origine et où la densité reste finie au centre conduisent plutôt à trois images, voire plus, mais on peut montrer que le nombre total d'images est toujours impair (voir la figure 66).

Les images multiples correspondent à des trajectoires différentes des photons provenant d'un même point de la source. Les temps de propagation de la lumière y sont donc différents et deux photons émis du même point de la source au même moment peuvent par conséquent atteindre un observateur avec un *décalage temporel*.

Pour une source étendue dont l'extension radiale est le segment de droite porté par l'axe des abscisses de la figure 66, les positions des images sont données par les intersections des deux droites parallèles limitant le segment. Les deux images sont renversées l'une par rapport à l'autre, c'est le phénomène de changement de parité, et leur longueur n'est plus égale à celle de la source, c'est le phénomène d'*amplification*. La projection des segments-images de la figure 66 sur l'axe des abscisses donne leur position sur le plan du ciel.

L'amplification est le rapport des surfaces de l'image et de la source correspondante. Une priorité remarquable qui résulte du théorème de Liouville est la conservation de la brillance de surface, identique pour la la source et ses images. Le phénomène d'amplification n'est donc pas un accroissement de l'intensité de la brillance de l'objet mais bien un grandissement (voir la figure 66).

Pour une masse ponctuelle de masse M , dans une configuration unidimensionnelle, les positions

des images sont données par:

$$\theta_S = \theta_I + \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2\theta_I}. \quad (427)$$

Un cas critique se produit quand $\theta_S = 0$, correspondant à un alignement parfait entre la source, la lentille et l'observateur. Les positions des images sont alors dégénérées et forment un cercle d'amplification infinie de rayon θ_E appelé *rayon d'Einstein*:

$$\theta_E = \left[\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \right]^{1/2}. \quad (428)$$

la dimension du rayon d'Einstein dépend de la masse de la lentille et des distances angulaires:

- pour une étoile déflectrice de $1 M_\odot$ à la distance $D=1$ kpc, $\theta_E = 0.001$ seconde d'arc;
- pour une galaxie de $10^{12} M_\odot$ à la distance $D=1$ Gpc, $\theta_E = 1$ seconde d'arc;
- et pour un amas de galaxies de $10^{14} M_\odot$ à $z = 0.3$ et des sources à $z_S = 1$, $\theta_E = 30$ secondes d'arc.

On définit la *matrice d'amplification* par $A = d\theta_S/d\theta_I$, qui est obtenu simplement en différentiant l'équation des lentilles. La matrice contient le terme de convergence, κ , et les composantes du cisaillement, (γ_1, γ_2) ,

$$\begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx}\varphi & -\partial_{xy}\varphi \\ -\partial_{xy}\varphi & 1 - \partial_{yy}\varphi \end{pmatrix}, \quad (429)$$

où les " ∂_{ij} " sont les dérivées partielles du potentiel gravitationnel projeté sur la ligne de visée. L'amplitude de l'amplification est

$$\mu = \frac{1}{|\det A|} = \frac{1}{|(1 - \kappa^2) - \gamma^2|}. \quad (430)$$

L'amplitude du cisaillement $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ exprime l'amplification anisotrope; et κ exprime la composante d'amplification isotrope. On constate que $2\kappa = \Delta\varphi = \Sigma/\Sigma_{crit}$, où

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{LS}D_{OL}}, \quad (431)$$

est directement la densité de masse projetée.

Lorsque le déterminant s'annule l'amplification devient infinie. Ces cas limites correspondent à la formation des anneaux et des arcs gravitationnels. Les points de l'image où l'amplification est infinie sont les *lignes critiques*. Dans le plan source elles correspondent aux *lignes caustiques*.

La *densité critique* exprime la force de la lentille à produire des effets gravitationnels. Elle peut s'écrire

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{LS}D_{OL}} \approx 0.1 \left(\frac{H_0}{50 \text{ km/s/Mpc}} \right) \frac{d_{os}}{d_{ls}d_{ol}} \text{ g.cm}^{-2}, \quad (432)$$

où les d_{ij} sont les distances angulaires "réduites" (*i.e.* sans le pré-facteur c/H_0)

Prenons l'exemple d'un amas de galaxies au redshift $z_L = 0.3$ et des sources amplifiées au redshift $z_S = 1$, soit $d_{os}/(d_{ls}d_{ol}) \approx 3$. Si l'amas est une sphère isotherme de rayon de cœur R_c et avec $M(R_c) = 2 \times 10^{14} M_\odot$, alors

- pour $R_c=250$ kpc, $\Sigma_{crit}=0.05 \text{ g.cm}^{-2}$,

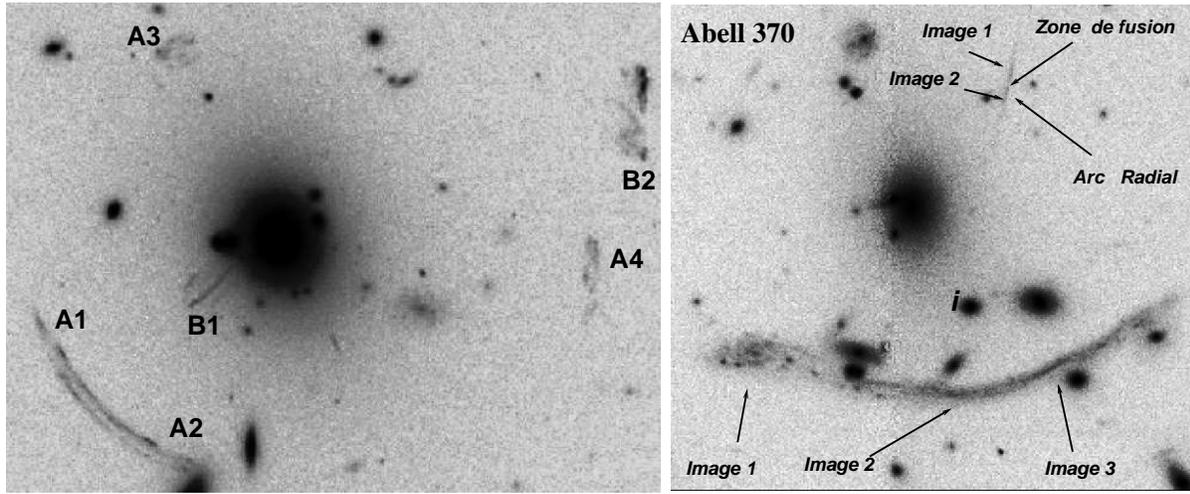


Figure 67: Arcs gravitationnels dans des amas de galaxies. A gauche l'amas de galaxies MS2137-23 ($z = 0.313$) et son double système d'arc A1 – A2 – A3 – A4 et B1 – B2. Chaque système montre des images multiples de la même source. Le système A est l'image d'une source à $z = 1.5$ et le système B l'image d'une autre source aussi à $z = 1.5$. L'arc B1 est remarquable car il s'agit d'une élongation radiale. A droite, l'amas Abell 370 ($z = 0.375$). Le long filament est un arc tangentiel, fusion de trois images d'une source à $z = 0.725$. L'image 1, bien qu'amplifiée, n'est pas déformée. On reconnaît la morphologie d'une galaxie spirale. Les deux autres images sont fortement déformées. À partir des propriétés de ces trois images (position, élongation, rayon de courbure), on peut estimer la masse de la lentille dans un rayon défini par le rayon de courbure. En haut à droite on distingue un cas de fusion de deux images radiales. Les autres objets du champs sont des galaxies appartenant à Abell 370.

- pour $R_c=50$ kpc, $\Sigma_{crit}=1. \text{ g.cm}^{-2}$.

Donc, l'existence d'arcs gravitationnels implique que la distribution de matière est fortement concentrée. La découverte d'arcs gravitationnels dans les amas de galaxies fut donc une surprise car les distributions des galaxies ne montrent pas de fortes concentrations centrales.

On peut alors mesurer la masse des amas de galaxies à partir des arcs gravitationnels. Pour une sphère isotherme singulière de dispersion de vitesse tri-dimensionnelle σ , le potentiel projeté au rayon r , $\varphi(r)$, est

$$\varphi = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} r \quad (433)$$

et les images sont décrites par l'équation des lentilles

$$\theta_S = \theta_I - 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{\theta_I}{|\theta_I|} \quad (434)$$

La matrice d'amplification est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{1}{|\theta_I|} \end{pmatrix} \quad (435)$$

et dans ce cas, il n'y a qu'une ligne critique qui est donnée par le *rayon d'Einstein*

$$\theta_{SIS} = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \approx 16'' \left(\frac{\sigma}{1000 \text{ km.s}^{-1}} \right)^2 \quad (436)$$

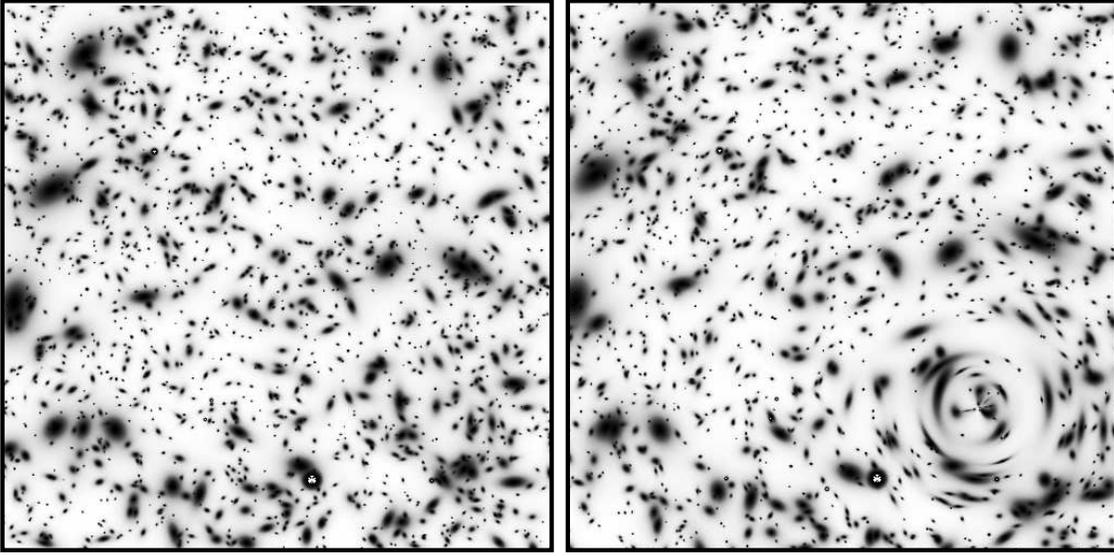


Figure 68: Champ de distorsion gravitationnelle induit par une lentille. La figure de gauche montre une distribution aléatoire de galaxies avec une densité correspondant à celle observée sur les images les plus profondes obtenues sur les grands télescopes. La figure de droite montre la même population telle qu'elle apparaît sous l'effet de la lentille. Le défecteur est une sphère isotherme de dispersion de vitesse 1300 km.s^{-1} à un redshift de $z = 0.15$. Les sources sont à un redshift moyen de $z = 1.3$. La structure du champ gravitationnel est rendue visible par le champ de déformation des galaxies (D'après Mellier 1999, ARAA 37, 127).

Pour un univers "Einstein-de Sitter", avec $z_L = 0.3$ et $z_S = 1$, la masse totale contenue dans un rayon θ est alors

$$M(\theta) = 0.57 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot} \left(\frac{\theta}{30''} \right) \left(\frac{\sigma}{1000 \text{ km.s}^{-1}} \right)^2 \quad (437)$$

et l'amplification s'écrit

$$\mu(\theta_I) = \frac{\theta_I}{\theta_I - \theta_{SIS}} \quad (438)$$

Dans le cas par exemple de l'arc observé dans l'amas de galaxies Abell 370, la masse contenue dans le rayon défini par le rayon de courbure de l'arc est donc:

$$M_{A370}(\theta < 30'') = 1. \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot} \quad (439)$$

Si l'on dispose de suffisamment de sources d'arrière-plan on s'attend à voir une structure cohérente de déformation d'images produite par la totalité de ces sources qui tracent le champ de gravitation. C'est ce que montrent la simulation de la figure 68 et la spectaculaire image de l'amas de galaxies Abell 1689 de la figure 69. La reconstruction des champs de gravitation par cette approche est possible, sous certaines hypothèses:

- l'orientation des sources est isotrope,
- l'orientation des sources n'est pas corrélée à leur ellipticité,
- la distribution en distance des sources est connue.

On peut ainsi reconstruire la densité de matière, sachant que relation entre cisaillement et densité de matière est donnée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{1}{2} (\partial_{xx} - \partial_{yy}) \varphi + i\partial_{xy}\varphi \\ \kappa = \frac{1}{2} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \varphi \\ \varphi = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln(|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|) d\boldsymbol{\theta}' , \end{cases} \quad (440)$$

et donc

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \kappa(\boldsymbol{\theta}') d^2\boldsymbol{\theta}' , \quad (441)$$

où

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') = \frac{(\theta_2 - \theta_2')^2 - (\theta_1 - \theta_1')^2 - 2i(\theta_1 - \theta_1')(\theta_2 - \theta_2')}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^4} . \quad (442)$$

L'équation (441) a la forme d'une convolution et peut donc être inversée, ce qui donne une relation entre κ , c'est à dire la densité de matière, et γ , la distorsion gravitationnelle:

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \Re[\mathcal{D}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')\gamma(\boldsymbol{\theta}')] d^2\boldsymbol{\theta}' + \kappa_0 , \quad (443)$$

où \Re désigne la partie réelle.

Or, il est possible de montrer que lorsque l'effet de lentille gravitationnel est faible, la déformation γ d'une source de forme circulaire la transforme simplement en une image de forme elliptique. Plus généralement la loi de transformation pour de faibles distorsions gravitationnelles s'écrit

$$\langle |\boldsymbol{\epsilon}^I| \rangle = \langle |\boldsymbol{\epsilon}^S| \rangle + |\gamma| , \quad (444)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}^S$ et $\boldsymbol{\epsilon}^I$ sont les ellipticités de la source et de l'image, respectivement. Si les galaxies sont distribuées aléatoirement en orientation, alors $\langle |\boldsymbol{\epsilon}^S| \rangle = 0$ et par conséquent

$$\langle |\boldsymbol{\epsilon}^I| \rangle = |\gamma| , \quad (445)$$

que l'on peut alors substituer dans l'équation (443). Ainsi, à partir des ellipticités des galaxies on peut reconstruire une carte de densité de la matière. Par exemple, dans le cas de l'amas MS1008-1224 ($z_l = 0.31$) où la distance des sources est bien connue, la carte de cisaillement donne l'allure du profil de matière totale:

$$M_{WL}(< \theta) = 6.14 \times 10^{14} \theta^2 \bar{\kappa}(< \theta) h^{-1} M_\odot , \quad (446)$$

où θ est la distance radiale angulaire exprimée en minute d'arc et $\bar{\kappa}$ est la valeur moyenne de κ dans le cercle de rayon θ .

10.4.4 Les mouvements à grande échelle des galaxies

L'organisation à grande échelle des champs de vitesse est aujourd'hui démontrée. On observe effectivement que les mouvements propres des galaxies ne sont pas aléatoires mais qu'ils constituent d'immenses mouvements cohérents sur des échelles de l'ordre de 100 Mpc. Ces champs de vitesse sont interprétés comme les mouvements induits par des champs de gravitation de structures très massives, comme des superamas de galaxies.

Il est possible de cartographier ces mouvements et de les combiner avec les cartes de densité

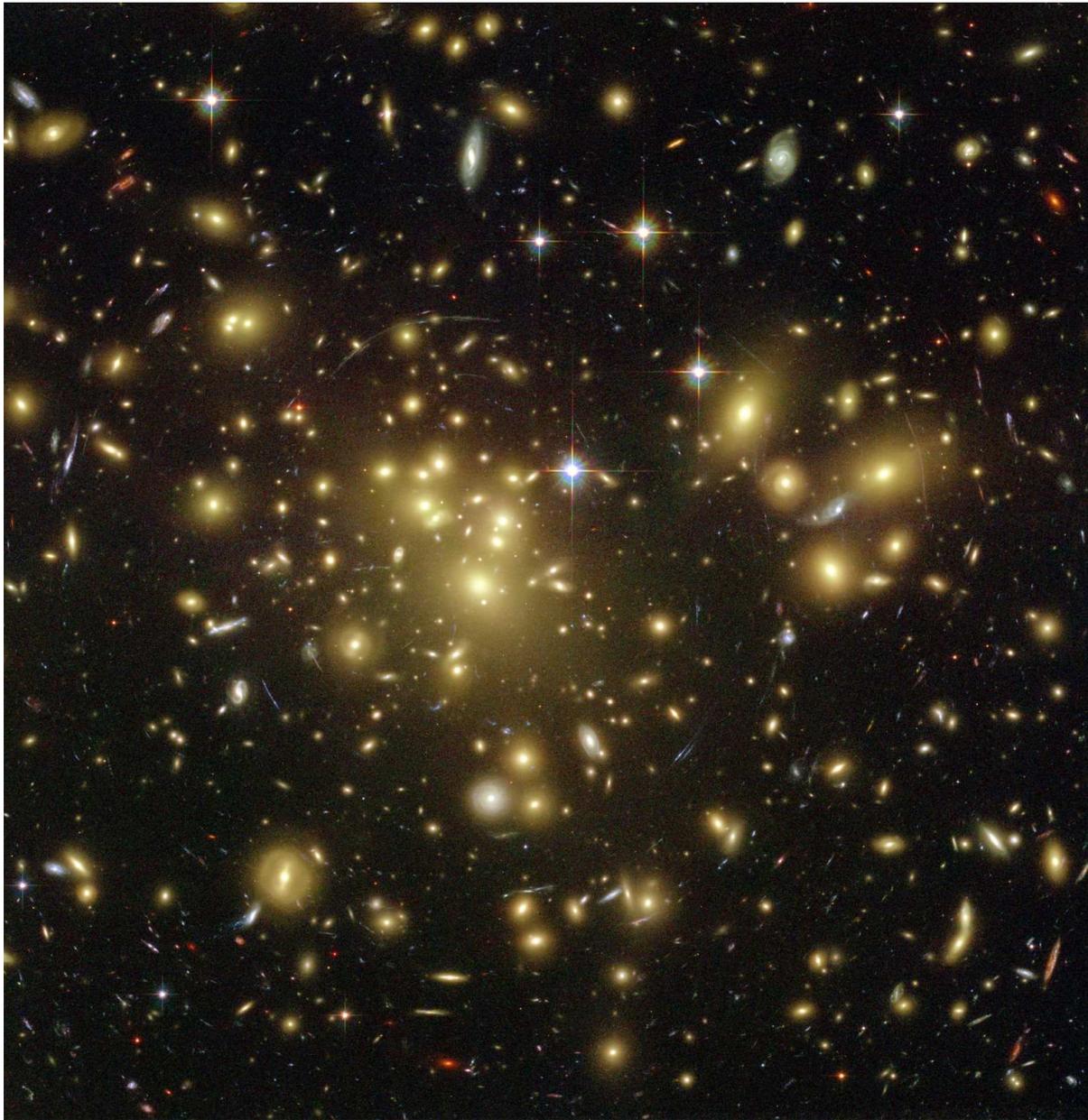


Figure 69: Image profonde de l'amas de galaxies Abell 1689 ($z=0.18$) obtenue avec la caméra ACS du HST. Elle montre l'image d'un champ de distorsion gravitationnelle induit par l'amas de galaxies. La comparaison avec la simulation de la figure 68 est frappante. Les détails sont suffisamment précis pour construire une cartographie de la matière noire jusqu'aux échelles des halos associés aux galaxies. D'après Broadhurst et al 2005, ApJ 621, 53. Image NASA, Benitez, Broadhurst, Ford, Clampin, Hartig, Illingworth, équipe scientifique de l'ACS et ESA.

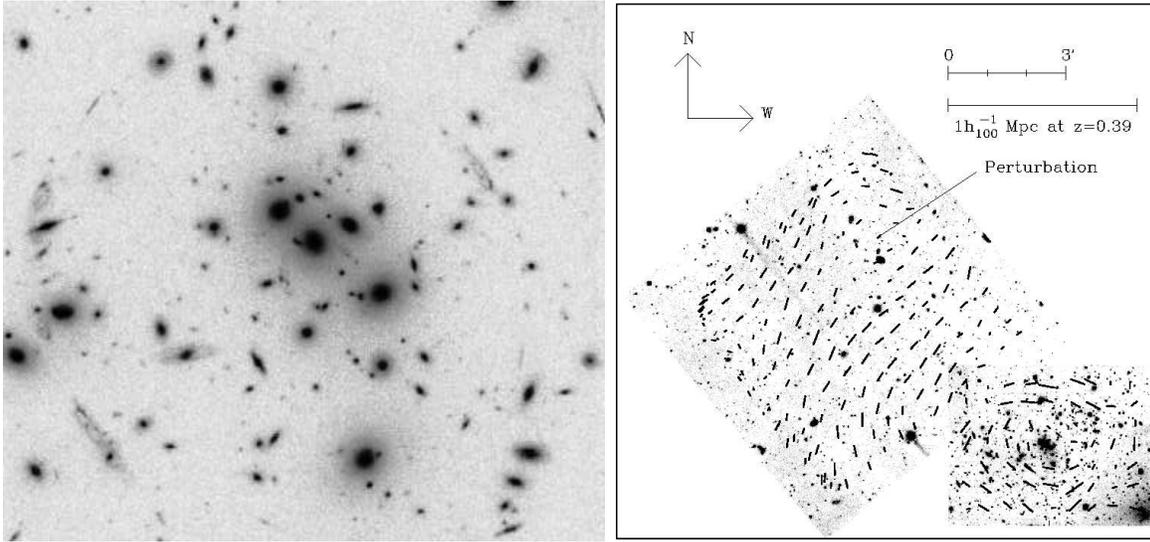


Figure 70: Carte de distorsion gravitationnelle observée autour de l'amas de galaxies Cl0024+1654 ($z_L = 0.38$) à partir de données du télescope CFHT. Une image HST (à gauche) montre le centre de l'amas qui se trouve sur le secteur en bas à droite de la carte. Les traits indiquent l'orientation et l'amplitude du cisaillement gravitationnel. La cohérence du champ de cisaillement révèle la distribution de la matière noire. La perturbation indiquée a été détectée par le cisaillement alors qu'aucune contrepartie optique n'est visible. Elle illustre que les distorsions gravitationnelles peuvent sonder la matière invisible indépendamment de la distribution de la lumière (D'après Bonnet et al 1994, ApJ 427, L83).

numérique et/ou de densité de lumière des galaxies pour reconstruire le champ de matière responsable de ces flots. Cette propriété résulte du fait que dans un univers en expansion dont les perturbations sont d'origine gravitationnelle, les champs de vitesses induits sont principalement radiaux. Ils sont orientés vers le potentiel gravitationnel qui domine l'environnement. L'amplitude de la composante de vitesse perpendiculaire au gradient du potentiel peut être négligée car décroît inversement au facteur d'échelle R . On montre alors que le champ de vitesse est directement relié au contraste de densité de matière, $\delta(\mathbf{x})$ (voir cours de E. Audit)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{H_0 f(\Omega)}{4\pi} \int \frac{\delta(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' . \quad (447)$$

où la fonction f est déterminée empiriquement

$$f \approx \Omega_m^{0.6} + \frac{\Omega_\lambda}{70} \left(1 + \frac{\Omega_m}{2} \right) , \quad (448)$$

et exprime comment l'évolution du taux de croissance des structures dépend de son contenu en matière-énergie.

Ces deux expressions montrent que l'on peut utiliser les champs de vitesse pour identifier les grandes structures responsables de mouvements à grande échelle des galaxies et mesurer leur masse. Alternativement, si l'on parvient à déterminer le champ de densité δ de manière indépendante, on peut estimer Ω_m ou Ω_λ .

La principale difficulté est la mesure des vitesses radiales individuelles des galaxies, v_i , qui sont combinées avec la vitesse d'expansion

$$v_i = v_{tot} - H_0 D , \quad (449)$$

où v_{tot} est la vitesse radiale totale et D la distance de la galaxie considérée. Il est donc crucial de disposer d'indicateurs de distances précis et sans erreurs systématiques.

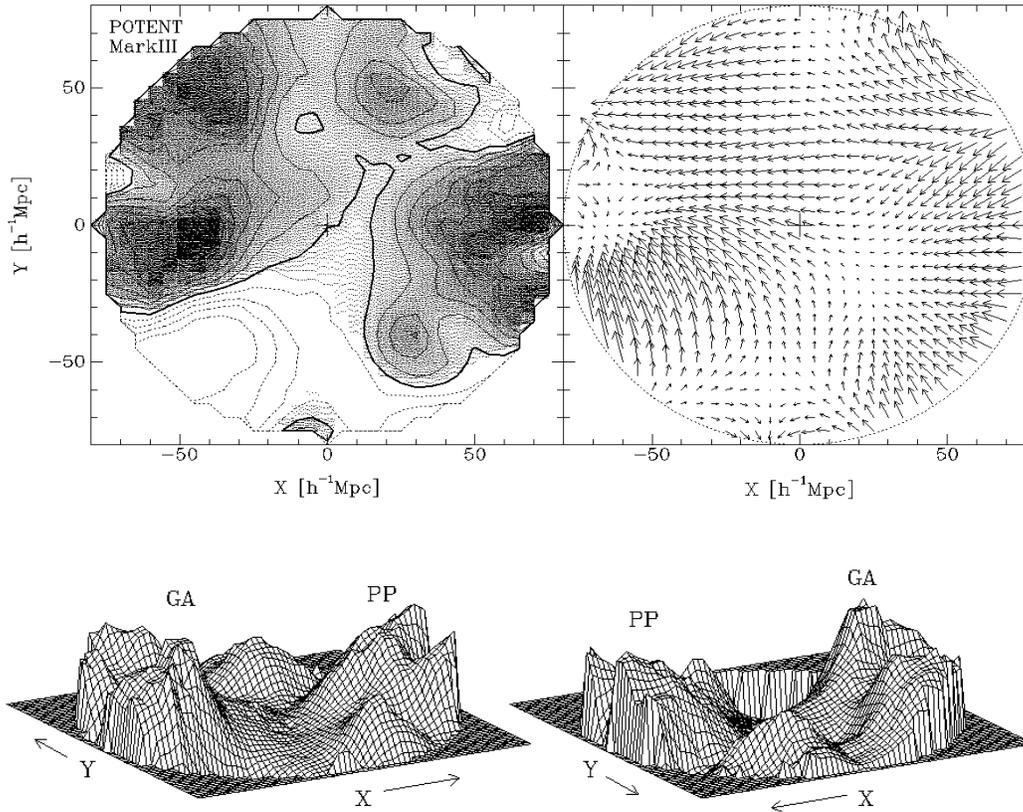


Figure 71: En haut: cartographies du champ de densité de matière et du champ de vitesse des galaxies à partir du catalogue de galaxies Mark III (3300 galaxies). À gauche, le champ de densité. Les contours en tirets sont les zones à contraste de densité négatif. À droite, le champ de vitesse des galaxies projeté dans le plan Supergalactique (Dekel et al 1999, ApJ 522, 1). En bas: reconstruction du champ de densité selon deux points de vue dans le plan Supergalactique. La dimension du champ atteint $80 h^{-1} \text{Mpc}$. Les deux structures dominantes sont le Grand Attracteur (GA) et le superamas Perseus-Pisces (PP).

Cette approche a été initialement utilisée pour analyser la distorsion du champ de vitesse local de l'expansion par la présence du champ de gravité du Superamas Local et de l'amas de galaxies Virgo. Mais c'est sur des catalogues des champs de vitesse (appelés catalogues "4-D" car ils fournissent les positions projetées sur le ciel, la distance et la vitesse individuelle de chaque galaxie) que les résultats les plus intéressants ont été publiés. On a pu ainsi reconstruire les champs de vitesse de notre voisinage et mettre en évidence les structures responsables de ces accrétions. La figure 71 montre la reconstruction des champs de vitesse et de matière autour de notre Groupe Local sur des échelles de $80 h^{-1} \text{Mpc}$. Les grandes structures dominantes sont le Grand Attracteur et Le superamas Perseus-Pisces qui doivent atteindre des masses dépassant $10^{15} M_{\odot}$.

Les mesures de Ω déduites de ces analyses donnent $\Omega > 0.3$. Cependant elles sont sensibles au *facteur de biais* qui relie les contrastes de densité numérique de galaxies au contraste de masse et qui intervient dans l'inversion de l'équation (447).

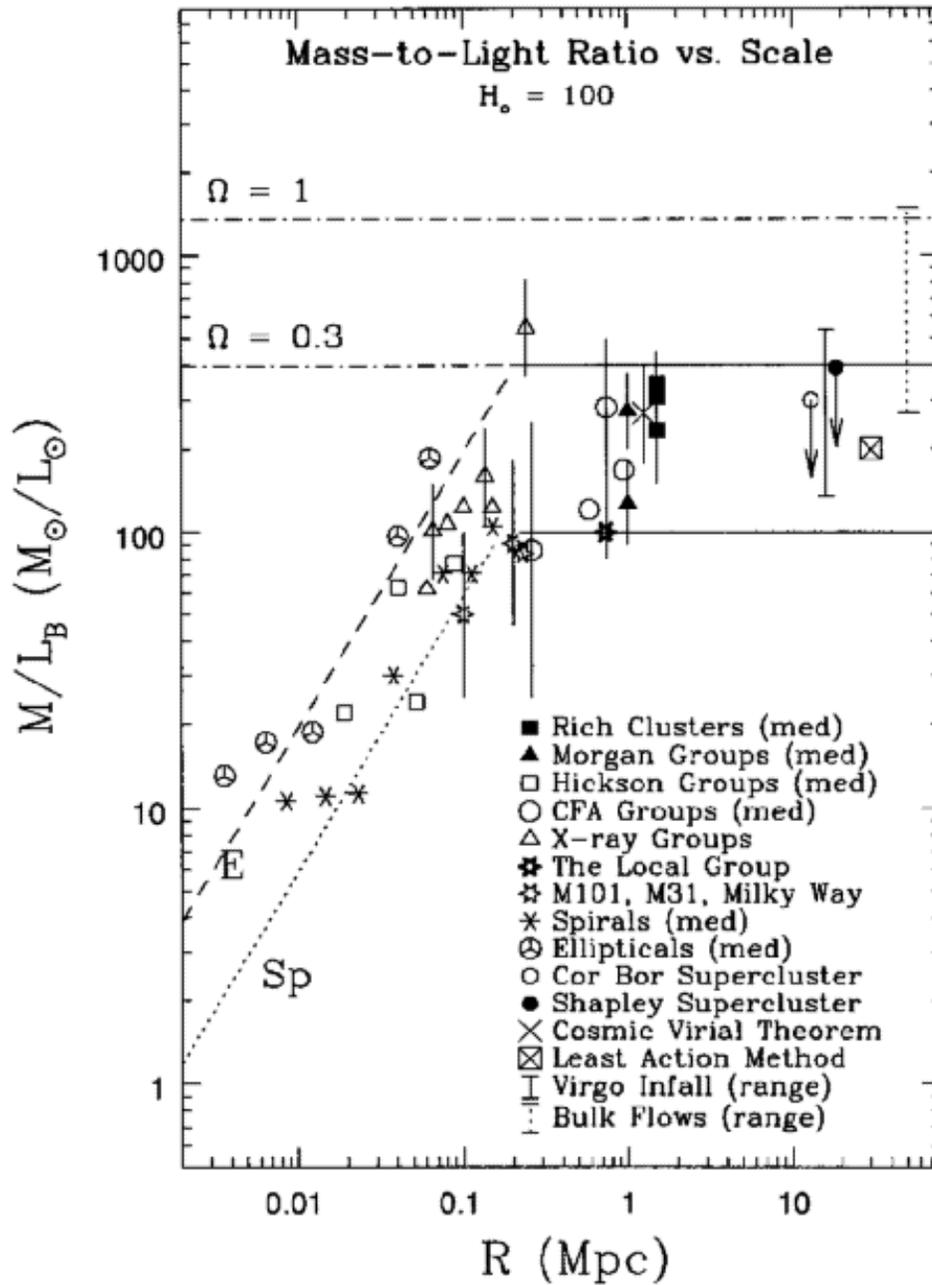


Figure 72: Évolution du rapport M/L en fonction de l'échelle de la structure. Les symboles E et Sp se rapportent aux galaxies elliptiques et spirales. Les champs de vitesse à grande échelles se rapportent aux données *Virgo Infall* et *Bulk Flows*. La montée progressive du M/L est claire. L'allure de la figure montre cependant une inflexion assez nette au-delà des échelles de quelques centaines de kpc, c'est à dire pour des échelles de masse dépassant celles des groupes. Elle semble converger vers $\Omega_m = 0.2 - 0.3$, très en-deçà de $\Omega_m = 1$, sauf peut être marginalement pour les champs de vitesse.

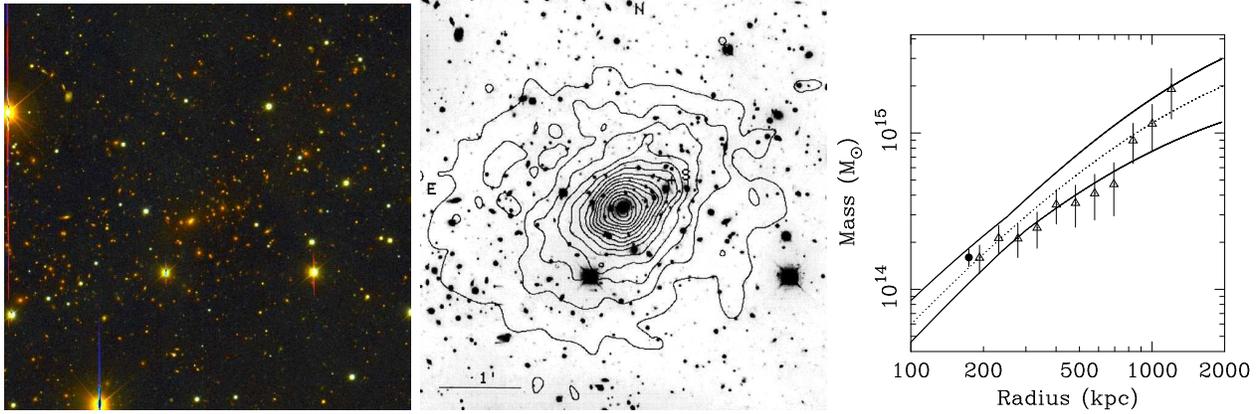


Figure 73: Analyse comparée X et distorsion gravitationnelle de l’amas de galaxies Abell 2390. Comme le montre l’image de gauche (obtenue avec la caméra grand champ Megacam du CFHT), cet amas a un grand nombre d’arcs (D’après Pelló et al 1999, A&A 346, 359). La figure de droite montre la masse totale en fonction de la distance radiale, $M(r)$. Les courbes continues montrent la masse déduite de l’analyse des données X des satellites ROSAT (montrées sur la figure centrale, d’après Pierre et al 1996 A&A 311, 413) et de Chandra (d’après Allen et al 2001, MNRAS 324, 877). Les triangles représentent le profil de matière déduit de la cartographie des distorsions gravitationnelles (d’après Squires et al 1996, ApJ 461, 572). Le cercle noir est la masse calculée au rayon critique indiqué par l’arc détecté dans Abell 2390 (d’après Pierre et al 1996) L’accord entre les deux méthodes de reconstruction du profil est ici très satisfaisant.

10.4.5 En résumé

La table 6 et la figure 72 résument les méthodes et les valeurs de M/L et de Ω déduites de ces analyses. D’une façon générale, les diverses méthodes donnent des résultats sur les masses et les rapports M/L cohérents et plutôt en bon accord. A titre d’exemple, la figure 73 montre la concordance des mesures sur l’amas de galaxies Abell 2390 obtenues avec trois estimateurs, le plasma “X” de l’amas, le “weak lensing” (les distorsions gravitationnelles faibles) et le “strong lensing” (les arcs gravitationnels). Pour ce cas l’accord est excellent, mais il est fréquent de trouver des écarts d’un facteur deux. Ces désaccords font l’objet d’études approfondies pour en comprendre l’origine. Cependant, en ce qui concerne le rapport M/L et donc Ω_m déduit des amas de galaxies, cela n’a pas de conséquence sur les conclusions. En dépit des dispersions parfois importantes, la Table 6 nous apporte des éléments solides et crédibles pour chaque valeur de Ω .

10.5 Mesure de $(\Omega_m; \Omega_\Lambda) - \sigma_8$

Les effets des paramètres cosmologiques $(\Omega_m; \Omega_\Lambda) - \sigma_8$ (ainsi que d’autres paramètres) sur les modèles d’univers sont de deux types:

- ils modifient le taux d’expansion de l’Univers,
- ils modifient le taux de croissance des structures dans l’Univers (voir l’Annexe G) .

Comme le taux d’expansion est exprimé par $H(z)$, toutes les quantités observables qui en dépendent peuvent donc être des sondes cosmologiques. De même, comme le taux de croissance des structures est exprimé *in fine* par le spectre de puissance des fluctuations de densité

Composante/méthode	M/L	échelle	Ω_m
Voisinage solaire	5	1 kpc	$0.003 h^{-1}$
Cœur des galaxies elliptiques	10	2 kpc	$0.007 h^{-1}$
Analyse virielle des galaxies elliptiques	30	10 kpc	$0.02 h^{-1}$
Courbe de rotation des galaxies spirales	30	10 kpc	$0.02 h^{-1}$
Groupes de galaxies	200	500 kpc	$0.13 h^{-1}$
Amas de galaxies	300	1Mpc	$0.20 h^{-1}$
Abondance de Baryons (nucléosynthèse)	-		$0.01-0.05 h^{-2}$
Composante stellaire	-		$0.0030 h^{-1}$
Gaz inter-galactique HI	-		$0.0004-0.010 h^{-1}$
Fond diffus cosmologique	-	-	$0.000023 h^{-2}$
Chute sur Virgo	-	15 Mpc	0.1-0.4
Champs de vitesse	-	20 Mpc	> 0.5

Table 6: Estimation du paramètre de densité de certaines composantes dominantes de l'Univers et dans l'Univers actuel (ces fractions dépendent de l'histoire de la formation des galaxies). La ligne intermédiaire donne la contribution à la densité d'énergie du fond diffus cosmologique.

et son évolution avec le temps, donc le redshift, $P(k, z)$, tous les observables qui caractérisent ce spectre peuvent être utiles pour déterminer des paramètres cosmologiques (voir Annexe G). Un résumé de ces méthodes est donné dans la Table 7.

Il faut cependant insister sur le fait que la plupart de ces méthodes se fondent sur des observations qui ne dépendent pas d'un paramètre unique. Comme $H(z)$ et $P(k, z)$ dépendent de plusieurs paramètres, les observations fournissent des informations dégénérées. Il est donc en général illusoire d'énumérer des listes de contraintes de la forme [1 observation]=[1 paramètre cosmologique], même si certaines observations sont plus adaptées que d'autres pour certains paramètres. C'est la raison pour laquelle je ne concentre pas dans cette section à uniquement Ω_Λ .

De plus, tout comme la mesure de H_0 , les observations, l'extraction du signal et son interprétation cosmologique sont en général difficiles. En particulier, les effets systématiques instrumentaux et (astro)physiques en limitent fréquemment la portée. Il est donc important de multiplier les méthodes indépendantes et de produire des analyses conjointes des données.

10.5.1 Les supernovae de type Ia

Les supernovae de type Ia (SNIa) sont des naines blanches qui explosent sous l'effet de l'interaction avec un compagnon proche avec lequel elle forme un système double. Le spectre des SNIa est complexe et évolue dans le temps. Il diffère des autres supernovae par la présence de raie de SiII.

Les SNIa ont des propriétés remarquables et très homogènes de leur courbe de lumière. Leur luminosité absolue à la période du maximum d'éclat et le profil de décroissance après le maximum sont les mêmes pour toutes les SNIa. Le maximum atteint les valeurs caractéristiques $M_B = -19.6 \pm 0.1$ ou $M_I = -19.3 \pm 0.1$. Il en résulte que le module de distance des SNIa au maximum est une fonction qui ne dépend que de la distance lumineuse, c'est à dire du couple $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, si l'on connaît le redshift:

$$m - M = \text{Cte} + \log [D_L(z, \Omega_m, \Omega_\Lambda)] . \quad (450)$$

Méthode mesurant $H(z)$	Méthode mesurant $P(k, z)$
Distance luminosité: - SNIa Distance diamètre angulaire: - Arcs géant multiples - Images multiples des quasars - Tests d'Alcok-Paczinski - Forêt Lyman-Alpha - Oscillations acoustiques des baryons (BAO) - CMB Volume comobile: - Comptage de galaxies - Comptage des amas de galaxies - Nombre de quasars amplifiés	Masse et abondance des amas de galaxies: - Masse X, lensing, $\sigma_{los}(amas)$, SZ - Relevés spectroscopix/X d'amas de galaxies Masse et nombre de halos galactiques: - Relevés spectroscopiques de galaxies - Galaxy-galaxy lensing - Relevés d'"anneaux d'Einstein" Mesure de $P(k, z)$ directe: - Distorsions gravitationnelles cosmologiques - CMB

Table 7: Table résumant les méthodes utilisées pour contraindre les paramètres cosmologiques et plus spécifiquement Ω_Λ . Les deux colonnes séparent celles qui dépendent du taux d'expansion de celles qui dépendent du taux de croissance des fluctuations.

Le diagramme de Hubble d'un échantillon de SNIa réparties dans un grand intervalle de redshift peut donc en principe être construit et comparé aux prédictions de différents modèles.

Les premières mesures établies sur la base de deux grands programmes indépendants de détection et de suivi de supernovae lointaines donnent des résultats concordants. Sur 2 échantillons d'environ 40 SNIa, il est apparu que:

- le modèle ($\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$) est exclu,
- $\Omega_\Lambda > 0$ (3σ),
- $q_0 < 0$ et l'Univers est donc en accélération,
- si $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, alors $\Omega_m \approx 0.3, \Omega_\Lambda \approx 0.7$ et $q_0 \approx -0.55$.

L'étude approfondie des sources de biais systématiques qui pourraient affecter les mesures de magnitudes des SNIa ne semble pas remettre en cause ces résultats.

Ces observations "historiques" conduites dans les années 1996-1998 sont les premières évidences que l'Univers est en expansion accélérée. De plus, compte tenu des résultats de l'époque sur les anisotropies du CMB mesurées par BOOMERANG et MAXIMA l'Univers a une courbure (presque) nulle, et donc $\Omega_\Lambda = 0.7$.

Même s'il pré-existait des arguments en faveur d'un univers avec une constante cosmologique non nulle avant ces résultats, ils ont été reçus avec une certaine surprise. Ils ont conduit à un bouleversement sur l'exploration des modèles d'univers dans les grands relevés astronomiques, mais ont surtout fait naître une énigme nouvelle pour expliquer la source à l'origine de cette accélération. Potentiellement une nouvelle physique sous-jacente y est contenue et, de ce point de vue, il s'agit peut être d'une véritable révolution pour la physique fondamentale.

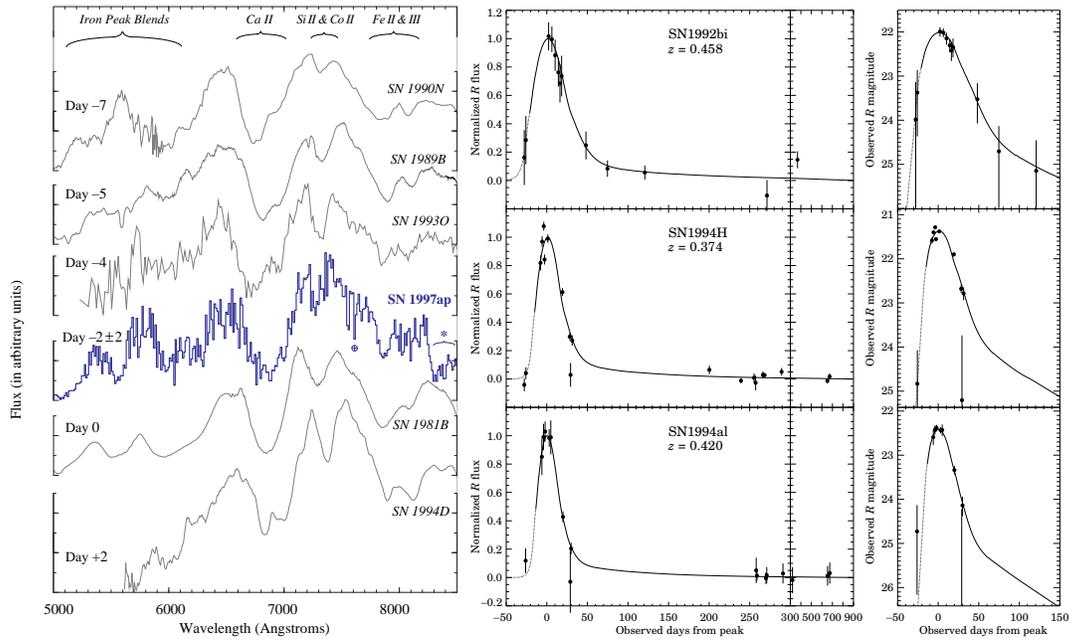


Figure 74: A gauche, spectres de SNIa à différent redshift. A droite, courbes de lumière montrant les magnitudes apparentes. Leur amplitude relative apparente et leur largeur diffèrent puisque ces supernovae sont à des redshifts différents.

10.5.2 La fraction des quasars amplifiés

L'équation (318) décrit comment le facteur d'expansion évolue. Il est assez facile de décrire l'effet de Ω_Λ qui peut s'opposer à Ω_m . À grand redshift, le terme de matière domine l'expansion car il varie z^3 alors que le terme Ω_Λ varie comme z^2 . Comme $\Omega_m \rightarrow 1$ quand z croît, l'évolution temporelle du facteur d'échelle $R(t)$ est similaire à celle d'un modèle $\Omega_m \approx 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$. L'univers semble avoir une expansion qui ralentit comme un univers fermé. Mais progressivement z augmente, le terme Ω_Λ devient de plus en plus important et contribue majoritairement à l'expansion jusqu'à inverser la dérivée seconde de $R(t)$ et donc le signe de son accélération. Dans le cas d'un univers plat, pour $z \approx 0.2$ le terme Ω_Λ peut contrebalancer Ω_m et il existe donc une phase où l'Univers a une expansion très lente.

Imaginons par exemple que la valeur de Ω_Λ soit assez élevée pour contrebalancer Ω_m et inverser très significativement le sens de l'accélération de l'expansion. Il existe une période dans l'histoire de l'Univers où les structures et les galaxies se forment dans un volume d'univers quasi-constant. L'univers accumule donc un grand nombre de galaxies, qui sont autant de lentilles gravitationnelles potentielles, dans un intervalle de redshift très réduit. Toutes ces galaxies vont donc produire des effets de lentille gravitationnelle sur les quasars d'arrière plan. On s'attend donc à une forte dépendance du nombre de quasars amplifiés en fonction de l'amplitude de la constante cosmologique.

L'analyse statistique du nombre de quasars amplifiés montre que la fréquence observée du phénomène est compatible avec $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$. Pour le moment les limites les plus solides donnent $\Omega_\Lambda < 0.66$, mais, pour rester prudent, la contrainte est plutôt $\Omega_\Lambda < 0.9$ (Malhotra et al 1997). Il est en fait assez compliqué de produire une contrainte car les échantillons de quasars sont peu nombreux et les biais possibles mal contrôlés. Les progrès à venir sont sans doute les catalogues 2dF, du SDSS (on attend 100000 quasars) puis le grand relevé profond du VLT VIRMOS car il fournissent de gros échantillons homogènes de quasars.

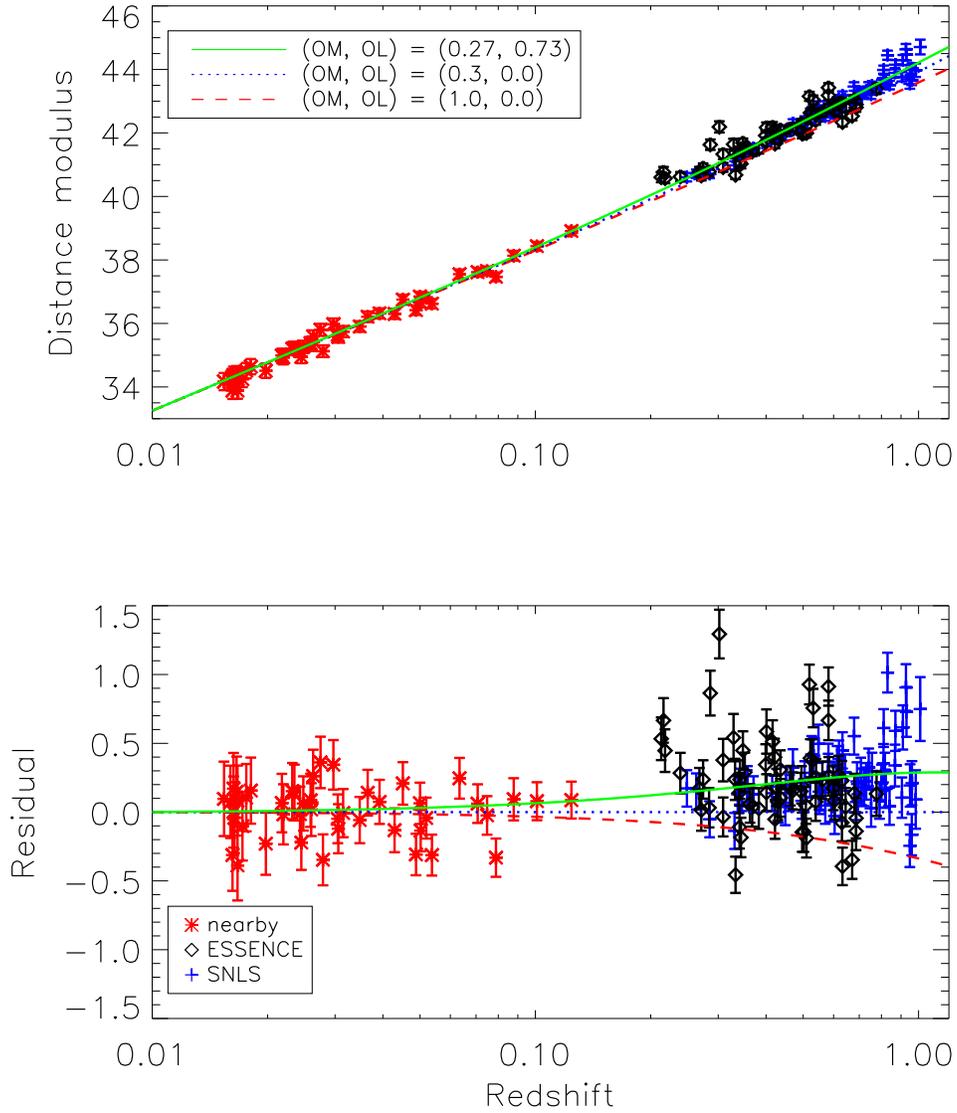


Figure 75: Diagramme de Hubble construit à partir des échantillons de SNIa proches (points rouges), du relevé SNLS (points bleus) et du relevé ESSENCE (points noirs). En abscisse, le redshift de la supernova, en ordonnée, la magnitude apparente (en haut) et l'écart de magnitude par rapport à un modèle de référence (en bas). Les losanges sont les distributions individuelles. Les carrés sont des points médians par boîtes de 20 SNIa. Les 3 courbes continues sont les prédictions de modèles $(\Omega_m; \Omega_\Lambda)$. Ligne verte continue: (0.27,0.73); ligne pointillée bleue: (0.3,0.0); tirets rouges: (1.0,0.0). D'après Wood-Vasey et al 2007, ApJ 666, 694.

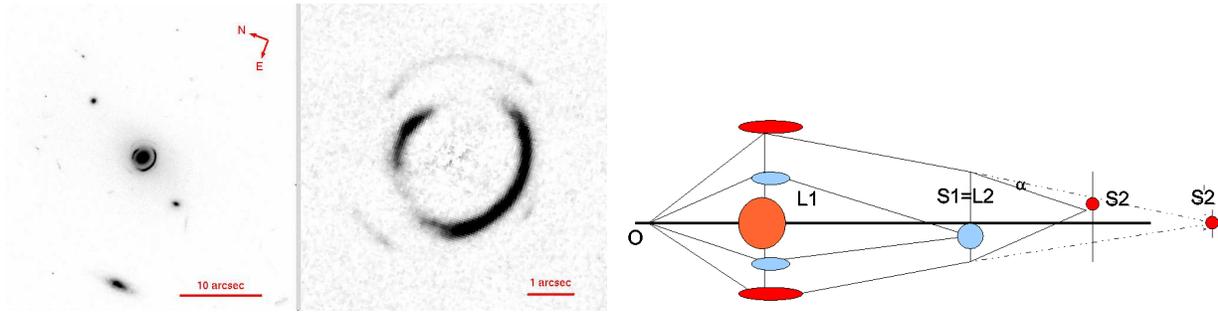


Figure 76: Observation d'un système d'arc double par le télescope HST. La figure de gauche montre l'observation avant traitement. Au centre, un zoom du système d'arcs avec la galaxie centrale défectrice soustraite de l'image de gauche. On voit clairement les deux systèmes. La figure de droite est une illustration de la configuration. La position angulaire relative des deux arcs peut être exploitée pour mesurer les paramètres cosmologiques. Mais pour cela il faut avoir aussi une bonne modélisation de la distribution de la matière dans la lentille. D'après Gavazzi et al 2008, ApJ 677, 1046.

10.5.3 Les arcs gravitationnels

Les arcs gravitationnels, comme la fraction de quasars multiples à grande séparation angulaire, ou bien la position de lignes critiques dans les amas de galaxies, permettent de mesurer Ω_Λ grâce à un effet de convergence du banc d'optique dont l'amplitude dépend de Ω_m et Ω_Λ . Pour l'illustrer, considérons le cas d'une sphère isotherme singulière. Nous avons vu (Eq. 436) que la position de la ligne critique varie $\theta \propto \sigma^2 D_{LS}/D_{OS}$. Si par chance nous observons deux arcs gravitationnels provenant de deux sources à des redshifts différents, alors le rapport des lignes critiques des sources 1 et 2, R_l est

$$R_l = \frac{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_1}{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_2}, \quad (451)$$

qui est une fonction ne dépendant que de Ω_m et Ω_Λ si les redshifts des deux arcs sont connus. Une telle configuration exceptionnelle a été observée très récemment. Elle est montrée sur la figure 76. Cependant, il faut construire la distribution de masse dans la lentille avec précision avant tout. Dans ce cas, il est peu vraisemblable que les lentilles gravitationnelles soient de vraies sphères isothermes. Cependant, on peut généraliser cette méthode à des configurations plus complexes, comme par exemple lorsqu'un arc a un redshift connu et que la ligne critique des sources lointaines est aussi connue. Les résultats sont très incertains. Sur l'amas Cl0024+1654 elle donne $\Omega_\Lambda \approx 0.6 - 0.7$ si $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$. Mais la méthode dépend fortement de la distribution en redshift des sources et du modèle de la lentille. Une alternative est de considérer des triplets d'arcs situés approximativement à la même position projetée dans le plan de la lentille. Ces triplets voient alors le même champ défecteur ce qui permet de briser la dégénérescence induite par la distribution en densité du potentiel.

10.5.4 Les distorsions gravitationnelles cosmologiques ("cosmic shear")

L'amplitude des effets de lentille gravitationnelle produits par les grandes structures de l'Univers est infime car les contrastes de densité sont de l'ordre de 10^{-2} . Cependant, ils s'accroissent progressivement pendant tout le trajet des photons et modifient certaines propriétés statistiques des populations de galaxies. La matière noire peut ainsi déformer les sources lointaines et le champ cohérent de déformation induit peut être observé et analysé sur les grands relevés

photométriques du ciel.

L'angle de déflexion induit par les interactions cumulées sur une ligne de visée est

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}, w) = \frac{\delta \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta}, w)}{r_k(w)} = \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' \frac{r_k(w-w')}{r_k(w)} \nabla_{\perp} \Phi [r_k(w') \boldsymbol{\theta}, w'] . \quad (452)$$

où r_k est la distance angulaire comobile décrite par l'équation (321), $w = dr/\sqrt{1-kr^2}$ la distance comobile et \boldsymbol{x} la séparation transverse comobile. Sachant par ailleurs que

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_i} , \quad (453)$$

on en déduit l'expression générale de la convergence, κ :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}, w) = \frac{1}{c^2} \int_0^w dw' \frac{r_k(w-w') r_k(w')}{r_k(w)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Phi [r_k(w') \boldsymbol{\theta}, w'] . \quad (454)$$

Les dérivées secondes de Φ expriment le Laplacien du potentiel comobile associé à une perturbation $\delta \times \bar{\rho}$ située sur la ligne de visée et donc¹⁵

$$\Delta \Phi = 4\pi G R^2(t) \bar{\rho} \delta = 4\pi G R^2(t) \frac{\bar{\rho}_0}{R^3(t) \rho_c} \rho_c \delta = 4\pi G R^2(t) \Omega_m \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{1}{R(t)} \delta , \quad (455)$$

soit

$$\Delta \Phi = \frac{3H_0^2}{R(t)} \Omega_m \delta . \quad (456)$$

Pour des perturbations faibles du champ de matière (voir l'Annexe H et le cours de théorie des perturbations de E. Audit), on peut développer en série de Taylor le contraste de densité de matière δ et exprimer κ au premier ordre:

$$\kappa^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z) = \frac{3}{2} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \Omega_m \int_0^z \frac{dz}{(1+z) H(z)} \frac{D_A(z', z) D_A(z')}{D_A(z)} \delta_{mass}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z) , \quad (457)$$

où les D_A sont les distances angulaires données par l'équation (325). On peut alors montrer que dans le cas d'un spectre de fluctuation de la forme $P(k) \propto k^n$ et des sources situées à une distance $z = z_s$ on a :

1. Variance du champ de convergence:

$$\langle \kappa^2(\boldsymbol{\theta}) \rangle^{1/2} \approx 0.01 \sigma_8 \Omega_m^{0.8} \left(\frac{\theta}{1 \text{ deg.}} \right)^{-\frac{n+2}{2}} z_s^{0.75} ; \quad (458)$$

2. Relation entre la variance de κ et celle de γ :

$$\langle \kappa^2(\boldsymbol{\theta}) \rangle = \langle \gamma^2(\boldsymbol{\theta}) \rangle ; \quad (459)$$

3. Ecart de symétrie relativement à une distribution Gaussienne (Skewness) du champ de convergence:

$$S_3(\kappa) \approx 40 \Omega_m^{-0.8} z_s^{-1.35} . \quad (460)$$

Les propriétés (458) et (460) indiquent que si on parvient à mesurer la variance et la skewness (ou la dissymétrie de la distribution), on peut alors obtenir simultanément Ω_0 et σ_8 (la normalisation du spectre de puissance des fluctuations). La propriété (459) nous indique qu'on peut mesurer la variance de κ à partir de celle de γ . Or, en régime de distorsion gravitationnelle faible, γ est directement l'ellipticité mesurée des galaxies. Donc, on peut sonder les modèles d'univers par la cartographie des ellipticités des galaxies du ciel. Les Figures 77 et 78 montrent les résultats les plus récents, notamment ceux obtenus à partir du HST et des données du CFHTLS.

¹⁵Le terme $R(t)$ vient du fait qu'il s'agit du Laplacien comobile, donc $\nabla_x = R \nabla_r$ (voir Annexe H et le cours de E. Audit)

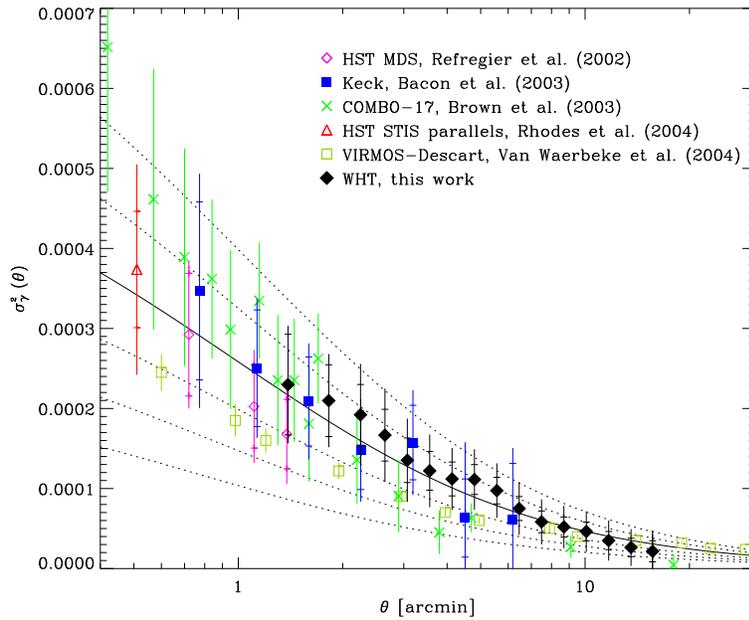


Figure 77: Une compilation de mesures de la variance du cisaillement gravitationnel en fonction de l'échelle angulaire. Les courbes représentent des modèles cosmologiques. Avec ces données, le modèle CDM standard normalisé sur COBE est rejeté à plus de 10σ (d'après Massey et al 2005, MNRAS 359, 1277). Les courbes superposées sont les prédictions théoriques des scénarios de formation de structures par instabilité gravitationnelle dans un univers dominé par de la matière noire froide. L'accord donne une consolidation très solide à ce paradigme.

10.5.5 Les amas de galaxies

Nous avons vu précédemment comment on pouvait utiliser la masse des amas de galaxies pour en déduire une valeur de Ω_m établie sur des échelles de masse $10^{13.5} \leq M \leq 10^{15} M_\odot$ ou de dimension $200 \text{ kpc} \leq L \leq 5 \text{ Mpc}$. Ils conduisent à $0.15 \leq \Omega_m \leq 0.35$. Cependant, cette analyse a des dégérescences avec d'autres paramètres cosmologiques, σ_8 en particulier, et on peut donc tirer des informations ces paramètres par ce biais.

Par ailleurs, les amas de galaxies sont les structures découplées de l'expansion les plus massives connues qui ont partiellement atteint la fin de la relaxation violente. Ils sont donc à la transition entre les systèmes auto-gravitants et les grandes structures en formation dans l'Univers. De ce point de vue, ce sont des témoins privilégiés de l'histoire de la formation des structures. Ils contiennent des informations importantes sur la théorie linéaire de croissance des perturbations et l'histoire critique de la transition vers le régime non-linéaire. Or, cette histoire dépend fortement des paramètres cosmologiques, notamment ceux qui caractérisent la matière noire et l'énergie sombre. En explorant comment la population des amas de galaxies évolue avec le temps/redshift, on doit donc pouvoir contraindre les paramètres cosmologiques. C'est effectivement ce qu'illustre la figure 25.

Pour comprendre dans le détail les relations entre amas de galaxies et paramètres cosmologiques, le cours d'E. Audit sur la formation des structures et l'Annexe H de ce cours sont ici indispensables.

Les amas de galaxies apportent quatre méthodes pour explorer les paramètres cosmologiques:

1. **La détermination de la masse des amas de galaxies.** Elle contraint principalement Ω_m et σ_8 comme nous l'avons vu en Section 11.4 . Ces masses sont déterminées par la

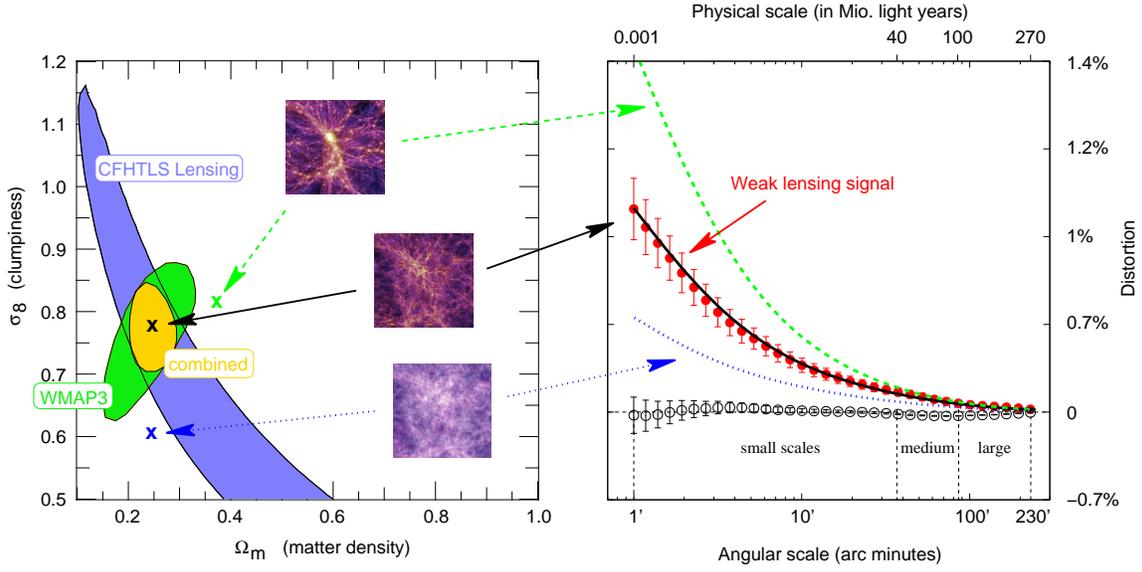


Figure 78: Une analyse du *cosmic shear* faite avec le relevé Canada-France-Hawaii Legacy Survey Wide. A droite on voit l'évolution de l'amplitude du cisaillement gravitationnel en fonction de l'échelle angulaire (points rouges) ainsi que les prédictions de modèles cosmologiques. Les contraintes sur les paramètres cosmologiques $\Omega_m - \sigma_8$ et $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ sont montrés sur la figure de gauche. Les vignettes sont des images de simulations numériques qui montrent la forme de la distribution des structures de l'Univers que l'on attend suivant notre position dans le plan $\Omega_m - \sigma_8$ et notamment suivant la valeur de σ_8 . Les contraintes du cosmic shear seules sont en bleu. Celle des anisotropies du fond de rayonnement diffus cosmologique du satellite WMAP3 and vert. En jaune, on voit l'analyse combinée. Elle montre comment des contraintes "orthogonales" peuvent être efficaces dans ce type d'analyse (d'après Fu et al 2008, A&A 479,9).

distribution des dispersions de vitesse des galaxies dans les amas (viriel), la relation entre la température du gaz X intra-amas et la masse de l'amas de galaxies, ou bien les effets de lentille gravitationnelle.

2. **La fonction de distribution en masse des amas de galaxies par unité de volume et de redshift.** Comme nous l'avons vu en Section 10.4 pour les comptages de galaxies, on peut exprimer la distribution, par intervalle de redshift, dz et par élément d'angle solide, $d\Omega$, des amas de galaxies de masse supérieure à une masse limite donnée, $M_{lim}(z)$, de la façon suivante

$$\frac{d^2N}{dzd\Omega} = \frac{c}{H(z)} D_A^2(z) (1+z)^2 \int_{M_{lim}(z)}^{\infty} \frac{dn}{dM}(M, z) dM, \quad (461)$$

où d_A est la distance diamètre angulaire, dn/dM est la fonction des masse des amas de galaxies, et $H(z)$ est le paramètre de Hubble. Cette expression contient donc à la fois une dépendance à l'histoire de l'expansion, $H(z)$, et au taux de croissance des structures, dn/dM .

Les difficultés concernent la détermination de $n(z)$, puis celle de dn/dM . Une méthode possible est d'utiliser la fonction de luminosité X des amas de galaxies, $\Phi(L_X)$, que l'on peut exprimer sous la forme suivante:

$$\Phi(L_X) = n[M(L_X)] \frac{dM}{dL_X} \quad (462)$$

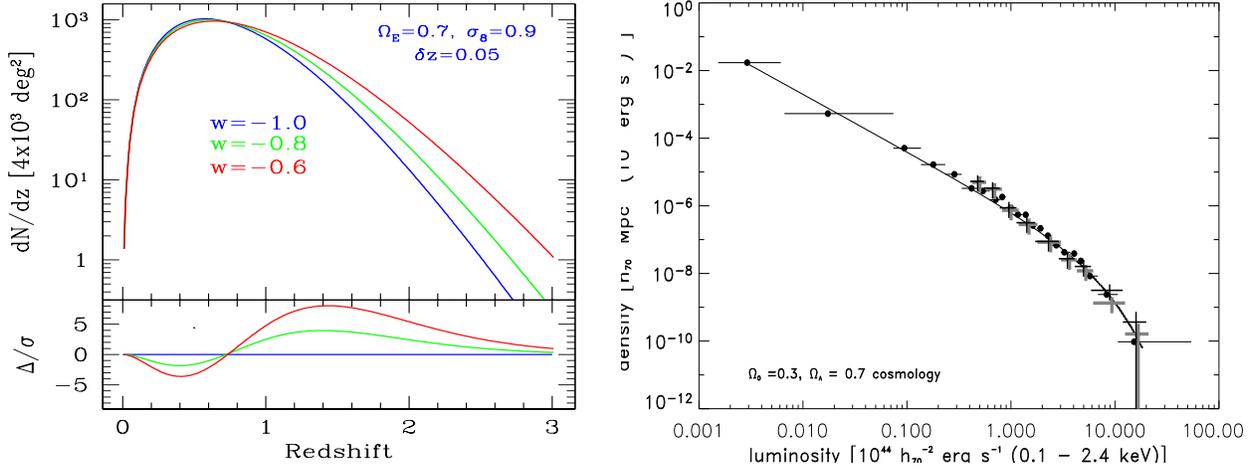


Figure 79: A gauche: Prédictions théoriques des modèles de formation des structures, incluant l'évolution non linéaire, de la distribution en redshift des amas de galaxies. Les trois courbes correspondent à trois modèles d'énergie sombre normalisés pour produire le même nombre d'amas de galaxies à $z = 0$. La prédiction est établie en supposant un relevé du ciel de 4000 deg^2 en SZ. Les différences statistiques des trois modèles sont montrées sur les courbes du bas. (D'après Mohr 2004, astro-ph/0408484). A droite: Fonction de luminosité X des échantillons d'amas de galaxies REFLEX (noir) et REXCESS (gris) établis avec les stallites ROSAT et XMM-Newton. La courbe noire montre la prédiction du modèle cosmologique ($\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$). D'après Boehringer et al 2007, A&A 469, 363

où $M(L_X)$ exprime la relation entre la luminosité absolue des amas de galaxies et leur masse. La fonction de luminosité X peut être déterminée à partir de comptage des amas de galaxies ayant un flux X mesuré S :

$$n(S) = \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \int_0^\infty \frac{r^2(z)}{E(z)} n[M(S, z); z] \frac{dM}{dS} dz, \quad (463)$$

où $E(z) = H(z)/H_0$ (qui est une formulation largement utilisée; dans ce cas $r(z) = \int_0^\infty E^{-1}(z) dz$), qui exprime le nombre d'amas de flux S par unité d'angle solide. Lorsqu'on utilise un échantillon d'amas observé en X , la distribution en redshift des sources est limitée par la limite en flux du catalogue. Si on écrit le flux apparent

$$S = \frac{L_X}{4\pi D_L^2(z)} \quad (464)$$

où D_L est la distance luminosité, on a alors

$$n(z) = \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \frac{r^2(z)}{E(z)} \int_{S_{lim}}^\infty f_{ciel}(S) n[M(S, z); z] \frac{dM}{dS} dS \quad (465)$$

où S_{lim} est la limite en flux du catalogue, $f_{ciel}(S)$ est la couverture du ciel pour un flux S (voir par exemple la figure 79).

Il reste alors à établir la relation $M(L_X)$. Elle peut être calibrée sur des données indépendantes. Comme la luminosité X des amas de galaxies est produite par du rayonnement de freinage, $L_x \propto n^2$ et donc la relation entre L_X et masse n'est pas simple. La limite en flux apparent est aussi une difficulté, notamment pour l'observation des amas de galaxies à grand redshift. De ce point de vue, un catalogue construit à partir de l'effet Sunyaev-Zeldovich, qui est insensible au redshift, est une voie très intéressante (voir la figure 79, partie gauche).

3. **La fonction de masse des baryons dans les amas de galaxies.** Supposons que le contenu en baryons dans les amas de galaxies soit semblable à celui de l'Univers dans son ensemble. Alors, on peut éviter le problème des incertitudes de la relation $L_X - M$ en utilisant directement la relation beaucoup plus simple $L_X - M_b$, où M_b est la masse de baryon. Dans, ce cas, si $n_b(M_b)$ est la fonction de masse des baryons et $n(M)$ la fonction de masse totale, on a par définition

$$n_b(M_b) = n \left(\Omega_m \frac{M_b}{\Omega_b} \right) \quad (466)$$

Les quantités n_b et Ω_b peuvent être déterminées par les mesures d'abondances des éléments, la nucléosynthèse primordiale ou bien à partir les mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique. Il reste alors à déterminer la série de paramètres cosmologiques compatibles avec les observations. La dépendance avec Ω_m est forte. Il faut aussi que "l'Universalité" du contenu en baryons des amas de galaxies soit démontrée.

4. **La fonction de corrélation des amas de galaxies.** Les amas de galaxies sont considérés comme de très bons traceurs des grandes structures. C'est un constat bien établi par leur distribution et leur place centrale dans les structures à grande échelle produites dans les simulations numériques. On peut donc construire le spectre de puissance des amas de galaxies, ou plutôt leur fonction de corrélation à deux points, en fonction de la richesse des amas de galaxie et/ou du redshift, pour contraindre les paramètres cosmologiques.

10.6 Anisotropies du fond diffus cosmologique et paramètres cosmologiques

Bien que cette partie soit dans la continuité directe des précédentes sous-sections, le statut et l'impact particulier des mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique leur confèrent une place de choix tout à fait singulière. La physique des anisotropies du fond diffus cosmologique dépasse les objectifs de ce cours et relève de celui de E. Audit. Je me contente donc ici de donner des explications qualitatives sur leurs origines, en me concentrant sur ce qui éclaire son rôle pour les contraintes sur les paramètres cosmologiques.

Bien que globalement le fond diffus cosmologique soit remarquablement isotrope, des fluctuations du rayonnement sont présentes à toutes les échelles. On les détecte notamment en mesurant des fluctuations de température par rapport au signal cosmologique moyen émis à $T = 2.725$ K. Ces anisotropies sont de trois types:

1. des contributions d'origine cosmologique. Ce sont celles qui contiennent une source immense d'informations sur les propriétés et l'histoire de l'Univers,
2. des contributions provenant de contamination du signal par des poussières de notre Galaxie et par les galaxies situées entre la surface de dernière diffusion et l'observateur,
3. des contributions engendrées par des effets Doppler, dues au mouvement de notre référentiel par rapport au fond de rayonnement lui-même: mouvement de la Terre, du Système Solaire, de notre Galaxie, du Groupe Local, etc..

Les fluctuations créent toutes des perturbations qui s'ajoutent et altèrent la distribution des photons émis pas la surface de dernière diffusion à $z \approx 1000$. Elles modulent le rayonnement diffus reçu, en amplitude, en fréquence et suivant l'échelle angulaire.

La contribution Doppler globale engendrée, par les mouvements "locaux" peut être isolée facilement. Une fois que les mouvements de la Terre autour du Soleil, du Soleil autour du centre

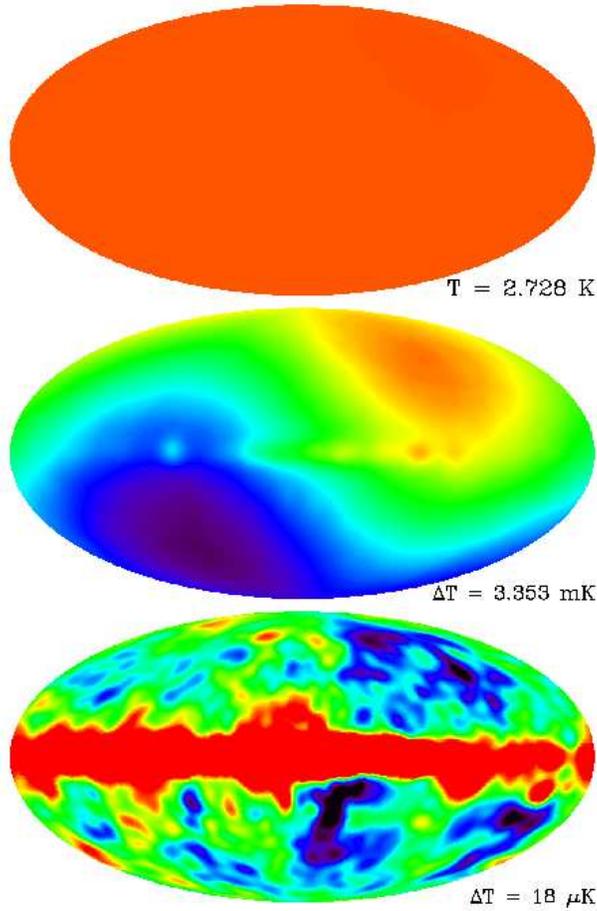


Figure 80: Cartes des premières contributions isotropes et anisotropes du fond micro-onde détectées par COBE/DMR. En haut le fond isotrope, au milieu la composante dipolaire, signature du mouvement du Groupe Local. En bas, les contributions résiduelles contenant les émissions de notre Galaxie et des anisotropies cosmologiques primaires et secondaires (D'après Smoot et al 1992, ApJ 396, 1).

de la Galaxie et de la Galaxie par rapport au centre du Groupe Local ont été soustraites, le résidu donne le mouvement du Groupe Local par rapport au fond de rayonnement: c'est le terme dipolaire, D . Pour en rendre compte, on écrit la température du rayonnement sous la forme

$$T(\theta, \phi) \simeq 2.725 \text{ K} + D \cos\theta + F(\theta, \phi) , \quad (467)$$

où $F(\theta, \phi)$ représente tous les termes d'anisotropie au-delà du terme dipolaire. Le terme $D \propto v/c$ est déterminé par les observations. Il correspond à un mouvement du Groupe Local de $627 \pm 22 \text{ km.s}^{-1}$ dans la direction Hydra-Centaurus (coordonnées galactiques $l = 276^\circ$, $b = 30^\circ$). L'amplitude des fluctuations engendrées par le dipôle est

$$D = 3.358 \times 10^{-3} \text{ K} . \quad (468)$$

Ces fluctuations relatives de température ne sont que de quelques millièmes, mais elles sont pourtant largement dominantes. En effet, les contributions cosmologiques sont plutôt de l'ordre

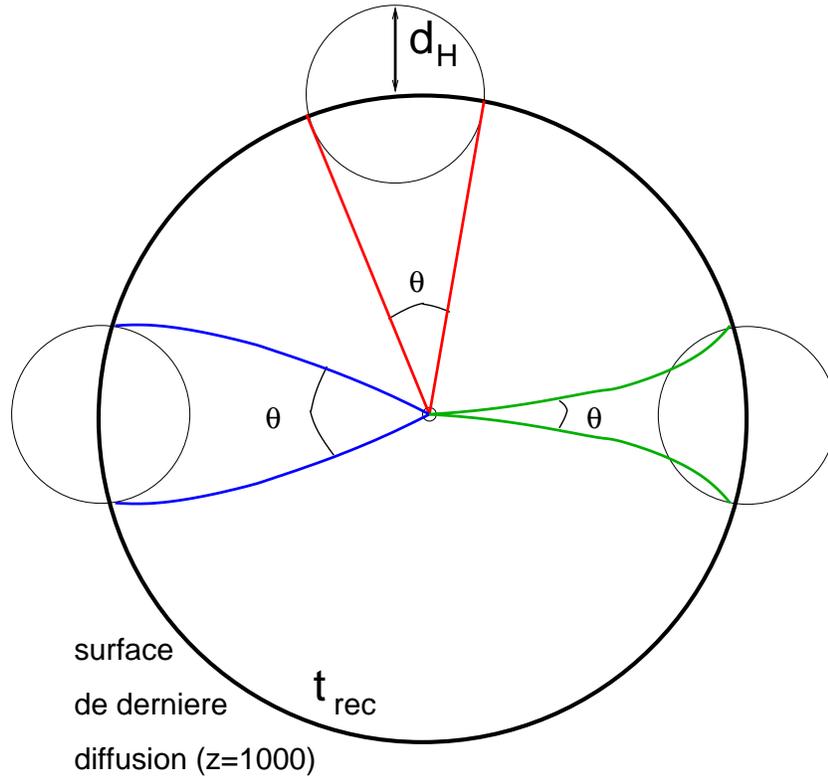


Figure 81: Vue simplifiée de l'effet de la géométrie de l'Univers sur le diamètre apparent de la taille de l'horizon. En rouge, l'angle observé pour un univers plat, en bleu pour un univers fermé et en vert pour un univers ouvert.

de 10^{-5} . Cela explique pourquoi l'extraction et la séparation des fluctuations résiduelles sont des étapes techniquement très délicates.

La figure 80 montre la décomposition progressive et la carte des anisotropies résiduelles qui contient le signal cosmologique, mais aussi les contributions non-cosmologiques qui sont donc des sources de bruit. Pour analyser les anisotropies au-delà de la composante dipolaire en fonction de l'échelle angulaire on décompose les fluctuations de température en harmoniques sphériques. Les fluctuations de températures observées dans une direction (θ_0, ϕ_0) à une échelle $\Delta\theta$ s'écrivent:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\Delta\theta}(\theta_0, \phi_0) = \sum_{l \geq 2, m} a_{lm} Y_{lm}(\theta_0, \phi_0) \quad (469)$$

A chaque coefficient l correspond une échelle angulaire

$$\Delta\theta(\text{degrees}) \sim \frac{180}{l} \quad (470)$$

Bien que le signal soit de faible amplitude, pour une échelle donnée $\Delta\theta$ on peut faire une moyenne sur toutes les directions (θ_0, ϕ_0) et en déduire une variance sur le signal:

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\Delta\theta=0}^2(\theta_0, \phi_0) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{l > 0} (2l + 1) C_l \quad (471)$$

où les coefficients C_l sont donnés par la moyenne sur tous les termes m :

$$C_l = \left\langle |a_{lm}|^2 \right\rangle_m \quad (472)$$

Ces moments multipolaires, $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$, peuvent être reliés au spectre de fluctuation de densité $P(k)$. En particulier aux grandes échelles angulaires comme celles mesurées par COBE, on a

$$C_l = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{H_0}{c} \right)^4 \int_0^\infty \frac{P(k)}{k^2} j_l^2 \left(\frac{2c}{H_0} k \right) dk, \quad (473)$$

où les j_l sont les fonctions de Bessel sphériques.

On imagine facilement que des fluctuations qui seraient de nature cosmologique montrent des processus physiques qui se déroulent au voisinage de la surface de dernière diffusion, au temps t_{rec} , c'est à dire sur des échelles de distance de l'ordre de $D(t = t_{rec})$. On a donc

$$\Delta\theta = \frac{D(t = t_{rec})}{D_A(z_{rec})} \quad (474)$$

Un point particulièrement intéressant est la mesure de l'échelle angulaire de l'horizon au temps t_{rec} sur la surface de dernière diffusion:

$$\Delta\theta_H = \frac{D_H(z_{rec})}{D_A(z_{rec})} \simeq 1^\circ \sqrt{(1 - \Omega_k)} \simeq 1.8^\circ \sqrt{\Omega_m} \quad (475)$$

Les deux distances $D_H(z_{rec})$ et $D_A(z_{rec})$ étant calculables pour chaque modèle cosmologique, on peut donc contraindre les paramètres cosmologiques en mesurant $\Delta\theta_H$. Fondamentalement, c'est la géométrie de l'Univers qui est mesurée. Ceci est illustré sur la figure 81.

Mais les contraintes qu'apportent les anisotropies du fond de rayonnement vont bien au-delà de cette mesure de distance angulaire. En effet, les C_l donnent des détails sur le spectre de fluctuation de densité $P(k)$ à toutes les échelles ce qui permet en principe de déterminer les contributions de chaque effet et de les relier à tous les paramètres cosmologiques.

Les fluctuations qui sont engendrées par des perturbations sur la surface de dernière diffusion sont dites anisotropies primaires; celles qui sont produites à plus bas redshift, par des effets de diffusion le long de la ligne de visée, sont dites anisotropies secondaires. Toutes ces contributions se mélangent dans le signal arrivant sur Terre. Cependant, suivant la nature des processus physiques à la source des perturbations, des échelles angulaires et des fréquences différentes sont affectées ce qui permet de reconstituer la contribution de chacune d'elles en analysant leur amplitude respective en fonction de l'échelle angulaire et de la longueur d'onde.

Il existe trois types de contributions primaires:

1. Les perturbations gravitationnelles (effet Sachs-Wolfe). Elles sont produites à l'émission de photons piégés dans des régions denses de la surface de dernière diffusion. Ces photons subissent un effet de décalage spectral gravitationnel pour s'extraire du champ de gravité des régions denses, ce qui produit une variation de température du corps noir:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\Phi}{3c^2}. \quad (476)$$

On comprend que ce phénomène dépende des paramètres Ω_m et Ω_Λ puisqu'il dépend des fluctuations du champ de densité (voir cours de E. Audit).

2. Les perturbations de vitesse (ou Doppler) produites par les mouvements du plasma à la surface de dernière diffusion. Elles engendrent des fluctuations de la forme

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta v}{c}, \quad (477)$$

et enfin

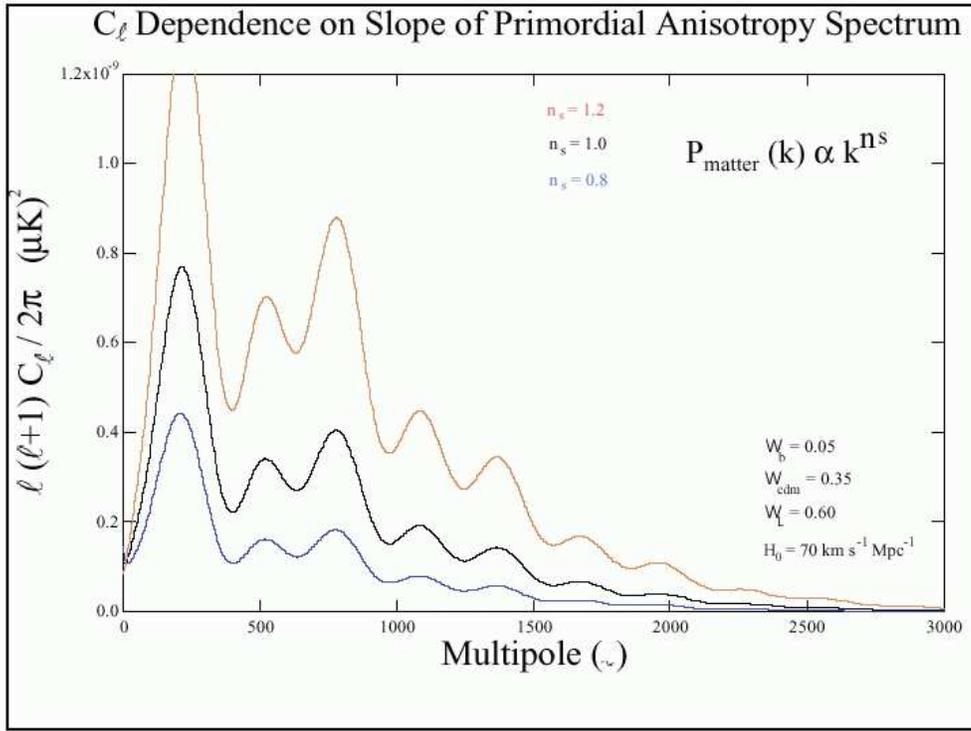


Figure 82: Effet de l'indice du spectre primordial des fluctuations sur le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique pour un scénario $\Omega_{total}=1.0$, $\Omega_{cdm}=0.35$ (contribution en matière noire) et $\Omega_b=0.05$ (contribution en matière baryonique). Pour ces trois modèles, l'indice spectral est $n = 1.2$ (courbe supérieure), $n = 1.0$ et $n = 0.8$ (courbe inférieure). (D'après Benoit et al 2002, astro-ph/0210306).

3. les perturbations adiabatiques produites par la compression du champ de rayonnement dans les régions de haute densité qui accroît sa température. L'accroissement de température retarde localement la recombinaison, qui se produit donc à un décalage spectral plus faible. La fluctuation de température est directement

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta z}{1+z} . \quad (478)$$

Les trois effets n'affectent pas les mêmes échelles. L'effet Sachs-Wolfe perturbe les grandes échelles angulaires, les effets Doppler et adiabatiques les échelles intermédiaires. La mesure des fluctuations selon les échelles permet donc en principe de différencier les modèles cosmologiques. Le premier terme cosmologique est contenu dans la composante quadrupolaire. L'exploitation des données multipolaires conduit à une reconstruction de plus en plus précise du spectre de puissance des anisotropies. Les mesures les plus récentes sont celles des expériences embarquées sur COBE et WMAP (satellites), sur BOOMERANG, MAXIMA et ARCHEOPS (ballons), et enfin celles des observations DASI et CBI (interféromètres). Avec les mesures de WMAP-5 il ne fait plus de doute que les premier ($l \sim 200$), second ($l \sim 550$), et troisième ($l \sim 900$) pics sont identifiés avec certitude. Les expériences ACBAR et CBI montrent assez clairement des détections du quatrième ($l \sim 1100$) et cinquième ($l \sim 1400$) pics (voir la figure 85).

La place des mesures des anisotropies du CMB dans la mesure des paramètres cosmologiques est unique et prépondérante. Elle s'explique par le fait que les anisotropie primaires concernent des phénomènes se déroulant à $z \sim 1000$, lorsque toutes les perturbations sont encore d'extrêmement

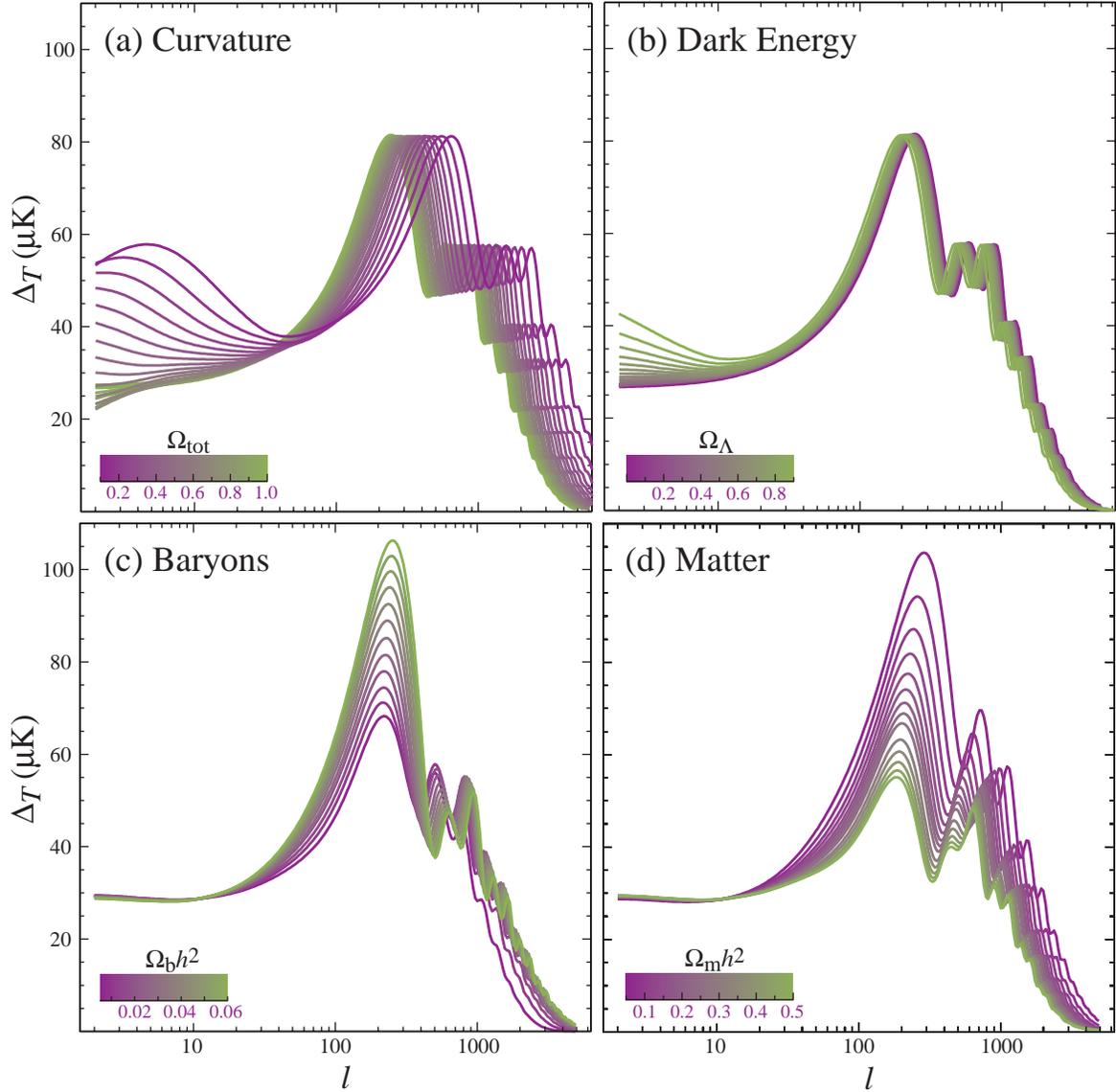
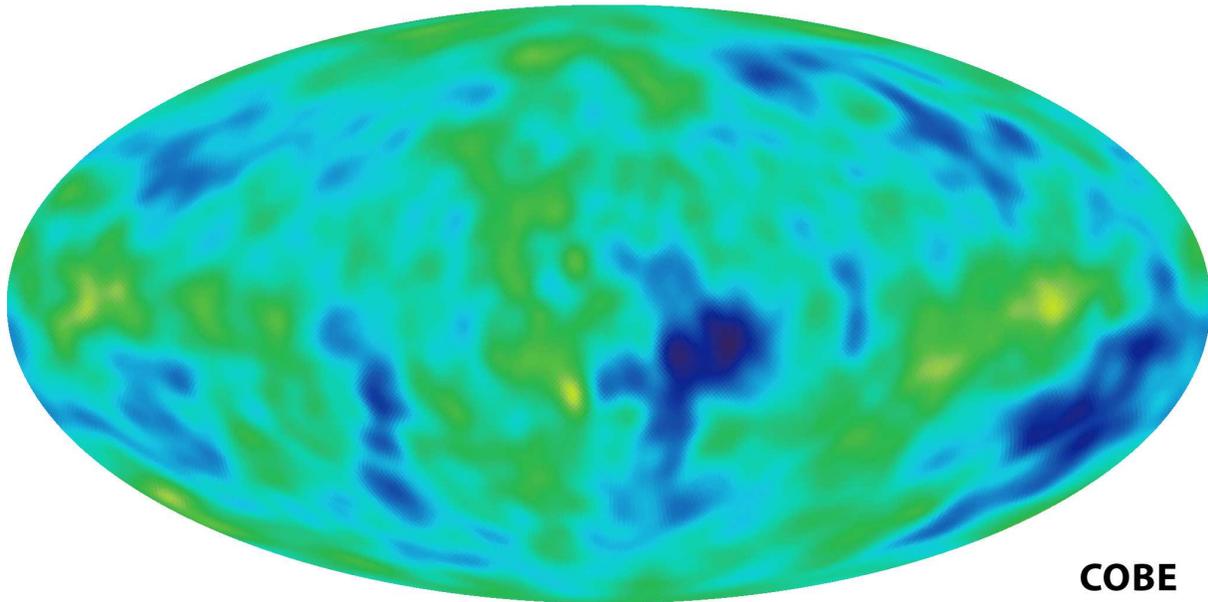
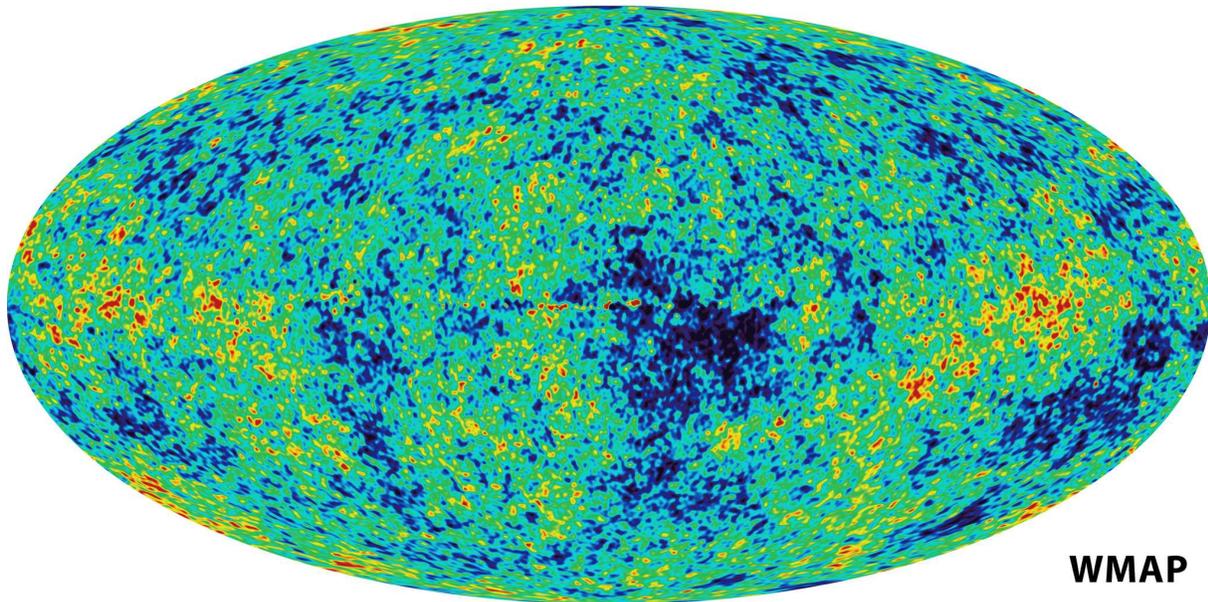


Figure 83: Effet de Ω_k , Ω_Λ , Ω_b et Ω_m sur la forme du spectre de puissance des anisotropies du CMB. L'échelle angulaire, $\theta \sim \pi/l$ est en abscisses; en ordonnée est représentée la racine-carrée de la puissance du spectre par intervalle logarithmique en l : $\Delta_T = \sqrt{l(l+1)C_l}/2\pi T_0$. Les quatre figures sont des prédictions théoriques pour un spectre primordial de fluctuation de densité ayant $n_s = 1$. Elles sont normalisées à un modèle de référence ayant $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_\Lambda = 0.65$, $\Omega_b h^2 = 0.02$ et $\Omega_m h^2 = 0.147$. A part le paramètre libre indiqué sur chaque figure, tous les autres sont maintenus constants. (D'après Hu & Dodelson 2002, ARA&A 40, 171).



COBE



WMAP

Figure 84: Comparaison des cartes des anisotropies du fond micro-onde détectées par COBE et WMAP. En haut la carte de COBE (D'après Smoot et al 1992, ApJ 396, 1). En bas, la carte de WMAP (D'après Bennett et al 2003, ApJS 148, 97). Le gain en résolution et en sensibilité est spectaculaire et la similitude des deux cartes est remarquable, ce qui conforte la réalité des signaux.

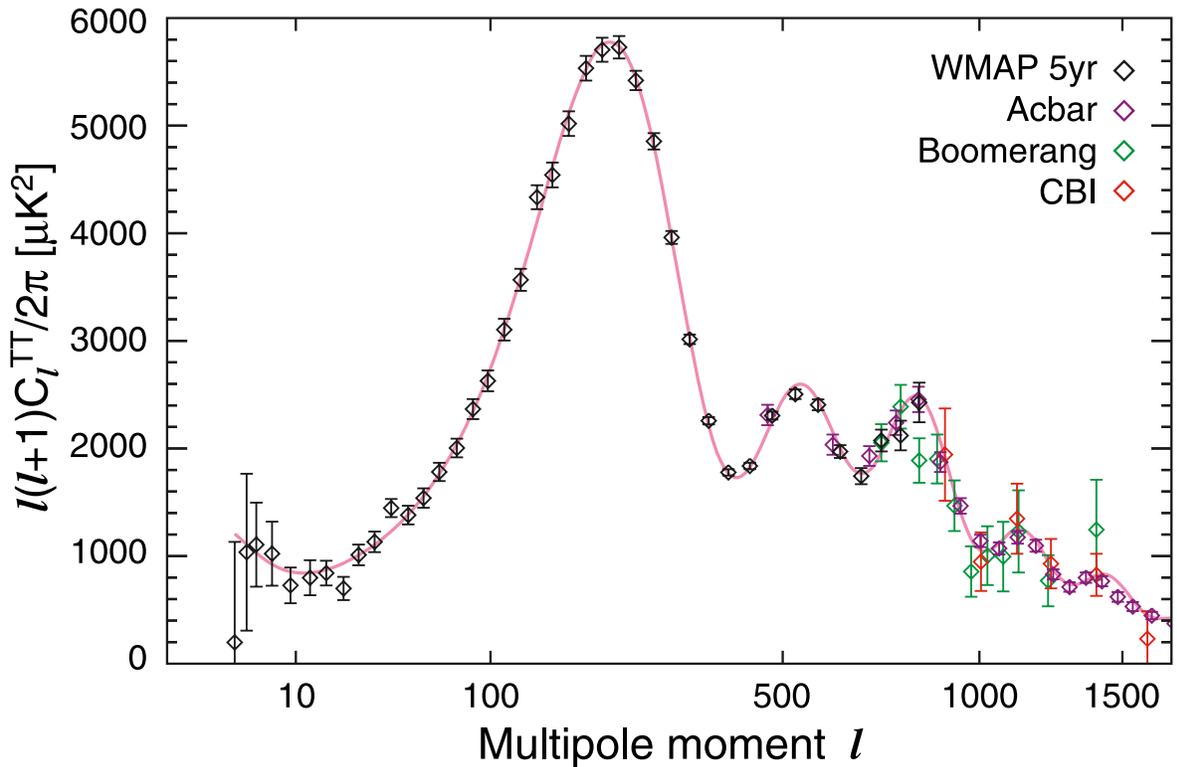


Figure 85: Mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique à différentes échelles: une synthèse des résultats obtenus avec WMAP-5 et les données des expériences interférométriques explorant les petites échelles, inaccessibles à WMAP. La courbe rouge est le meilleur ajustement correspondant au modèle de la Table 9. D'après Nolita et al 2009, ApJS 180, 306.

faible amplitude. Elles peuvent donc tous être décrites en se fondant sur la théorie linéaire des perturbations et donc par des processus physiques bien connus et un cadre théorique bien maîtrisé.

Comme l'illustrent les figures 82 et 83, l'observation du spectre des anisotropies du CMB sur l'ensemble des échelles contraint la plupart des paramètres, sans avoir recourt à un grand nombre d'autres observations. Ainsi, il existe aujourd'hui des arguments très forts en faveur d'un univers à courbure nulle par la position et l'amplitude du premier pics acoustique (voir la figure 85). La Figure 86 démontre par ailleurs que grâce à ces données, un grand nombre de scénarios cosmologiques peut être exclu et la physique de l'Univers primordial peut désormais être explorée via la cosmologie observationnelle. Les résultats les plus spectaculaires sont ceux de WMAP qui permettent de contraindre avec précision plusieurs paramètres simultanément. On espère donc que le satellite Planck fournira des résultats couvrant la totalité du ciel avec une résolution et une sensibilité exceptionnelle.

10.7 Synthèse

Les analyses combinées qui utilisent conjointement toutes les observations s'accumulent progressivement et dessinent un scénario qui semble produire un ensemble sans contradiction évidente. Toutefois, le grand nombre de paramètres qu'il est nécessaire de déterminer pour décrire les propriétés de l'Univers et son évolution est encore une limitation. Des dégénéscences subsistent, comme on peut le voir sur les figures 87, 90.

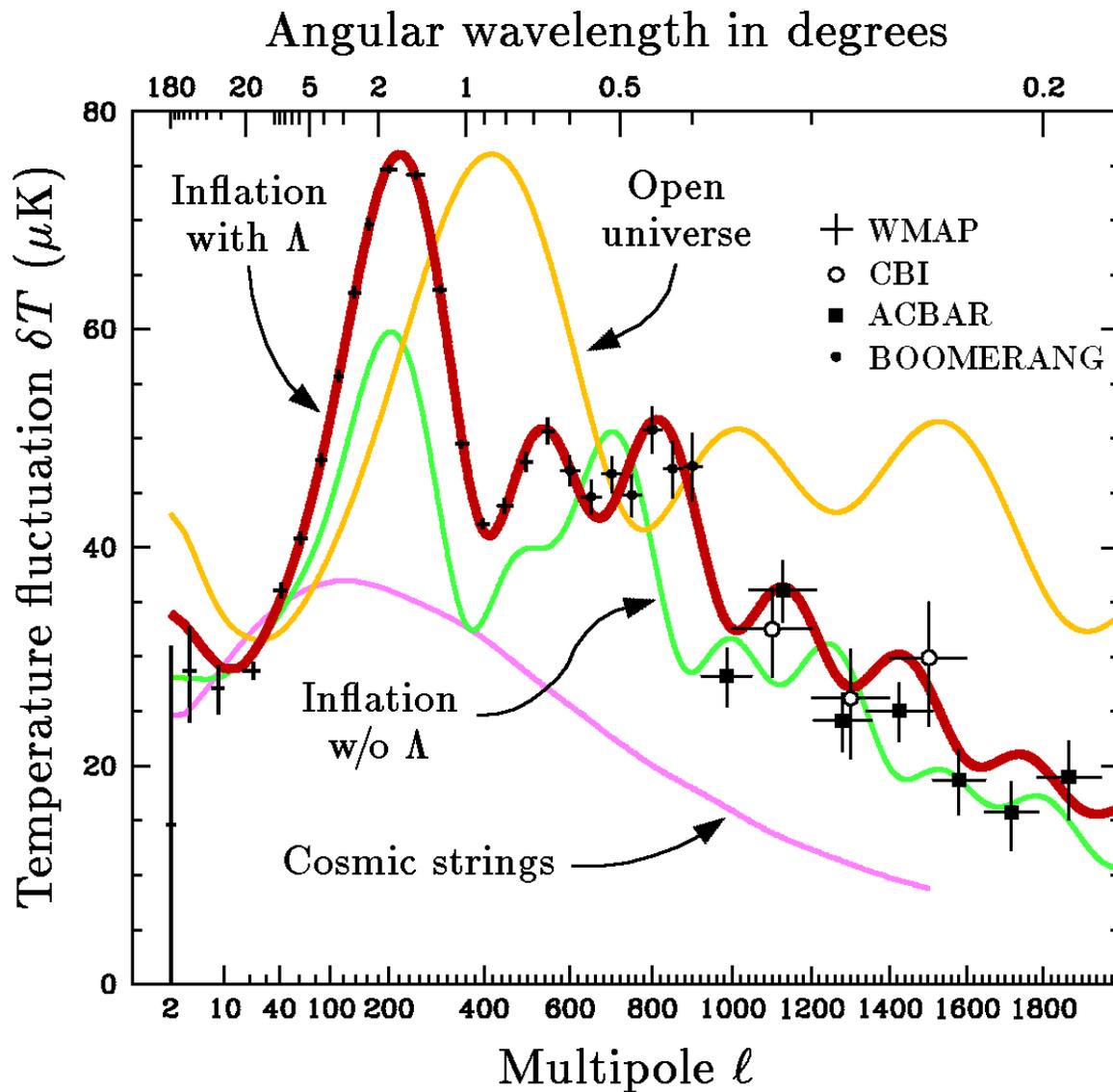


Figure 86: Comparaison des mesures d'anisotropies du CMB récentes avec les prédictions de quelques modèles théoriques. On remarque que le modèle ouvert ($\Omega_m \simeq 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$, en orange) et le modèle plat ($\Omega_k = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$, en vert) sont exclus. Le modèle avec une fraction de cordes cosmiques dominante ($\Omega_{string} > 0.5$, en magenta) est lui aussi incompatible avec ces données. D'après Guth et Kaiser 2005, Science 307, 884.

Description	Symbole	Valeur WMAP3 + COBE
Paramètre de Hubble	h	$0.73_{-0.03}^{+0.04}$
Densité totale	Ω_{tot}	$1.003_{-0.017}^{+0.013}$
Equation d'état de l'énergie sombre	w	$-0.97_{-0.09}^{+0.07}$ (95% CL)
Densité d'énergie du vide	Ω_{Λ}	$0.76_{-0.06}^{+0.04}$
Densité de baryon	$\Omega_b h^2$	$0.0223_{-0.009}^{+0.007}$
Densité de baryon	Ω_b	$0.042_{-0.005}^{+0.003}$
Densité de matière	$\Omega_m h^2$	$0.127_{-0.009}^{+0.007}$
Densité de matière	Ω_m	$0.24_{-0.04}^{+0.03}$
Densité de matière noire	$\Omega_{dm} h^2$	$0.105_{-0.010}^{+0.007}$
Densité de matière noire	Ω_{dm}	$0.20_{-0.04}^{+0.02}$
Densité de neutrino légers	$\Omega_{\nu} h^2$	< 0.007 (95% CL)
Densité de neutrino légers	Ω_{ν}	< 0.014 (95% CL)
Température du CMB (K) (COBE)	T_{cmb}	2.725 ± 0.001
Densité de photons CMB (cm^{-3}) (COBE)	n_{γ}	410.5 ± 0.5
Densité de rayonnement	$\Omega_{\gamma} h^2$	$(2.471 \pm 0.004) \times 10^{-5}$
Densité de rayonnement	Ω_{γ}	$(4.6 \pm 0.5) \times 10^{-5}$
Rapport baryon-sur-photon	$\eta = n_b/n_{\gamma}$	$4.7 \times 10^{-10} < \eta < 6.5 \times 10^{-10}$
Densité de baryon (cm^{-3})	n_b	$1.9 \times 10^{-7} < n_b < 2.5 \times 10^{-7}$
Fluctuation d'amplitude dans $8h^{-1}$ Mpc	σ_8	$0.74_{-0.05}^{+0.05}$
Normalisation du spectre de puissance (à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	A	$0.68_{-0.06}^{+0.04}$
Indice spectral scalaire (à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	n_s	$0.951_{-0.019}^{+0.015}$
Pente de l'indice spectral (à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	$dn_s/d \ln k$	$-0.055_{-0.035}^{+0.029}$
Rapport tenseur-sur-scalaire (à $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$)	$r = T/S$	< 0.55 (95% CL)
Redshift du découplage	z_{dec}	1089 ± 1
Epaisseur du découplage (FWHM)	Δz_{dec}	195 ± 2
Age de l'Univers (Gyr)	t_0	$13.7_{-0.2}^{+0.1}$
Age au découplage (kyr)	t_{dec}	379_{-7}^{+8}
Age à la réionisation (Myr, 95% CL)	t_r	-
Durée du découplage (kyr)	Δt_{dec}	118_{-2}^{+3}
Redshift de l'égalité matière-énergie	z_{eq}	3233_{-210}^{+194}
Profondeur optique à la réionisation	τ	0.09 ± 0.03
Redshift de la réionisation (95% CL)	z_r	≈ 11
Horizon acoustique au découplage ($^{\circ}$)	θ_A	0.598 ± 0.002
Distance diamètre angulaire du découplage (Gpc)	d_A	$14.0_{-0.3}^{+0.2}$
Echelle acoustique ($l_A \approx \pi/\theta_A$)	ℓ_A	301 ± 1
Horizon acoustique au découplage (Mpc) ($l_A \approx \pi/\theta_A$)	r_s	147 ± 2

Table 8: Le meilleur modèle déduit des observations de WMAP-3 uniquement. D'après Spergel et al 2007, ApJS 170, 377. Les paramètres associés à la valeur de T_0 se rapportent à la mesure du satellite COBE (Mather et al (1999), ApJ 512, 511). Pour illustrer les progrès la table suivante donne les résultats de WMAP-5 seules puis avec d'autres données combinées à WMAP-5 (table 9).

Symbole	Valeur WMAP-5 seul	Valeur WMAP-5+BAO+SN
h	$0.719^{+0.026}_{-0.027}$	0.701 ± 0.013
Ω_{tot}	$1.099^{+0.100}_{-0.085}$	1.0052 ± 0.064
w (supposé constant)	$-1.06^{+0.41}_{-0.42}$	$-0.972^{+0.061}_{-0.060}$
$\Omega_b h^2$	0.02273 ± 0.00062	0.02265 ± 0.00059
Ω_b	0.0441 ± 0.0030	0.0462 ± 0.0015
$\Omega_{dm} h^2$	0.1099 ± 0.0062	0.1143 ± 0.0034
Ω_{dm}	0.214 ± 0.027	0.233 ± 0.013
Ω_Λ	0.742 ± 0.030	0.721 ± 0.015
σ_8	0.796 ± 0.036	0.817 ± 0.026
n_s	$0.963^{+0.014}_{-0.015}$	$0.960^{+0.014}_{-0.015}$
t_0	$13.69 \pm 0.13 \times 10^9$ ans	$13.73 \pm 0.12 \times 10^9$ ans
z_{eq}	3176^{+151}_{-150}	3280^{+88}_{-89}
$d_A(z_{eq})$	14279^{+188}_{-191} Mpc	14172^{+141}_{-139} Mpc
z_{dec}	1090.51 ± 0.95	$1091.00^{+0.72}_{-139}$
$d_A(z_{dec})$	14115^{+188}_{-191} Mpc	14006^{+142}_{-141} Mpc
t_{dec}	380081^{+5843}_{-5841} ans	375938^{+3148}_{-3115} ans
$t_{reionis}$	$427^{+88}_{-65} \times 10^6$ ans	$432^{+90}_{-67} \times 10^6$ ans
$r = T/S$ (à $k_0 = 0.002$ Mpc $^{-1}$)	< 0.43 (95% C.L.)	< 0.20 (95% C.L.)
$dn_s/d \ln k$ (à $k_0 = 0.002$ Mpc $^{-1}$)	-0.037 ± 0.028	$-0.032^{+0.021}_{-0.020}$
$\Omega_\nu h^2$	< 0.014 (95% CL)	< 0.0065 (95% CL)
$\sum m_\nu$ (masses neutrinos)	1.3 eV (95% CL)	0.61 eV (95% CL)
$N_{\nu_{eff}}$	> 2.3	4.4 ± 1.5
$\tau(reionis)$	0.087 ± 0.017	0.084 ± 0.016
$z(reionis)$	11.0 ± 1.4	10.8 ± 1.4

Table 9: Paramètres des modèles les plus vraisemblables si l'on considère les données de WMAP-5 seules ou en les combinant avec les données BAO et SN. D'après Hinshaw et al 2009, ApJS 180, 225 et Komatsu et al 2009, ApJS 180,330.

10.7.1 Le modèle de concordance

Le modèle de concordance est fondé sur l'interprétation de l'ensemble des résultats acquis jusqu'en par le CMB, les SNIa, le programme HST-Céphéides, la nucléosynthèse primordiale et l'abondance des éléments légers, les grands relevés spectroscopiques de galaxies, les relevés d'amas de galaxies et ceux de cisaillement gravitationnel cosmologique. De ces observations, la comparaison aux modèles conduit aux paramètres fondamentaux $H_0 = 71$ km/s/Mpc, $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_\gamma = 8.35 \times 10^{-5}$ et $\Omega_k = 0$, d'où sont estimés tous les autres de la Table 4. Ce modèle demeure la référence à ce jour et peut être considéré comme la meilleure base de travail, pour des investigations plus approfondies.

Dans le scénario cosmologique qui se dessine, on peut constater avec satisfaction qu'il correspond remarquablement bien aux prédictions théoriques. Mais il montre aussi un univers qui, pour l'essentiel, serait dominé par 25% de matière noire et 70% d'énergie sombre... deux composantes dont nous ne connaissons ni la nature ni l'origine... Difficile d'affirmer dans ces conditions que nous avons compris les propriétés de notre univers.

On peut enfin construire un spectre de puissance tri-dimensionnel des fluctuations en combinant les informations disponibles de tous les relevés: CMB, amas de galaxies, relevés spectroscopiques des galaxies, weak lensing, distribution de la forêt Lyman- α . En faisant un certain nombre

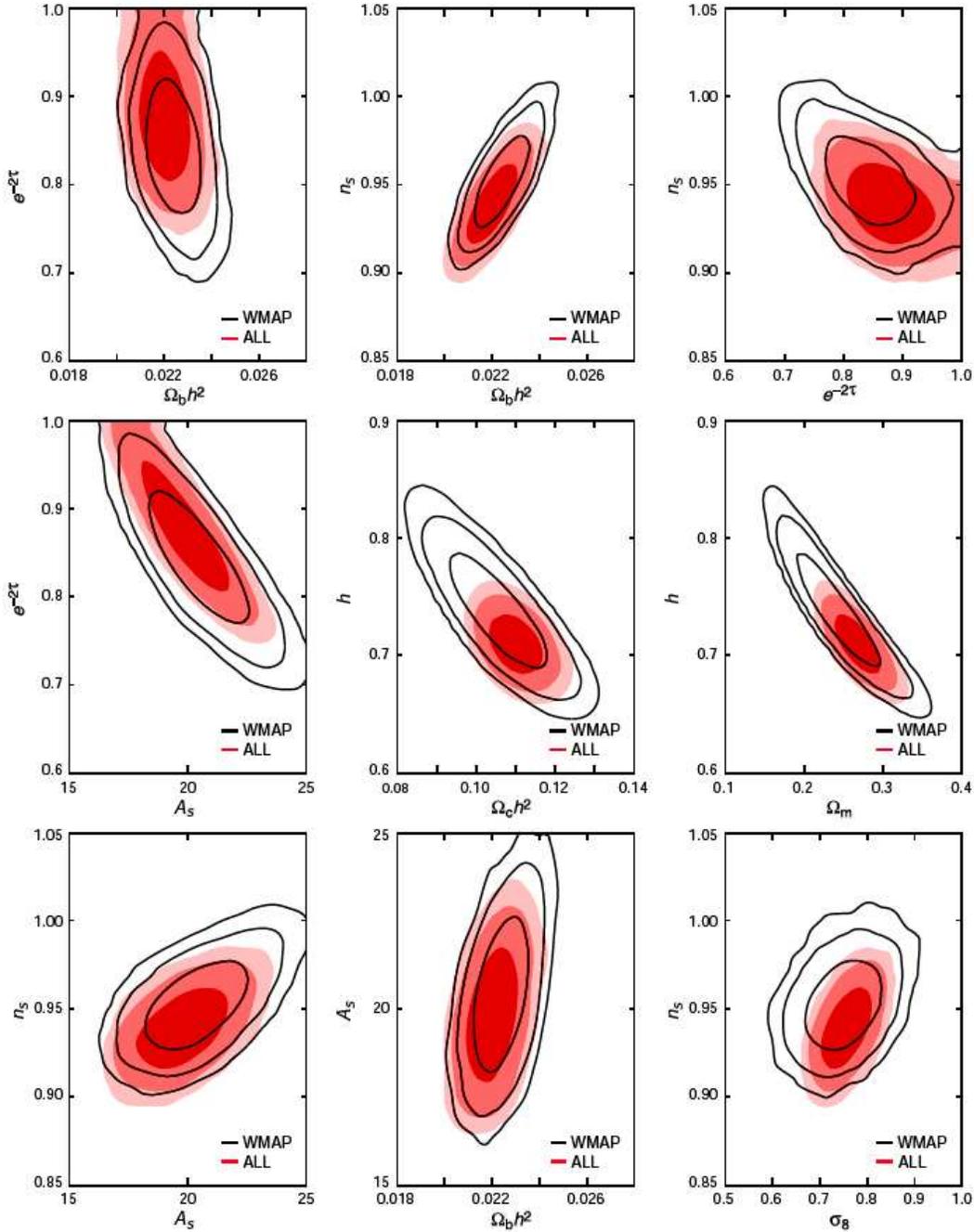


Figure 87: Détermination d'une série de paramètres cosmologiques par analyse multi-observations. Il s'agit d'une analyse statistique par maximum de vraisemblance à partir d'un modèle d'univers Λ CDM et un spectre primordial des fluctuations en loi de puissance. L'analyse utilise les données de WMAP-3 uniquement (contours noirs) puis, conjointement (zones colorées), les données des anisotropies du CMB (WMAP-3, ACBAR, BOOMERANG, CBI, VSA) des SNIa (HST/GOODS et SNLS), et des relevés spectroscopiques de galaxies 2dF et SDSS. Les définitions des paramètres cosmologiques montrés sur cette figure sont données dans la Table 8. D'après Spergel et al 2007, ApJS 170, 377.

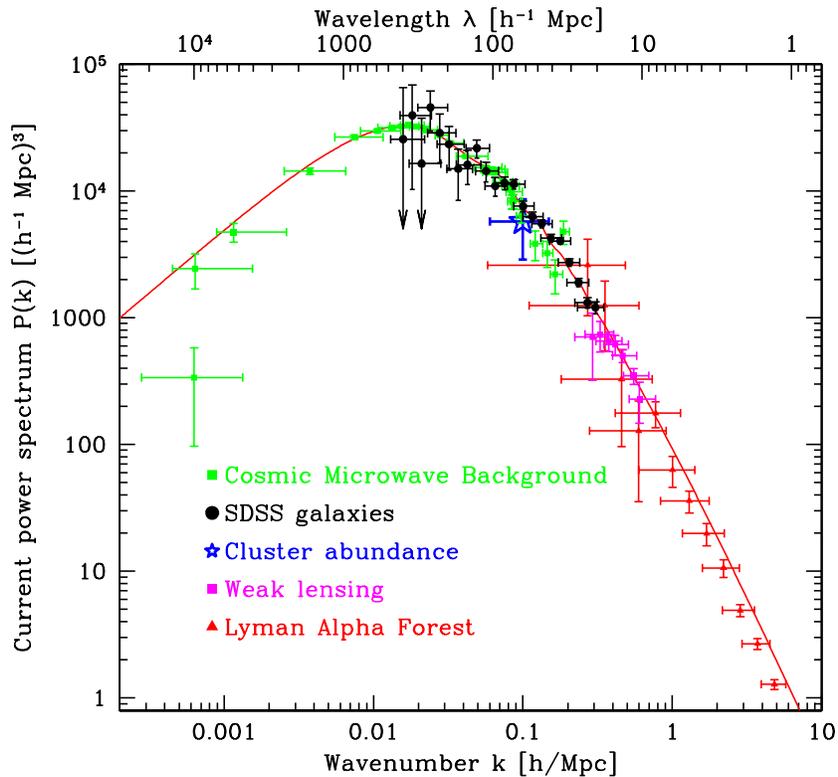


Figure 88: Une reconstruction complète du spectre de puissance tri-dimensionnel à $z = 0$. Cette figure est une synthèse qui prend en compte toutes les données mises à la dispositions des cosmologistes pour sonder le spectre de puissance. Chaque méthode sonde un intervalle d'échelle particulier ainsi qu'un domaine de redshift qui lui est propre. Cette figure synthétique résume de façon spectaculaire l'état de nos connaissances du spectre de puissance. Elle illustre aussi à quel point l'ensemble des observables conforte l'hypothèse d'une matière noire dominante froide. Cependant, aux petites échelles notamment, la reconstruction dépend sensiblement des hypothèses qui permettent de construire un modèle d'évolution non linéaire des structures. D'après Tegmark et al 2004, ApJ 606, 702.

d'hypothèses pour passer des données observées à la quantité de matière, une reconstruction par déprojection donne donc le spectre de puissance tri-dimensionnel à toutes les échelles. C'est ce qu'illustre la figure 88. Cette figure est assez impressionnante car elle montre un spectre qui correspond à ce que prédit un modèle d'univers avec les paramètres cosmologiques établis dans la section suivante: $\Omega_\Lambda = 0.7$ est $\Omega_m = 0.3$, où la matière noire froide domine largement (voir l'Annexe G de ce cours ou le cours d'E. Audit pour comprendre les relations entre spectre de puissance et modèles d'univers). Il faut cependant nuancer l'impression d'aboutissement que donne cette déprojection. Elle dépend d'hypothèses parfois fragiles concernant chaque type de données, tant pour le passage de l'observation à la matière que pour celui permettant la déprojection.

10.7.2 Inventaire du contenu en matière-énergie de l'Univers

L'ensemble des données astronomiques, des expériences d'astro-particule et de physique des hautes énergies, et les contraintes théoriques permettent de dresser un bilan du contenu en matière-énergie de notre univers relativement solide et exhaustif. Il est détaillé dans la Table 8. Il montre clairement que dans ce budget, la matière noire et l'énergie sombre sont les contributions dominantes, et de loin.

11 L'Univers noir

11.1 Propriétés et nature de l'énergie sombre

Si les données observationnelles les plus récentes visent encore à consolider le modèle de concordance, les relevés cosmologiques migrent progressivement vers des stratégies optimisées pour explorer dans le détail les paramètres caractérisant des propriétés de *l'énergie sombre* (dans son sens large: la source de l'accélération de l'expansion de l'Univers). C'est le cas par exemple des projets sols SDSS-III/BOSS (en cours), DES (2011), BigBOSS (2016), LSST (~ 2017), SKA (~ 2025), ou les projets spatiaux Euclid ou JDEM (~ 2018).

Parce que nous ne connaissons rien sur la nature de cette composante, les approches sont très empiriques. Elles se limitent à trois questions auxquelles pourraient répondre les observations astronomiques, éventuellement partiellement, par la mesure de quelques paramètres physiques simples:

1. quelle est sa contribution globale à l'énergie de l'Univers (Ω_X) ?
2. quelle est son équation d'état ($P = w_X \rho$) et la valeur de w_X ?; et enfin, en supposant une loi simplificatrice,
3. peut on savoir comment évoluent ses propriétés avec le temps ($w_X = w_0 + w_1(z)$) ?

La paramétrisation des modèles d'énergie sombre a l'avantage d'être générale et conservatrice car elle ne fait référence à aucun modèle théorique explicite. Néanmoins l'objectif de ces grands relevés cosmologiques est de comprendre la physique sous-jacente. Il co-existe donc alternative à l'exploration empirique qui part de la physique fondamentale. Cette voie construit des classes de théories décrivant sa nature profonde et ses propriétés. Il est alors possible de modéliser son comportement, de le suivre dans un scénario cosmologique intégrant l'histoire de l'expansion et celle de la formation des structures, puis d'en comparer les prédictions avec les observations astronomiques.

Les analyses cosmologiques les plus récentes qui utilisent conjointement les observations CMB, SNIa et BAO permettent aujourd'hui d'explorer des scénarios d'évolution temporelle des propriétés de l'énergie sombre (voir la figure 92). Cependant, comme le montrent les figures 90 et 91, toutes les observations dont on dispose à ce jour sont compatibles avec $w = -1$, donc avec une composante d'énergie sombre qui serait une constante cosmologique. Ce constat n'est pas démenti par l'accumulation de nouvelles données depuis 2003, notamment par

- la mesure des oscillations acoustiques des baryons (BAO, voir la figure 89 droite), dans le SDSS et le 2dF, qui modulent la forme du spectre de puissance de la distribution des galaxies sur des échelles de $100 h^{-1}$ Mpc,

Composante	Sous-composante	$\Omega_{\text{sous-total}}$	Ω_{total}
Energie sombre			0.72 ± 0.03
Matière noire			0.23 ± 0.03
Ondes gravitationnelles primordiales			$\leq 10^{-10}$
Baryons			0.045 ± 0.003
	Gaz intergalactique tiède	0.040 ± 0.003	
	Dont:		
	1. Gaz halos galactiques	0.024 ± 0.005	
	2. Gaz intergalactique	0.016 ± 0.005	
	Gaz intra-amas	0.0018 ± 0.0007	
	Etoiles de la séquence principale	0.00165 ± 0.00080	
	Naines blanches	0.00036 ± 0.00008	
	Etoiles à neutrons	0.00005 ± 0.00002	
	Trous noirs	0.00007 ± 0.00002	
	Objets sub-stellaires	0.00014 ± 0.00007	
	Gaz HI+HeI	0.00062 ± 0.00010	
	Gaz moléculaire	0.00016 ± 0.00006	
Résidus primordiaux			0.0010 ± 0.0005
	Rayonnement micro-onde cosmologique	$10^{-4.3 \pm 0.0}$	
	Neutrinos	$10^{-2.9 \pm 0.1}$	
Rayonnement secondaire			$10^{-5.7 \pm 0.1}$
	Rayonnement micro-onde des sources résolues	$10^{-10.3 \pm 0.3}$	
	Rayonnement IR lointain	$10^{-6.1}$	
	Rayonnement optique	$10^{-5.8 \pm 0.2}$	
	Rayonnement X- γ	$10^{-7.9 \pm 0.2}$	
	Rayonnement gravitationnel des objets compacts	$10^{-7.6 \pm 0.7}$	
Neutrinos stellaires			$10^{-5.5 \pm 0.5}$
Rayons cosmiques et champs magnétiques			$10^{-8.3 \pm 0.5}$

Table 10: Bilan du contenu en matière-énergie de notre univers, tel qu'il peut être établi à ce jour compte-tenu des observations. Les valeurs sont déterminées pour $h = 0.7$. Quelques unes sont incertaines, mais les ordres de grandeurs de chaque contribution sont relativement bien établis.

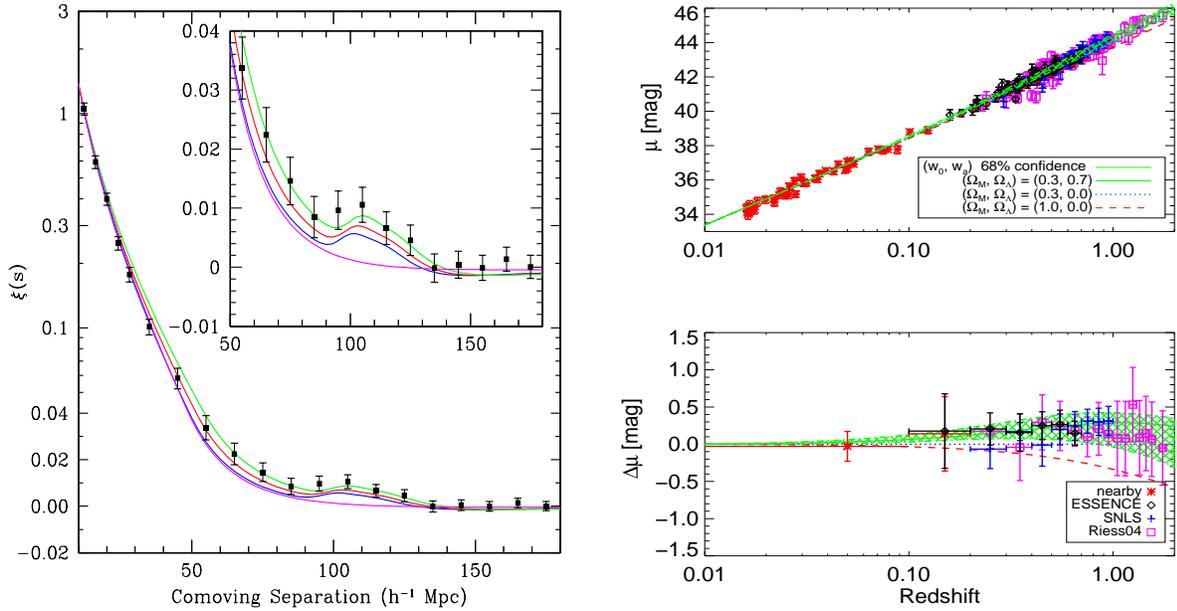


Figure 89: A droite : détection du pic produit par les oscillations acoustiques des baryons dans la structuration des galaxies brillantes rouges du SDSS. La figure montre la fonction de corrélation à deux des galaxies dans l'espace des redshifts. L'encadré interne est un zoom du pic acoustique. La détection est significative, comme le montre la ligne en magenta (pas de BAO). Les courbes correspondent aux prédictions théoriques des modèles Λ CDM pour $\Omega_m h^2 = 0.12$ (vert), $\Omega_m h^2 = 0.13$ (rouge) et $\Omega_m h^2 = 0.14$ (bleu) D'après Eisenstein et al 2005, ApJ 633, 560. A gauche: compilation des résultats des SNIa: ESSENCE, SNLS, les compilations des résultats antérieurs à SNLS (Reiss04) et les SNIa proches. La figure du haut montre le module de distance mesuré et comparé aux modèles ($\Omega_m = 0.3$; $\Omega_\Lambda = 0.0$) (courbe en pointillés bleus), ($\Omega_m = 1.0$; $\Omega_\Lambda = 0.0$) (courbe en tirets rouge) et une nappe verte montrant la zone permise à 68% de niveau de confiance dans un plan (w_0 ; w_a), où l'équation d'état a la forme $P_X = \rho_X w(z)$, avec $w(z) = w_0 + w_a (z/(1+z))$, pour un modèle à courbure nulle et ($\Omega_m = 0.3$; $\Omega_\Lambda = 0.7$). La figure du bas montre les résidus des mêmes modules de distance relativement au modèle de référence ($\Omega_m = 0.3$; $\Omega_\Lambda = 0.0$). D'après Wood-Vasey et al 2007, ApJ 666, 694.

- le Supernovae Legacy Survey (SNLS , le relevé de SNIa du CFHT Legacy Survey) et le programme SNIa ESSENCE, qui ont produit des nouvelles courbes de lumières de SNIa (voir la figure 89 gauche),
- les mesures de la distribution en redshift des amas de galaxies massifs,
- les mesures des premiers effets Sachs-Wolfe intégrés par corrélations croisées des cartes des anisotropies de WMAP avec celles de la distribution des galaxies d'avant plan des catalogues SDSS, 2dF, NVSS et 2MASS,
- et les relevés de cisaillement gravitationnel cosmologique, comme celui du CFHTLS avec MEGACAM (voir la figure 91).

Il est prématuré d'en conclure que l'énergie sombre est une constante cosmologique et qu'on peut abandonner des modèles moins conventionnels. Les données sont encore parcellaires et les sources d'erreurs et d'effets systématiques importants. Pour ces raisons, il n'a pas encore été possible d'investiguer en détails des modèles avec une évolution temporelle, $w_1(z)$ ce qui limite la portée des analyses actuelles. Comme on peut s'en douter cette option augmente

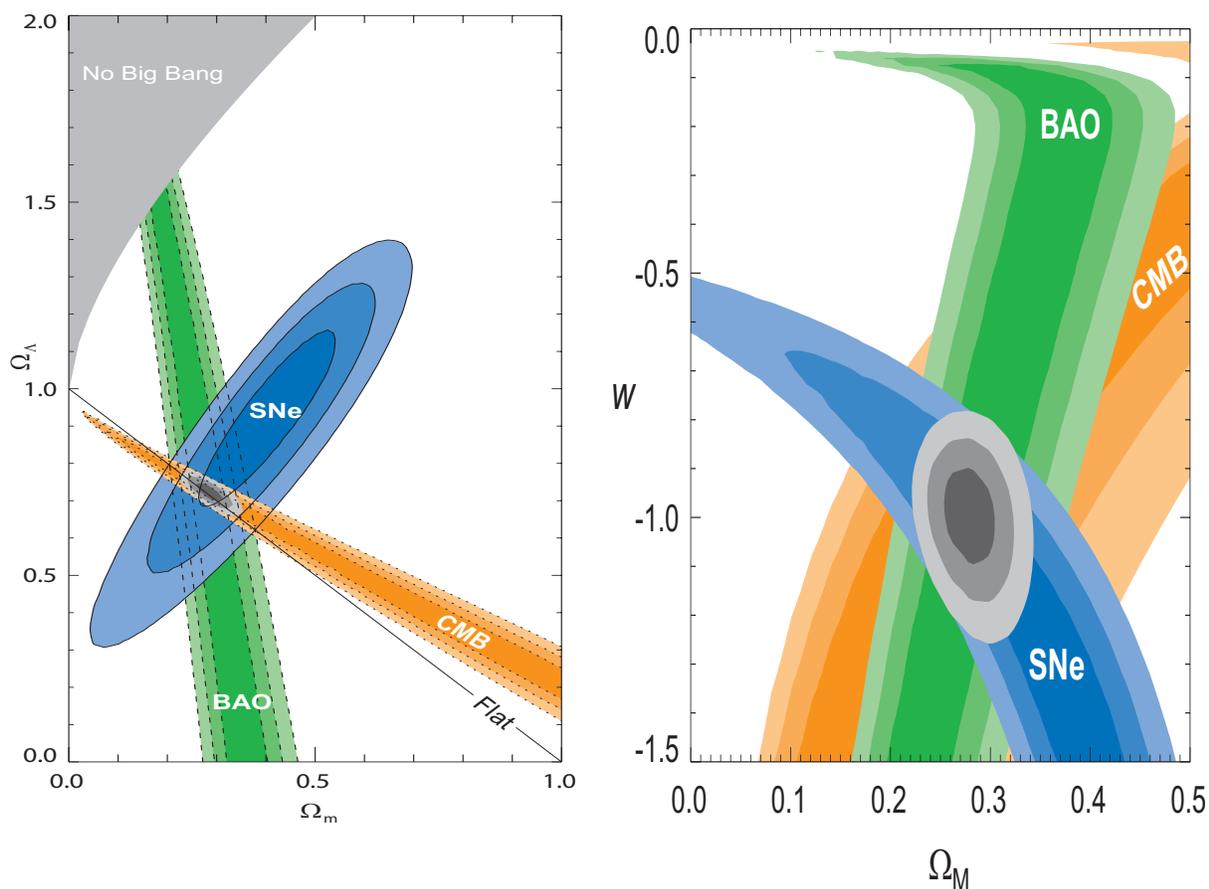


Figure 90: Visualisation des zones de paramètres contraintes individuellement et simultanément par les données CMB, SNIa et BAO. Les zones colorées illustrent clairement les degrés de dégénérescence qui limitent chaque type de sonde. D'après Kowalski et al 2008, ApJ 686, 749. Les contraintes dans le plan $\Omega_m - w$ supposent que w est indépendant du temps et un univers plat. Ensemble, ces données conduisent à $w = -0.926^{+0.051}_{-0.075}$.

significativement les dégénérescences.

Les modèles d'énergie sombre qui sont aujourd'hui parmi les bons candidats sont les suivants

- **Une constante cosmologique.** Introduite en 1917 par Einstein pour construire des univers statiques, elle fut rapidement mise à l'écart lorsque l'expansion fut avérée. L'idée fut réactualisée dans les années 1970-1980 lorsque les mesures de H_0 ont convergées vers de valeurs "hautes" impliquant dès lors un Univers beaucoup trop jeune par rapport à celui des amas globulaires. L'existence de galaxies et de quasars très lointains ainsi que les comptages profonds de galaxies confortaient cette tendance. Ces contradictions pouvaient être levée "simplement" par l'adjonction d'une constante cosmologique dans les équations de Friedmann. Mais ce sont les observations des courbes de lumières des SNIa en 1998 qui ont conduit à rediscuter sérieusement son existence pour la placer au coeur des modèles cosmologiques.

La question de l'origine physique de la constante cosmologique est donc posée. Un candidat naturel est le point zéro des fluctuations du vide des champs bosonique et fermionique. Malheureusement, pour des raisons théoriques son amplitude typique devrait être donnée

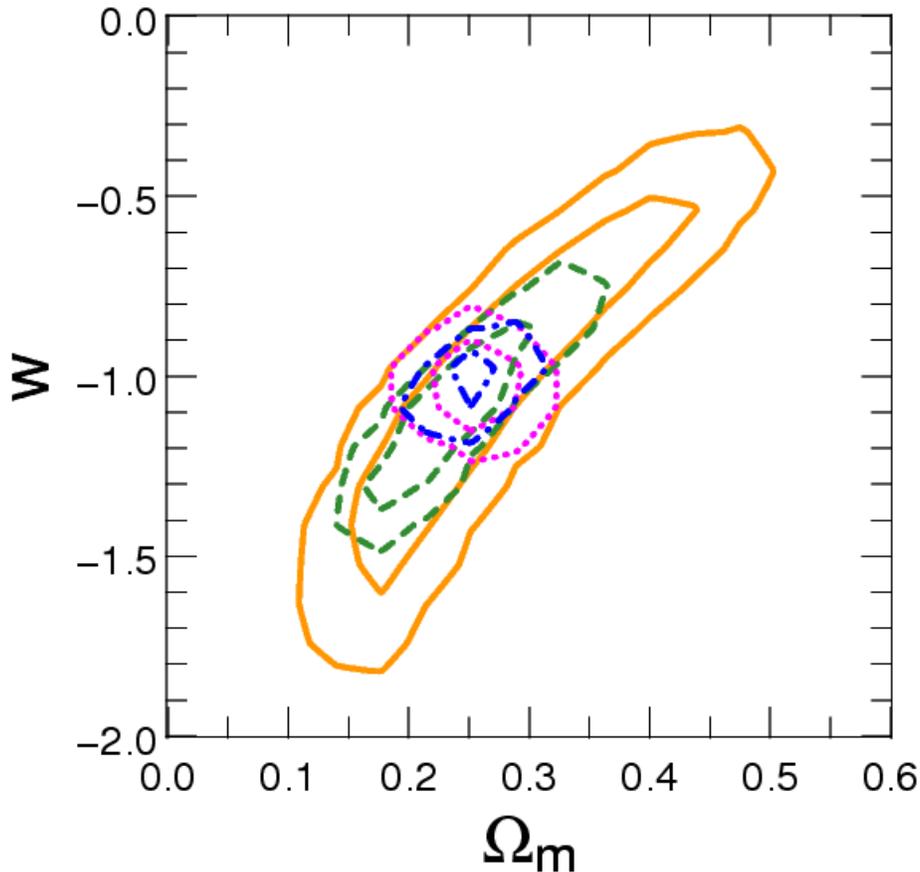


Figure 91: Mesure des propriétés de l'énergie sombre avec les données du combinées des effets de distorsion gravitationnelles (weak lensing: WL) du relevé CFHTLS "Wide", du relevé SNIa du SNLS et des anisotropies du CMB de WMAP-5. Les contours oranges représentent le CMB seul, les contours verts sont pour CMB+WL, les contours magenta sont pour CMB+SNLS et les contours bleus sont pour CMB+WL+SNLS. Le paramètre w est exploré en supposant qu'il est constant. Ensemble, ces données conduisent à $w = -1.012^{+0.079}_{-0.081}$. D'après Kilbinger et al 2009, A&A 497, 677.

par la masse de Planck et dans ce cas la valeur observée est totalement incompatible avec les prédictions:

$$\Lambda_{obs} \sim (10^{-3} \text{ eV})^4 = 10^{-120} \Lambda_{planck} \quad (479)$$

La théorie Supersymétrique permet de régler cette contradiction d'une façon élégante car les contributions bosoniques et fermioniques s'y annulent exactement. Mais même dans ce cas, des limites expérimentales fournies par la non-détection de la Supersymétrie aujourd'hui imposent que Λ_{obs} est au moins 10^{60} fois trop faible. Des arguments similaires concernant la théorie QCD conduisent à des problèmes identiques, avec Λ_{obs} au moins 10^{41} fois trop faible.

A ce jour, il n'existe donc pas de théorie de la physique des particules qui puissent expliquer naturellement l'origine d'une constante cosmologique ayant pour valeur $\Lambda \simeq 0.7$.

- **Energie sombre dynamique.** Il s'agit des modèles avec une densité d'énergie sombre qui varie dans le temps et dans l'espace. Ils sont aussi représentés par une équation d'état $P = \omega\rho$, mais avec $\omega \neq -1$ et/ou $\omega = \omega(z)$. Parmi les nombreux modèles, quelques uns font l'objet d'études plus approfondies:

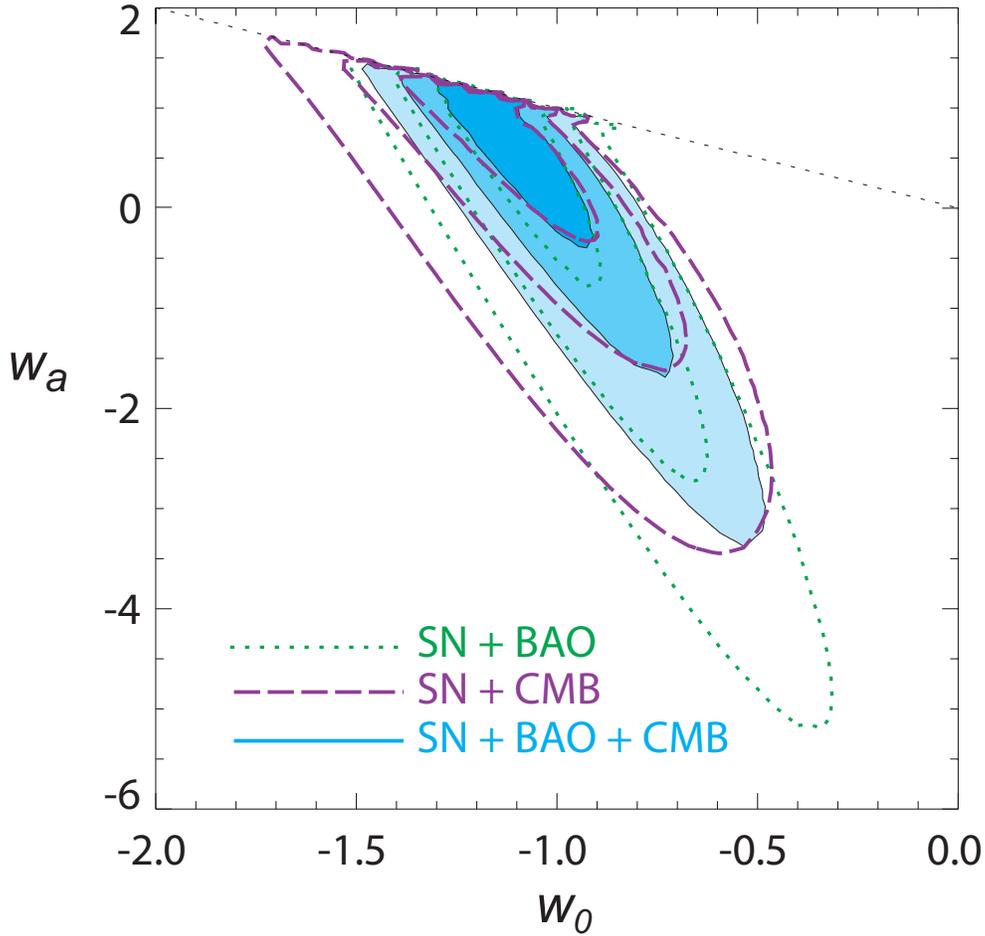


Figure 92: Une tentative de contraindre un terme d'évolution de l'équation d'état de l'énergie sombre à partir d'une analyse conjointe des données CMB, SNIa et BAO. Les zones de confiance en bleu dans le plan $(w_0; w_a)$ sont pour un modèle où l'équation d'état a la forme $P_X = \rho_X w(a)$, avec $w(a) = w_0 + w_a(1 - a)$ et un univers nul et ($\Omega_m = 0.3$; $\Omega_\Lambda = 0.7$). La ligne diagonale indique $w_0 + w_a = 0$. D'après Kowalski et al 2008, ApJ 686, 749 et Frieman et al 2008, ARAA 46, 385.

- **Modèles de quintessence.** Dans ces modèles, on suppose que le vide actuel est un état transitoire vers le vrai vide quantique qui serait donné par un champ scalaire, choisi de façon appropriée. Ces modèles impliquent une évolution temporelle de w pouvant en particulier être représentée par une équation d'état effective de la forme

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \left(1 - \frac{R(t)}{R_0} \right) = \omega_0 + \omega_1 (1 - a) , \quad (480)$$

et semblent de bon candidats pour l'énergie sombre.

- **Défauts topologiques.** Ces défauts sont créés pendant des transitions de phase de l'Univers primordial. En particulier, des cordes cosmiques et des murs de domaines y sont créés, et il se trouve que ces défauts ont des équations d'état $P = -1/3$ et $P = -2/3$, respectivement. Les murs de domaines, avec un ω proche de -1 , pourraient donc constituer un candidat intéressant. Mais à ce jour aucune donnée observationnelle ou expérimentale ne conforte solidement cette hypothèse.
- **Gaz de Chaplygin.** Ces modèles postulent l'existence d'une énergie sombre dont

l'équation d'état est de la forme

$$P = -A\rho^{-\alpha} \quad (481)$$

et conduisent à une densité de la forme

$$\rho = \left(A + B \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3(1+\alpha)} \right)^{1/(1+\alpha)} \quad (482)$$

Elle permet donc de reproduire une énergie sombre qui se comporte comme de la matière noire à haute densité (*i.e.* $P = 0$) et comme une constante cosmologique à basse densité. Bien que l'idée intéressante qu'un tel gaz expliquerait à la fois la matière noire et l'énergie sombre semble aujourd'hui exclue, ce gaz reste encore un bon candidat pour l'énergie sombre.

– **Fantômes et reflets.** Ces modèles sont construits pour des équations d'état $\omega < -1$. Ils ont la particularité d'avoir une densité d'énergie qui croît avec l'expansion l'Univers. Ils posent cependant de sérieux problèmes théoriques pour la physique.

- **Gravitation modifiée.** Stricto-sensu il ne s'agit pas de proposer une composante d'énergie sombre dynamique mais de modifier les lois de la gravitation à grande échelle. Parmi ces modèles, on compte la théorie de Brans-Dicke ou les théories branaires avec extra-dimensions. C'est une option alternative qui du point de vue de la physique fondamentale est aussi attrayante que l'énergie sombre.

11.2 Nature de la matière noire

En dépit des incertitudes sur la mesure des masses des systèmes, les courbes de rotation plates des galaxies spirales et les arcs gravitationnels dans les amas de galaxies sont des preuves convaincantes qu'il existe une fraction de la matière qui n'émet aucun rayonnement. Les propriétés du spectre de puissance des fluctuations de densité tracées par les marqueurs de ses propriétés statistiques (distribution des galaxies, distorsions gravitationnelles, anisotropies du fond diffus cosmologique) apportent aussi de solides arguments qui confortent l'hypothèse de la matière noire (voir la figure 88 qui montre les données comparées au spectre Λ CDM). La matière noire ne se manifeste donc que par ses effets gravitationnels. L'ensemble de ces données semble même indiquer que cette matière noire serait plutôt "froide" (Cold Dark Matter) que "chaude" (Hot Dark Matter) ou "tiède" (Warm Dark Matter). La figure 93 illustre pourquoi nous pouvons tirer des conclusions grossières sur la nature de la matière noire en reconstruisant le spectre, comme par exemple en sondant la forêt Ly_α .

Cependant, seule une preuve directe établie sur une détection révélant son existence et ses propriétés pourrait apporter aux physiciens l'ultime argument. La nature de la matière noire est donc une clef fondamentale de l'énigme et un objectif prioritaire de recherche. Cette découverte ouvrirait aussi le champ à toute une nouvelle physique, comme pour l'énergie sombre.

11.2.1 Matière noire ou Modified Newtonian Dynamics?

Si la recherche de la nature de la matière noire s'avérait infructueuse, il faudrait s'interroger sur la validité de nos interprétations des phénomènes et de notre compréhension des processus physiques en action dans la physique extragalactique et dans ceux des systèmes gravitants. Il existe une voie alternative fréquemment discutée dans la littérature. Elle consiste à rejeter

Modèle	Nature	Equation d'état/ w	Effets sur l'expansion	Paramètres sensibles
Plat + Ω_λ	Constante cosmologique	$w = -1$	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + (1 - \Omega_m)$	Ω_m
Ω_λ	Constante cosmologique	$w = -1$	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{(1 - \Omega_m - \Omega_\lambda)}{a^2} + \Omega_\lambda$	Ω_m, Ω_λ
Plat + w	Energie sombre	$P = w\rho$	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{(1 - \Omega_m)}{a^{3(1+w)}}$	Ω_m, w
w	Energie sombre	$P = w\rho$	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_x}{a^{3(1+w)}}$	Ω_m, Ω_x, w
Plat + $w(a)$	Energie sombre	$P = w(a)\rho,$ $w(a) = w_0 +$ $w_a(1 - a)$	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} +$ $\frac{(1 - \Omega_m)}{\exp\left(3 \int_a^1 \frac{1+w(a')}{a'} da'\right)}$	Ω_m, w_0, w_a
DGP	Brane gravitation	-	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_k}{a^2} +$ $\left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_{rc}} + \sqrt{\Omega_{rc}}\right)^2$ $\Omega_m = 1 - \Omega_k - 2\sqrt{\Omega_{rc}(1 - \Omega_k)}$	Ω_k, Ω_{rc}
Cardassien polytropique modifié (plat)	Brane ou Matière noire en self-interaction	-	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} \times$ $\left(1 + \frac{(\Omega_m^{-q} - 1)}{a^{3q(n-1)}}\right)^{\frac{1}{q}}$	Ω_m, q, n
Gaz de Chaplygin	Gaz de Chaplygin généralisé	$P = -A\rho^{-\alpha}$ $A > 0, P > 0$	$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_k}{a^2} +$ $(1 - \Omega_k) \times$ $\left(A + \frac{(1 - A)}{a^{3(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$	Ω_k, A, α

Table 11: Caractérisation et paramétrisation de l'effet sur l'accélération de l'Univers de quelques modèles d'énergie sombre, parmi les plus discutés dans la littérature. $a = R(t)/R_0$. DGP signifie Dvali, Gabadadze, et Porrati.

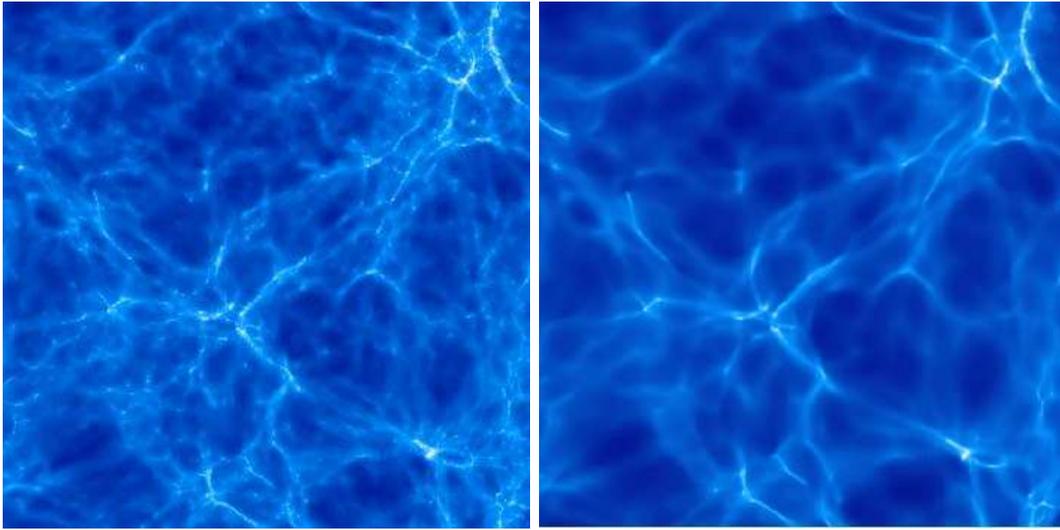


Figure 93: Un exemple d’exploration grossière des propriétés de la matière noire via la forêt Ly α . Les deux figures montrent des simulations numériques hydrodynamique pour un modèle CDM (à gauche) et WDM (à droite). On voit clairement que le modèle WDM a moins de structures aux petites échelles. C’est le résultat du *free streaming*. Ce phénomène peut être directement testé via les sondages des propriétés de la forêt Ly α . D’après Peacock et al 2006, ESA-ESO Working Groups Report No. 3 on Fundamental Cosmology.

l’hypothèse d’une matière noire et à postuler que notre théorie de la gravitation est (partiellement) inexacte. Les théories de type MODified Newtonian Dynamics (MOND) font partie de ces voies qui font l’objet d’une attention particulière, bien qu’elles ne soient pas encore fondées sur une base théorique solide.

Le modèle MOND postule que la forme de l’accélération gravitationnelle subie par une particule sous l’effet d’un champ gravitationnel Newtonien standard $-\nabla\Phi_N$ prend la forme

$$\mu\left(\frac{|\mathbf{a}|}{\mathbf{a}_0}\right)\mathbf{a} = -\nabla\Phi_N \quad (483)$$

où μ est une fonction continue, positive et monotone. Lorsque cette fonction vaut exactement $\mu = 1$, le modèle MOND rejoint la gravitation standard. De fait, μ converge asymptotiquement vers $\mu = 1$. a_0 est une constante naturelle valant environ $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. C’est Milgrom qui le premier a proposé ce modèle pour tenter d’expliquer les courbes de rotation plates des galaxies spirales sans recourir à l’hypothèse d’une matière noire.

Tout récemment, MOND a été confronté à des résultats surprenants concernant un amas de galaxies qui lui posent quelques difficultés. L’amas de galaxies montré sur la figure 94 est le problème. L’image de l’émission du gaz X à droite (zones colorées) ne coïncide pas avec les iso-contours de densité de masse reconstruits par les analyses des distorsions gravitationnelles (contours en vert) ou par l’analyse des arcs gravitationnels. Un tel désaccord s’explique dans l’hypothèse d’existence de matière noire, car la matière baryonique peut éventuellement ne pas suivre la distribution de matière noire. Par contre, c’est en contradiction avec les MOND puisque seule la matière baryonique existe. Pour MOND, la matière ne peut donc pas se trouver ailleurs que dans les zones colorées et donc la carte de distorsion gravitationnelle devrait aussi être centrée sur la carte X. Avec ce type d’observation, nous avons peut être trouvé une preuve empirique directe de l’existence de la matière noire. Ce cas est si important qu’il est cependant préférable de ne pas se précipiter, et de le soumettre à l’épreuve des critiques et de modèles de

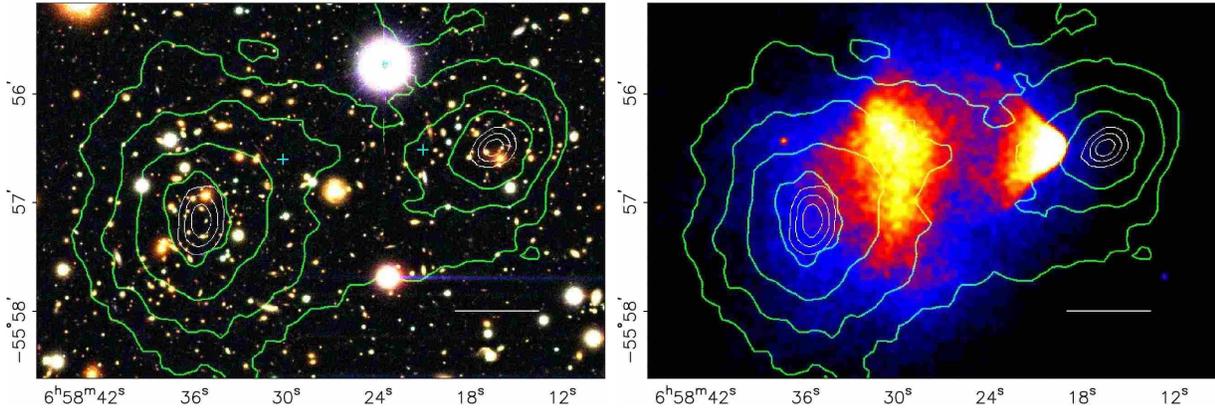


Figure 94: Comparaison des cartes de distribution des baryons (lumière des galaxies ou du gaz chaud X) et de la matière totale (distorsion gravitationnelle) de l’amas de galaxies 1E 0657-558 ou ”Bullet Cluster”. Le point frappant de cet amas c’est la localisation massive du plasma de baryons au centre de la carte, alors que la matière totale, révélée par les distorsions et des arcs gravitationnels, montrent clairement qu’elle est localisée dans deux sous-systèmes décentrés. Dans un modèle MOND où la matière noire n’existe pas, ce n’est pas possible: la matière est uniquement baryonique et c’est donc le plasma, qui est la contribution dominante de baryons des amas de galaxies, qui en indique la localisation et la distribution. La différence visible pour le Bullet Cluster pourrait donc constituer une première indication observationnelle directe en faveur de l’existence de matière noire, contre l’hypothèse MOND. (D’après Clowe et al 2006, ApJ 648, L109).

MOND plus élaborés. La réponse est donc encore incertaine et ces données font actuellement l’objet de discussions intéressantes. Ce type d’investigation trace néanmoins une route à suivre pour aborder le problème de la matière noire à partir d’observations astronomiques.

11.2.2 Nucléosynthèse primordiale et nécessité d’une composante de matière exotique

Selon la nucléosynthèse primordiale (voir la Section suivante), la fraction de baryons peut s’exprimer sous la forme

$$\Omega_B = 0.0035 \eta_{10} h^{-2} \left(\frac{T}{2.7} \right)^3, \quad (484)$$

où

$$\eta_{10} = 10^{10} \frac{n_B}{n_\gamma}, \quad (485)$$

et l’abondance en Hélium peut s’écrire

$$Y = 0.261 - 0.018 \log \left[10^5 \frac{n_D + n_{3\text{He}}}{\text{H}} \right] + 0.014 [N_\nu - 3] + 0.014 [\tau_{1/2} - 10.6], \quad (486)$$

où $\tau_{1/2}$ est la durée de vie du neutron en minute, N_ν est le nombre d’espèces de neutrinos (d’après les expériences du LEP, il n’en existe que 3).

Le rapport baryon sur photon, η_{10} , est contraint par les observations, notamment par les mesures d’abondance du ${}^7\text{Li}$ dans les étoiles de faible métallicité. Avec les mesures actuelles ces limites sont les suivantes

$$1.2 \leq \eta_{10} \leq 6.4 \quad . \quad (487)$$

$$0.004 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.025 \quad (488)$$

Si l'on considère l'intervalle le plus compatible avec l'abondance des éléments légers, $\eta_{10} = 4.1$, alors,

$$\Omega_B h^2 = 0.015 . \quad (489)$$

Si l'on considère alternativement celle, indépendante, obtenue avec les données de WMAP-5 (voir la Table 9), alors

$$\Omega_B h^2 = 0.023 . \quad (490)$$

Donc, deux importantes et solides conclusions peuvent être tirées, sachant que $h \simeq 0.7$:

1. comme $\Omega_{lumineux} = \Omega_{galaxie} + \Omega_{gaz} = 0.007$, il doit exister des baryons non lumineux;
2. comme $\Omega_m > 0.1$, il doit exister de la matière non baryonique.

11.2.3 Les candidats possibles de matière noire

La Table 6 et la figure 72 montrent clairement une tendance du rapport M/L à croître avec la masse et la dimension de la structure. Il semble donc que la distribution de la matière noire et peut être sa nature dépendent de l'échelle. Comme on le verra par la suite, l'abondance de baryon prédite par la nucléosynthèse primordiale peut marginalement rendre compte de la matière invisible contenue dans les halos des galaxies mais n'est pas compatible avec le Ω_m déduit des mesures aux plus grandes échelles. La matière noire est donc vraisemblablement en majorité de nature non-baryonique (c'est à dire que ses propriétés différentes de celles de nos protons et neutrons¹⁶).

On peut classer la matière noire en trois grandes catégories qui sont différenciées selon leur température: la *matière noire froide* (CDM), qui comprend en particulier les candidats baryoniques, la *matière noire tiède* (WDM) et la *matière noire chaude* (HDM). Il existe aussi une composante dite matière noire volatile correspondant aux particules à désintégration rapide. La Table 13 résume ces candidats.

Les observations et les expériences en laboratoire peuvent apporter des contraintes intéressantes qui limitent les candidats possibles. Les expériences de microlentille gravitationnelle permettent de tester les objets compacts baryoniques, comme les Jupiters, les naines brunes, les naines blanches (expériences EROS, MACHOs, OGLE, AGAPE). Les observations continues des nuages de Magellan ont permis de détecter un certain nombre d'événements à relativement longue durée qui doivent correspondre à des objets compacts d'environ $0.5 M_\odot$. Par contre aucun phénomène à courte durée n'a encore été détecté.

Des suivis EROS et MACHO (cf. figure 95, gauche) on déduit que, si le halo des galaxies est proche d'une sphère isotherme, des candidats objets compacts de masse entre $2 \times 10^{-7} M_\odot$ et $1 M_\odot$ ne peuvent contribuer à plus de 25% à la masse du halo de matière noire de la Galaxie. Par ailleurs, les expériences MACHO excluent les candidats de $1 M_\odot$ à $30 M_\odot$. Enfin, les expériences sur la statistique des étoiles binaires dans le halo rejettent tous les candidats de masse supérieure à $200 M_\odot$, alors que les études de dynamique des disques permettent d'exclure les trous noirs de masse supérieure à $10^7 M_\odot$ dans le halo. La figure 95 (droite) fait une synthèse de ces contraintes.

On peut étendre ces méthodes aux effets transitoires de microlentille gravitationnelle produits par d'hypothétiques trous noirs extra-galactiques. C'est donc aussi une méthode directe pour sonder la distribution de matière invisible compacte inter-galactique. Cependant, en pratique

¹⁶Dans le contexte des discussions sur la matière noire, les électrons sont fréquemment inclus dans cette composante baryonique, même si ce ne sont pas des baryons. Le terme est donc assez générique

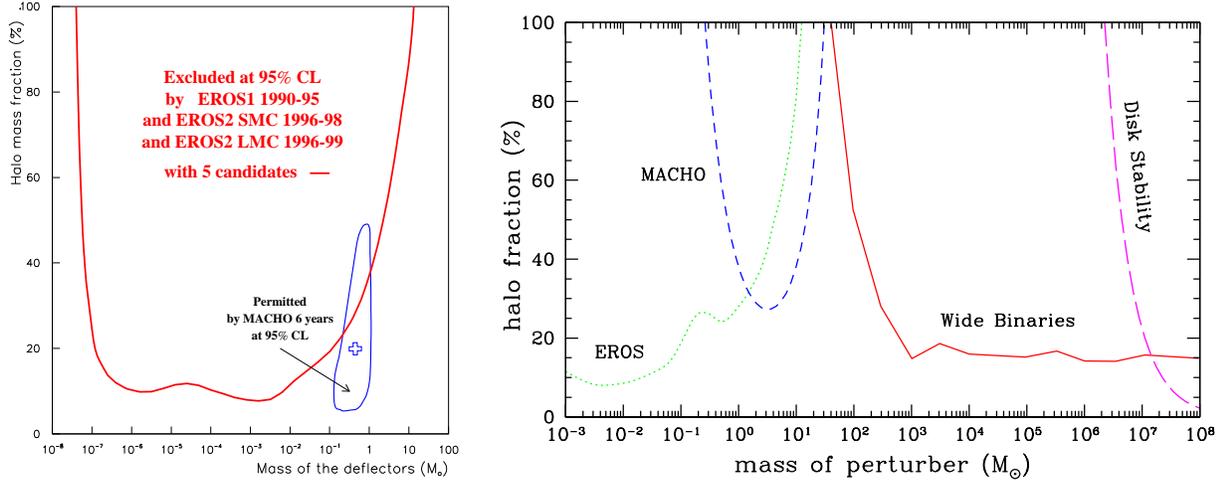


Figure 95: A gauche: diagramme d'exclusion définissant l'intervalle de masse et la fraction du halo composée de MACHOs. Les figures montrent les zones permises à la fois par les expériences MACHOs et EROS. L'absence d'événements à courte période restreint fortement la région des petites masses. Le domaine possible est celui sous la ligne d'exclusion en rouge. La composante baryonique sous forme d'objets compacts est donc loin de rendre compte de la matière noire dans les galaxies et a fortiori dans l'Univers. D'après Milsztajn, Lasserre et la collaboration EROS 2001, Nuc. Phys. B 91, 413. A droite: un bilan des contraintes sur la fraction d'objets compacts du halo de la Galaxie d'après les analyses de microlentille gravitationnelle, de statistique des binaires, et d'analyse dynamique du disque de la Galaxie. D'après Yoo et al 2004, ApJ 601, 311.

ce sont des expériences très longues et difficiles qui, dans le cas de trous noirs inter-galactiques, demandent des suivis sur plus de 10 ans.

Les candidats exotiques à la matière noire sont très nombreux. Parmi les plus sérieux on compte le neutrino massif, l'axion et les WIMPs.

- **Matière noire chaude: le neutrino** est le meilleur candidat pour la matière noire chaude, en supposant qu'il puisse être considéré comme de la matière noire. En fait, le neutrino existe, et comme les oscillations des neutrinos solaires démontrent qu'il a une masse, la matière noire chaude existe. La question est donc de savoir combien, combien d'espèces, quelle est leur masse et que vaut Ω_ν .

La contribution des neutrinos la densité actuelle de l'Univers est relativement bien comprise et vaut:

$$n_{\nu 0} = \frac{3}{4} \frac{4}{11} n_{\gamma 0} = 117 \text{ neutrinos.cm}^{-3} . \quad (491)$$

Le coefficient (3/4) étant le rapport du nombre de degrés de liberté du photon relativement au neutrino. Le rapport (4/11) provient de la perte d'une fraction de neutrino par annihilation e^+e^- lorsque la température de l'Univers a atteint celle de la masse e^+e^- .

Sachant que la densité de l'Univers est $\Omega_m \rho_c$ et que

$$\rho_c = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g.cm}^{-3} = 10.5 \times 10^3 h^2 \text{ eV.cm}^{-3} , \quad (492)$$

la contribution à la densité d'un neutrino de masse m_ν serait

$$F_\nu = \frac{m_\nu n_\nu}{10.5 \times 10^3 \Omega_m h^2} = \left(\frac{m_\nu}{90 \text{ eV}} \right) \frac{1}{\Omega_m h^2} . \quad (493)$$

Données	Auteur	Masse des neutrinos
2dF	Elgaroy et al (2002)	$\sum m_\nu < 1.8 \text{ eV}$
WMAP-3+Ly α +SDSS	Seljak et al (2004)	$\sum m_\nu < 0.17 \text{ eV}$
WMAP-3 +BAO+SNIa	Komatsu et al (2005)	$\sum m_\nu < 0.67 \text{ eV}$
WMAP-3 seul	Fukugita et al (2006)	$\sum m_\nu < 2.0 \text{ eV}$
CMB + 2dF	Sanchez et al (2005)	$\sum m_\nu < 1.2 \text{ eV}$
CMB+BAO+LSS+SNIa	Goobar et al (2006)	$\sum m_\nu < 0.62 \text{ eV}$
WL[CFHTLS-T01+autre]+WMAP-5+SNIa	Li et al (2008)	$\sum m_\nu < 0.47 \text{ eV}$
WL[CFHTLS-T03]+WMAP5+SNIa	Tereno et al (2008)	$0.03 < \sum m_\nu < 0.54 \text{ eV}$
WL[CFHTLS-T01+autre]+SNIa+BAO+ RAG	Gong et al (2008)	$\sum m_\nu < 0.80 \text{ eV}$
WMAP-5 +BAO+SNIa	Komatsu et al (2008)	$\sum m_\nu < 0.61 \text{ eV}$
WL[CFHTLS-T03]+WMAP5+SNIa+BAO	Ichiki et al (2009)	$\sum m_\nu < 0.54 \text{ eV}$

Table 12: Contraintes sur les masses des neutrinos par les analyses conjointes de relevés cosmologiques. WL signifie "Weak Lensing" et se rapporte aux distorsions gravitationnelles par les grandes structures. Ly α se rapporte au spectre de puissance reconstruit avec les grandes structures tracées par les nuages de la forêt Ly α . CMB signifie WMAP+d'autres expériences de mesure d'anisotropies du CMB. LSS signifie 2dF+SDSS. RAG signifie l'évaluation relatif des âges de galaxies passives (comme les galaxies elliptiques).

Les recherches actuelles de neutrinos atmosphériques ou de neutrinos solaires semblent indiquer que

$$F_\nu \ll 1 . \quad (494)$$

Le spectre de puissance de la distribution des galaxies aux grandes échelles et la découverte de galaxies à très grand décalage spectrale s'opposent aussi à l'hypothèse que la matière noire chaude contribue majoritairement à la composante matérielle de l'Univers. En effet, leur grande vitesse leur permet de s'échapper rapidement des fluctuations de petite échelle ce qui tend à tuer les fluctuations de masse inférieures à $10^{15} M_\odot$. Ainsi, le processus de formation des galaxies à partir des fluctuations aux petites échelles est fortement ralenti et les galaxies ne parviennent pas à ce former rapidement. L'existence de galaxies à grand redshift (les plus lointaines sont à $z \approx 6$) est dès lors une difficulté pour ces modèles.

La comparaison du spectre de puissance reconstruit avec le relevé spectroscopique 2dF et les prédictions des modèles de formation des structures avec neutrinos conduit à

$$0.0001 < \Omega_\nu < 0.04 . \quad (495)$$

Pour ce qui concerne la masse des neutrinos via les relevés cosmologiques, les contraintes sont résumées dans la Table 12. Toutes tendent à montrer que

$$\sum m_\nu < 2.0 \text{ eV} , \quad (496)$$

en bon accord avec les limites des expériences en laboratoires, ce qui est réconfortant. Il faut cependant rester prudent car, même s'il s'agit d'analyses par des équipes indépendantes, elles utilisent fréquemment les mêmes jeux de données qui, elles, pourraient être polluées par des effets systématiques encore mal compris.

Les expériences cruciales sont cependant celles conduites sur Terre, qui visent la détermination directe de la masse de toutes les espèces de neutrinos. Bien qu'il ait été annoncé que cette masse avait été mesurée (expérience Super-Kamiokande au Japon), rien n'est encore fermement établi et certains résultats sont contradictoires. Les limites actuelles sont

$$\nu_e < 10 \text{ eV} \quad \nu_\mu < 170 \text{ keV} \quad \nu_\tau < 18.2 \text{ MeV} \quad (497)$$

L'expérience KATRIN qui doit mesurer la masse absolue du neutrino ν_e en étudiant la désintégration β du Tritium,

$${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (498)$$

devrait apporter des contraintes significatives. Elle peut effectivement mesurer la masse du ν_e , si celle-ci est supérieure à 0.2 eV. Cela signifie que l'absence de détection de KATRIN impliquerait $m_{\nu_e} < 0.2$ eV. Autrement, $m_{\nu_e} > 0.2$ et KATRIN mesurera sa masse avec une précision meilleure que 0.2 eV.

- **Matière noire froide.** En fait, toutes les observations actuelles en cosmologie favorisent les modèles d'univers avec une composante de matière noire non-baryonique froide dominante. Les candidats les plus discutés sont placés dans un diagramme (masse – section efficace d'annihilation) sur la figure 97 et succinctement décrits dans la Table 13. Les candidats actuels les plus vraisemblables sont

- **l'axion** est une "particule" de matière noire froide dont la masse est dans le domaine $10^{-6} < m_X < 10^{-4}$ eV. Avec une masse aussi faible - largement plus faible que le neutrino - si l'axion est le candidat matière noire alors il doit être en très grand nombre dans l'Univers. Ainsi, si le halo de la Galaxie est peuplé d'axions, sa densité numérique doit être de $n_X \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$.

Originellement, l'axion est un champ des modèles de chromodynamique quantique qu'on ajoute au champ de Higgs. Il permet de tuer la composante de moment dipolaire électrique qui, d'après les expériences en laboratoire, est nulle. Stricto-sensu, l'axion est un boson; c'est n'est donc pas vraiment une particule de matière mais un vecteur de transport d'interaction, comme le photon. Les axions auraient été produits pendant la phase QCD suivant le Big Bang.

Les axions peuvent se coupler aux photons. Il est donc possible de les détecter par leur signature lors d'une conversion d'axions en photons dans un champ magnétique. Des expériences sont en cours pour en révéler l'existence et les propriétés. Les contraintes actuelles permettent juste d'en fixer une masse limite.

- **les WIMPs**, acronyme pour *Weakly Interacting Massive Particles*, sont aussi une multitude. Ils font référence aux particules construites dans les modèles supersymétriques (SUSY). Ce sont des particules de matière noire froide qui, comme les neutrinos, interagissent très peu avec la matière ordinaire. Les WIMPs doivent avoir des masses supérieures à 10 GeV et inférieures à 300 TeV. Les théories supersymétriques prédisent l'existence de ces nouvelles particules qui sont des partenaires des fermions et des bosons.

Le candidat WIMP le plus "populaire" est le neutralino, une particule supersymétrique dont la masse serait environ 100 fois plus élevée que celle du proton. Le neutralino n'est pas le partenaire supersymétrique d'une particule unique, mais une combinaison du photino, du zino et du Higgsino qui sont les partenaires supersymétriques du photon, du boson Z et de l'hypothétique boson de Higgs, respectivement.

Les contraintes actuelles sur ces particules sont peu nombreuses, mais un grand nombre d'expériences sont en cours ou en projet car les WIMPs sont parmi les candidats sérieux pour la matière noire.

La façon la plus courante de chercher les WIMPs est par détection directe, via leur interaction avec des noyaux atomiques. La matière noire est composée de particules à faible interaction et ces événements sont donc extrêmement rares. Cependant, des interactions se produisent qui peuvent engendrer des émissions de photons ou

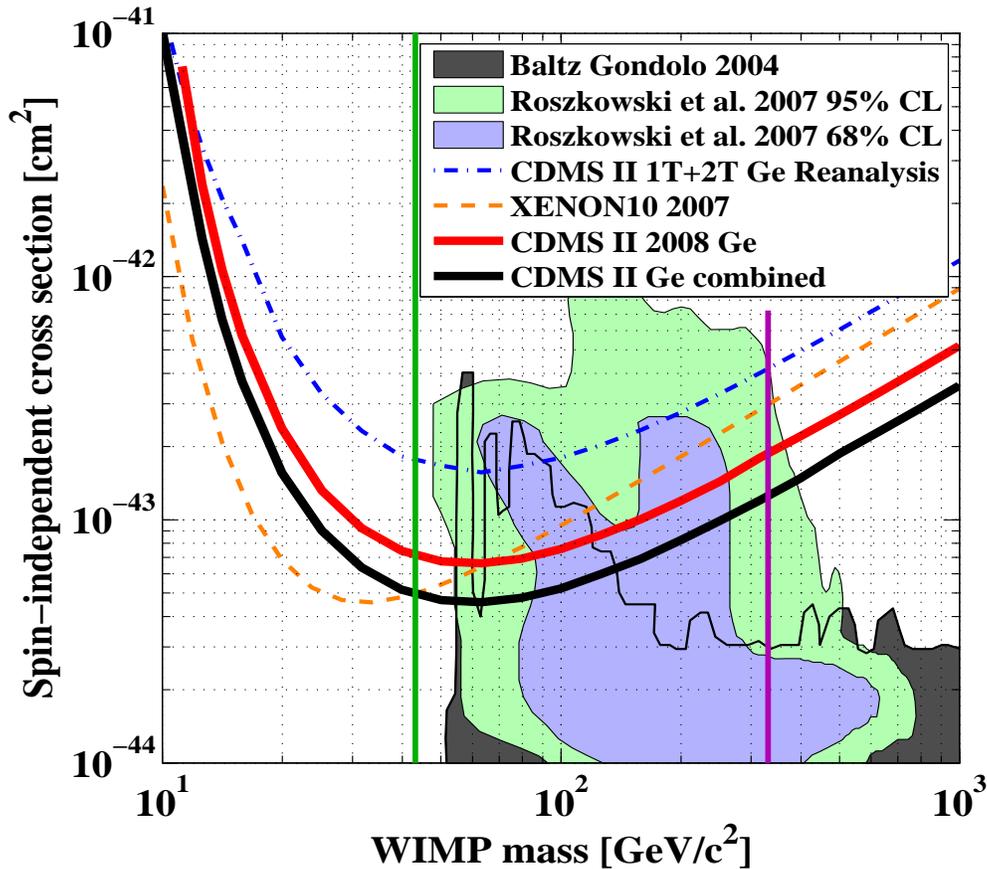


Figure 96: diagramme d'exclusion des recherches les plus récentes sur les WIMPs. En abscisse est portée la masse et en ordonnée la section efficace du WIMP. Les lignes au-dessus des lignes sont les domaines qu'excluent les expériences. Les zones au-dessus des lignes sont les domaines qu'excluent les expériences. Les lignes verticales sont les contraintes des accélérateurs. Toute la zone à gauche de la ligne verticale verte est exclue par les expériences avec les accélérateurs actuels. La zone entre la ligne verticale verte et la ligne verticale magenta indique le secteur que le LHC va explorer. Les zones colorées pleines sont les secteurs prédits par des modèles SUSY (SUperSYmetry). D'après Ahmed et al 2009, PRL 102, 011301.

de phonons, ou bien des ionisations. Ces phénomènes peuvent être observés et caractérisés en laboratoire. Pour en détecter des signatures, il faut accumuler des milliards de noyaux et les enfouir dans des cuves souterraines, comme pour les expériences EDELWEISS, DAMA, CDMS, CRESST, ZEPLIN, XENON ou XMASS, pour éviter les contaminations par d'autres sources de collisions. Ces techniques permettent d'explorer tout le domaine de masse de WIMP entre 10 GeV et quelques TeV (voir la figure 96), mais sont limitées en détection et donc dépendent aussi de la section efficace des WIMP.

Les WIMPs étant évidemment sensibles à la gravitation, ils doivent s'accumuler dans des objets massifs comme le coeur de la Terre ou du Soleil. Dans ces régions très denses, les WIMPs peuvent se collisionner et s'annihiler pour produire des neutrinos énergétiques. Les expériences Super-Kamiokande ou AMANDA, par exemple, observent l'émission de neutrinos par le Soleil. De même, les WIMPs doivent aussi s'accumuler et s'annihiler dans le halo de la Galaxie et on s'attend à ce qu'ils produisent des rayons cosmiques ayant une signature bien spécifique. Les observatoires HESS et CANGAROO-II tentent d'observer ces rayons cosmiques.

Candidat	Nature	catégorie	masse approximative
Jupiters	baryonique	matière noire froide	$0.001 M_{\odot}$
Naines brunes	baryonique	matière noire froide	$0.08-0.01 M_{\odot}$
Naines blanches	baryonique	matière noire froide	$0.1-0.5 M_{\odot}$
Étoiles à neutrons	baryonique	matière noire froide	$0.1 M_{\odot}$
Trous noirs stellaires	baryonique	matière noire froide	$\approx 1. M_{\odot}$
Trous noirs massifs	baryonique	matière noire froide	$10^{5-6} M_{\odot}$
Trous noirs primordiaux	baryonique	matière noire froide	?
Axion	non-baryonique	matière noire froide	$10^{-5}-10^{-3} \text{ eV}$
LSP-WIMP (e.g. neutralino)	non-baryonique	matière noire froide	50 GeV-1 TeV
gravitino	non-baryonique	matière noire tiède	500 eV
neutrinos majorons	non-baryonique	matière noire chaude	keV
	non-baryonique	matière noire chaude	10^{-5} eV

Table 13: Liste de quelques candidats à la composante invisible de l'Univers.

Enfin, on espère que le LHC pourra observer et caractériser les particules supersymétriques et notamment le neutralino. Le LHC a la capacité de détecter des particules de 2 TeV, voire un peu plus (sa limite est de 14 TeV). Si le WIMP se trouve dans le domaine de masse 50-400 GeV, alors il y a de bons espoirs qu'il en détecte en grand nombre (voir la figure 96). Le LHC est une étape supérieure. S'il détecte les WIMPs, alors il sera aussi capable d'en étudier des propriétés quantiques

12 L'histoire thermique de l'Univers et la nucléosynthèse primordiale

Dès 1946, Gamov avait envisagé que si l'Univers était beaucoup plus chaud dans le passé, alors les réactions nucléaires qui ont du s'y produire pourraient expliquer l'origine et l'abondance des éléments. Gamov prédit aussi qu'il devait exister un rayonnement fossile de cette période qu'il estima à environ 5 K. Malheureusement, Fermi en 1950 démontre qu'il n'y a aucun moyen de former des éléments lourds dans un univers chaud. Par ailleurs, la théorie de la nucléosynthèse stellaire apportait à la même période un cadre satisfaisant pour tenter d'expliquer la formation des éléments.

Ce n'est que vers 1960 que les idées concernant la nucléosynthèse primordiale et l'existence d'un rayonnement résiduel sont de nouveau considérées sérieusement. En fait, au moment de la découverte du rayonnement cosmologique par Penzias et Wilson, une équipe de Princeton avait déjà mis sur pied une expérience pour tenter de le mesurer. C'est la raison pour laquelle l'interprétation des observations de Penzias et Wilson fut immédiate.

Les grandes lignes de l'histoire thermique sont décrites sur la figure 98.

Le principe de l'analyse de l'histoire thermique repose sur une idée de base relativement simple. Plaçons nous par exemple dans la période radiative. Un phénomène physique est caractérisé par

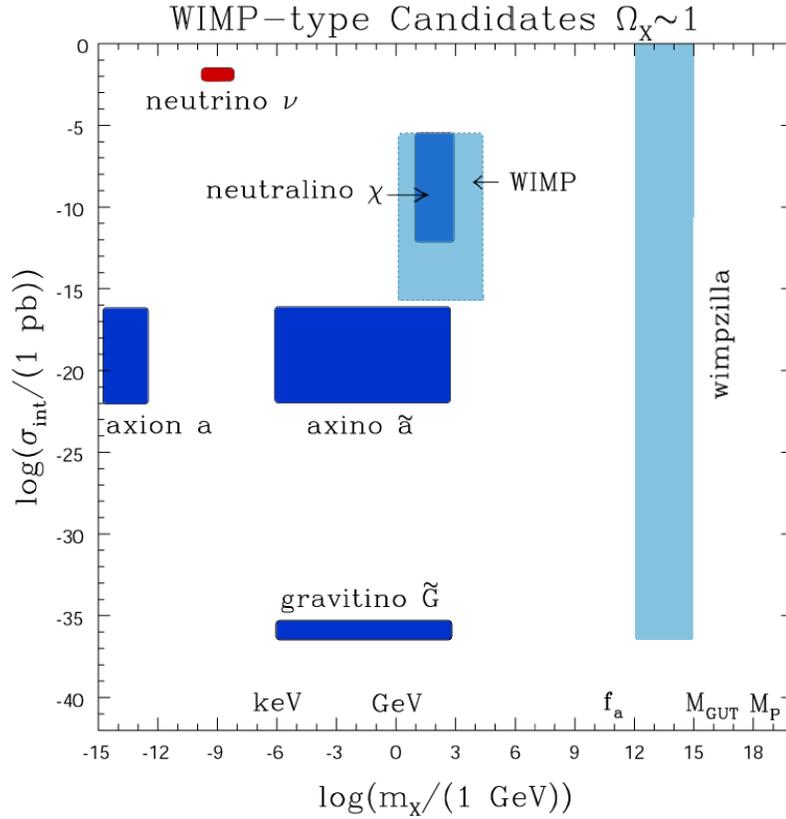


Figure 97: Une représentation schématique de la distribution des candidats matière noire de type WIMP les plus vraisemblables (à ce jour). σ_{int} donne une idée de la force d'interaction de ces candidats avec la matière ordinaire (une propriété importante pour les détections directes). D'après Roszkowski 2004, hep-ph/0404052.

une échelle de temps typique, τ , qui peut s'exprimer sous la forme

$$\tau = \frac{1}{n\sigma c}, \quad (499)$$

où n est la densité de particules en interaction, σ la section efficace d'interaction et c la célérité de la lumière. Pendant cette période le facteur d'expansion croît comme $R \propto t^{1/2}$ alors que la densité décroît comme $n \propto R^3$. Donc

$$\frac{\tau}{t} \propto \frac{R}{\sigma}. \quad (500)$$

Les interactions ne seront donc efficaces que tant que $\tau/t \ll 1$. Mais comme R croît l'Univers doit passer inéluctablement vers un stade où l'interaction devient négligeable. En particulier, toute phase d'équilibre maintenue par une interaction donnée doit évoluer vers une étape où l'équilibre est rompu. L'histoire de l'Univers est donc une suite de phases d'équilibre où les transitions de phase sont des étapes majeures. Par la suite j'en décris quelques unes.

12.1 Transition matière-rayonnement

Si ρ_m est la densité pendant la phase dominée par la matière et ρ_r est la densité pendant la phase dominée par le rayonnement, on a

$$\rho_m = \rho_c \Omega_m (1+z)^3 \quad (501)$$

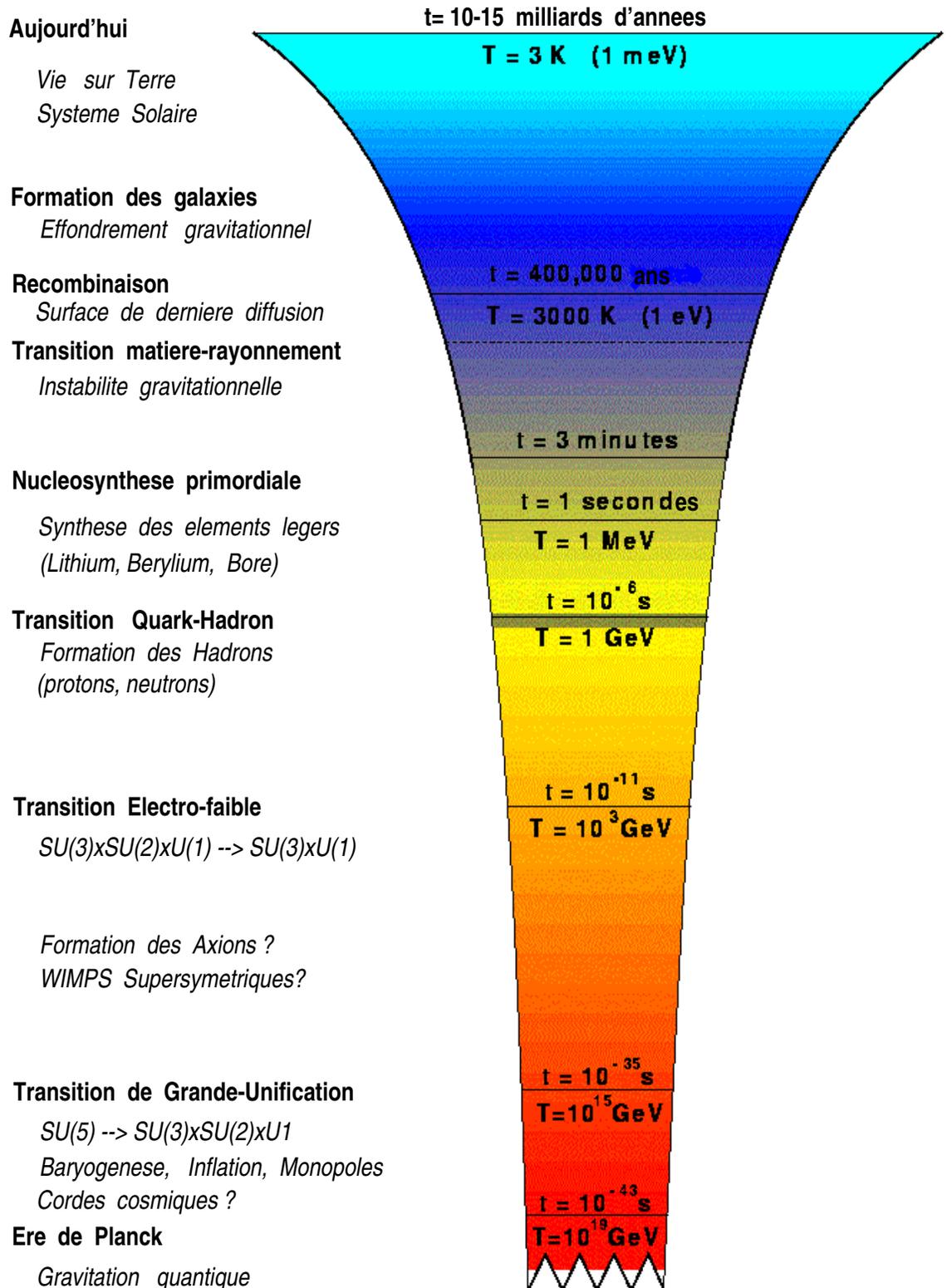


Figure 98: Une (très) brève histoire thermique de l'Univers retraçant ses époques marquantes.

et

$$\rho_r = \rho_c \Omega_r (1+z)^4 . \quad (502)$$

La transition entre ces deux périodes se produit donc à

$$1 + z_{eq} = \frac{R_0}{R_{eq}} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} . \quad (503)$$

Les observations donnent les valeurs actuelles: $\Omega_m \geq 0.2$ et $\Omega_r h^2 = 2.56 \cdot 10^{-5}$. Donc

$$1 + z_{eq} = 3.9 \times 10^4 \left(\Omega h^2 \right) , \quad (504)$$

correspondant à une température T_{eq}

$$T_{eq} = (1 + z_{eq}) = 1.07 \times 10^5 \left(\Omega h^2 \right) \text{ K} = 9.24 \left(\Omega h^2 \right) \text{ eV} , \quad (505)$$

et au temps t_{eq}

$$t_{eq} = 0.4 \frac{1}{H_0} \frac{1}{\Omega^{1/2}} (1+z)^{-3/2} \quad (506)$$

soit

$$t_{eq} = 1.57 \times 10^{10} \left(\Omega h^2 \right)^{-1/2} \text{ s} = 500 \left(\Omega h^2 \right)^{-1/2} \text{ ans} \quad (507)$$

12.2 Découplage et recombinaison

Dans la phase chaude de l'histoire de l'Univers, matière et rayonnement étaient en fort contact thermique à cause du taux d'interaction élevé entre photons et électrons. Mais au fur et à mesure de l'expansion, la densité d'électrons libres diminue et va finir par devenir trop faible pour maintenir l'efficacité de l'interaction: photons et électrons *se découplent*. Grossièrement, cette étape se produit lorsque le libre parcours moyen des photons devient plus grand que la distance de Hubble à la période considérée, c/H .

Le taux d'interaction photons=électrons est donné par

$$\tau_\gamma = n_e \sigma_T c \quad (508)$$

où n_e est la densité numérique d'électrons libres et σ_T la section efficace de Thomson ($=6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$).

L'équilibre des abondances des électrons libres est déterminé par l'équation de Saha. Si n_H est la densité numérique d'Hydrogène, n_p la densité numérique de protons libres et n_e la densité numérique d'électrons libres (on néglige les noyaux d'Hélium), la neutralité de charge de l'Univers implique

$$n_e = n_p . \quad (509)$$

La conservation du nombre de baryons, n_B , implique

$$n_B = n_p + n_H \quad (510)$$

À l'équilibre thermique, pour des températures inférieures à $m_i c^2$, la densité du constituant i est

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_i - m_i}{T} \right] \quad (511)$$

où $i = e, p, H$ et μ_i est le potentiel chimique.

L'équilibre chimique,



garantit que

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H , \quad (513)$$

et donc

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_e} n_p n_e \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{B}{T} \right] , \quad (514)$$

où B est l'énergie de liaison de l'Hydrogène: $B = (m_p + m_e - m_H)c^2 = 13.6$ eV.

On appelle *fraction d'ionisation*, la quantité

$$X_e = \frac{n_p}{n_B} . \quad (515)$$

Sachant que $g_p = g_e = 2$ et $g_H = 4$ et en posant $n_B = \eta n_\gamma$, on peut déterminer la fraction d'ionisation à l'équilibre, X_e^{eq} et l'exprimer sous la forme

$$\frac{1 - X_e^{eq}}{(X_e^{eq})^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{T}{m_e} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{B}{T} \right] , \quad (516)$$

qui est l'équation de Saha pour la fraction d'ionisation à l'équilibre. Le rapport baryons sur photons, η , est contraint par les observations:

$$\eta = 2.68 \times 10^{-8} \left(\Omega_B h^2 \right) . \quad (517)$$

Il est clair que l'équation (516) trace l'évolution de la fraction d'ionisation puisque T varie comme $(1+z)$. Par définition, la *(re)combinaison* est la période où 90% des électrons se sont recombinés avec les protons. Cette époque se situe à

$$z_{rec} = 1200 - 1400 \quad (518)$$

Par exemple, pour $z_{rec} = 1300$, on a $T_{rec} = T_0(1+z_{rec}) = 3775$ K = 0.308 eV. Compte tenu du z_{eq} calculé dans la section précédente, on voit que la recombinaison s'est produite pendant la phase dominée par la matière. On peut donc facilement déterminer l'âge auquel s'est déroulée la recombinaison

$$t_{rec} = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \left(\frac{1}{\Omega} \right)^{1/2} (1+z)^{-3/2} , \quad (519)$$

soit

$$t_{rec} = 4.39 \times 10^{12} \left(\Omega h^2 \right)^{-1/2} \text{ s} = 140000 \left(\Omega h^2 \right)^{-1/2} \text{ ans} \quad (520)$$

Il peut paraître surprenant que la recombinaison se produise à ≈ 4000 K et non pas à ≈ 150000 K correspondant à 13.6 eV. C'est une conséquence de la distribution en énergie des photons qui est très large. En fait, il suffit qu'un photon sur 10^8 ait une énergie supérieure à 13.6 eV pour avoir assez de photons ionisants.

En utilisant l'équilibre d'ionisation, le fait que la densité d'électrons libres est

$$n_e = X_e n_B = X_e \eta n_\gamma \approx 1.13 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3} \left(\Omega_B h^2 \right) , \quad (521)$$

que

$$\tau \approx \frac{1}{n_e \sigma_{TC}} , \quad (522)$$

et enfin que l'âge de l'Univers est

$$t = \left(\frac{2}{3} \right) (1+z)^{-3/2} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} , \quad (523)$$

on peut estimer la période de découplage qui correspond à $t \approx \tau$. Comme le libre parcours moyen des photons dépend de Ω_B et que l'âge de l'Univers dépend de Ω , le redshift au découplage dépend donc de ces deux paramètres essentiels.

Grossièrement le découplage se produit entre $z = 1100$ et $z = 1200$ et donc

$$t_{dec} = \left(\frac{2}{3}\right) H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} (1 + z_{dec})^{-3/2} . \quad (524)$$

Soit, pour $z = 1100$

$$t_{dec} = 5.64 \times 10^{12} (\Omega_0 h^2)^{-1/2} \text{ s} = 180000 (\Omega_0 h^2)^{-1/2} \text{ ans} \quad (525)$$

On voit que le découplage se produit après la recombinaison. Remarquablement, il se produit dans un tout petit intervalle en redshift. Ceci est essentiellement un effet de profondeur optique qui dépend très fortement de l'état d'ionisation (voir l'équation (365) qui décrit comment calculer cette profondeur optique). Le $\Delta z \approx 100$ est donc une véritable barrière opaque. On l'appelle la *surface de dernière diffusion*.

12.3 Nucléosynthèse primordiale des éléments légers

La période de la nucléosynthèse primordiale est particulièrement importante car elle fournit une des contraintes les plus solides sur l'abondance de baryons dans l'Univers. La physique de base suit l'idée générale décrite en préliminaire à toute cette section. Soit une particule d'énergie totale bien plus grande que son énergie au repos, $kT \gg mc^2$. Si les échelles de temps des interactions qui maintiennent les espèces en équilibre thermique avec les autres espèces présentes à la température T sont plus courtes que l'âge de l'Univers, alors la densité numérique d'une particule et de son anti-particule est

$$n = \bar{n} = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\frac{E}{kT}} \pm 1} dp \quad (526)$$

où g est le poids statistique de la particule, p est la quantité de mouvement, et les signes $+$ et $-$ désignent respectivement les fermions et les bosons. Pour les photons (bosons), $g = 2$, pour les nucléons (fermions), $g = 2$, et enfin pour les neutrinos (fermions), $g = 1$.

On a, pour une densité numérique n et pour la densité d'énergie ε :

$$\begin{cases} n_\gamma &= 0.244 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_\gamma &= aT^4 \\ n_{nuc} &= 0.183 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_{nuc} &= \frac{7}{8} aT^4 \\ n_{\nu_{e,\mu}} &= 0.091 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_{\nu_{e,\mu}} &= \frac{7}{16} aT^4 \end{cases} \quad (527)$$

et plus généralement

$$\varepsilon = \chi(T) aT^4 \quad (528)$$

Lorsque les particules deviennent non-relativistes, $kT \ll mc^2$, les abondances s'expriment alors sous la forme

$$n = g \left(\frac{mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{kT}} \quad (529)$$

Considérons les découplages protons et neutrons. On se place dans le cas où protons et neutrons sont non-relativistes mais leur équilibre est maintenu par les interactions électrons-neutrinos



$$\nu_e + n \rightleftharpoons p + e^- \quad (531)$$

et l'abondance relative des neutrons et protons est

$$\frac{n}{p} = \exp \left[-\frac{\Delta mc^2}{kT} \right] \quad (532)$$

Elle sera gelée dès que les interactions des neutrinos ne pourront maintenir l'équilibre neutrons-protons. La condition de gel se produit lorsque l'échelle de temps des interactions faibles devient supérieure à l'âge de l'Univers:

$$t_{weak} = \frac{1}{n\sigma_{weak}c} \quad (533)$$

où σ_{weak} est la section efficace de l'interaction faible ($\sigma_{weak} \propto E^2$ où E est l'énergie), et n est la densité numérique de nucléons. À cause de l'expansion nous savons que

$$n \propto \frac{1}{R^3} \quad ; \quad R \propto \frac{1}{T} \quad ; \quad E \propto T \quad (534)$$

et donc

$$t_{weak} \propto \frac{1}{T^5} \quad (535)$$

Cette échelle de temps doit être comparée à celle de l'expansion de l'Univers. Or dans la phase dominée par le rayonnement et pour $z \gg z_{eq}$ on a $\Omega \approx 1$, et donc les équations de Friedmann s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx -\frac{8\pi G}{c^2}\rho \quad (a) \\ \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \quad (b) \end{array} \right. \quad (536)$$

et comme pendant la période radiative on a $\rho R^4 = \text{Cte} = \rho_1 R_1^4$, la variation du facteur d'échelle en fonction du temps s'écrit

$$\frac{R}{R_1} = \left(\frac{32\pi G \rho_1}{3c^2} \right)^{1/4} t^{1/2} \quad (537)$$

d'où

$$\varepsilon = \chi(T) a T^4 = \frac{3c^2}{32\pi G} t^{-2} \quad (538)$$

et donc

$$t \propto \frac{1}{T^2} \quad (539)$$

En fait, on peut montrer que

$$t = \frac{0.143 \times 10^{14}}{T^2} \text{ ansK}^2 \quad (540)$$

Donc l'échelle de temps t_{weak} décroît beaucoup plus vite que l'échelle de temps de l'expansion. Le découplage se déroule lorsque $t = t_{weak}$. Sachant que

$$\sigma_{weak} = 3 \times 10^{-9} \left(\frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \text{ m}^2 \quad (541)$$

on démontre que ce découplage se produit pour $kT = 1 \text{ Mev}$.

À cet instant on a alors

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{1.28 \text{ Mev}}{1. \text{ Mev}}} \quad (542)$$

ce qui donne

$$\frac{n}{n+p} = 0.21 \quad (543)$$

Après le découplage, la fraction de neutrons ne décroît plus selon la loi (542) mais beaucoup plus lentement car il n'y a plus d'équilibre. C'est à cette époque que les neutrons libres vont donc pouvoir fusionner pour former les éléments légers. Tous les neutrons vont alors se combiner pour former des noyaux de ^4He . Les réactions de base sont les suivantes



L'abondance d'Hélium est caractérisée par la quantité

$$Y = \frac{m_{^4\text{He}} n_{^4\text{He}}}{m_{\text{H}} n_{\text{H}} + m_{^4\text{He}} n_{^4\text{He}}} \approx 0.25 \quad (548)$$

De la même façon se forment simultanément le Deuterium, l'Hélium 3 et le Lithium 7. Ces éléments, qui ne peuvent pas se former dans les étoiles, trouvent donc leur origine dans les phases précoces d'un univers chaud en expansion dont la température décroît progressivement. La prédiction de leur abondance est un très grand succès de la théorie de la nucléosynthèse primordiale.

12.4 Comparaison avec les observations

Voici en résumé les abondances mesurées

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^4\text{He} : 0.236 \leq Y \leq 0.254 \\ \frac{{}^7\text{Li}}{\text{H}} : 1.1 \pm 0.4 \times 10^{-10} \\ \text{D} : 2 \cdot 10^{-5} \leq D \leq 1.5 \times 10^{-4} \\ {}^3\text{He} : \frac{\text{D} + {}^3\text{He}}{\text{H}} = 3.6 \pm 0.6 \times 10^{-5} \end{array} \right. \quad (549)$$

La Figure 99 montre le remarquable accord entre les observations et les prédictions théoriques.

12.5 Contrainte sur la fraction de baryons

La fraction de baryons peut s'exprimer sous la forme

$$\Omega_B = 0.0035 \eta_{10} h^{-2} \left(\frac{T}{2.7} \right)^3 \quad (550)$$

où

$$\eta_{10} = 10^{10} \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (551)$$

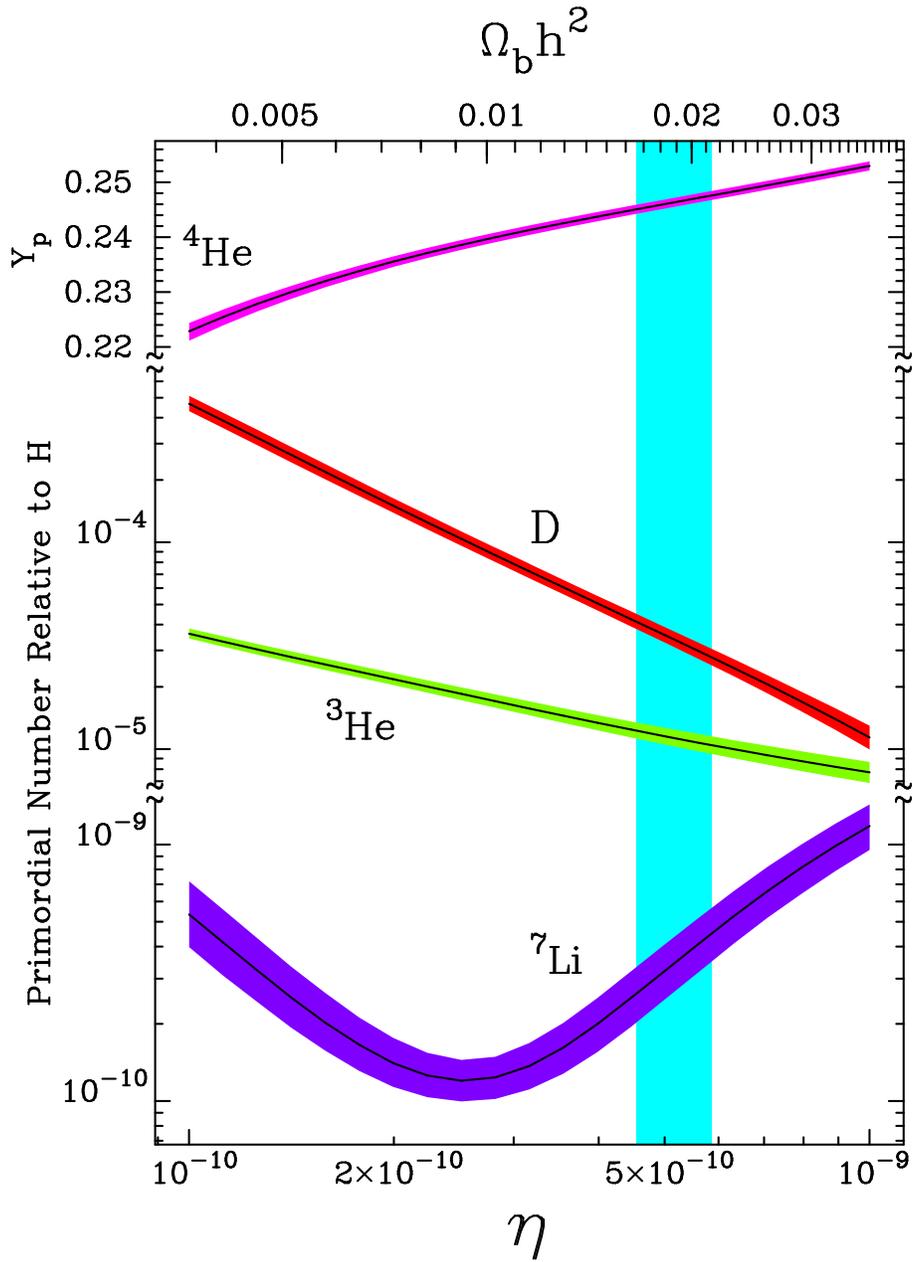


Figure 99: Abondance des éléments légers prédite par la nucléosynthèse primordiale en fonction du rapport baryon sur photon (en bas) ou de la fraction de baryon (en haut). La bande verticale trace l'intervalle permis par les observations.

Par ailleurs, on peut montrer que l'abondance en Hélium peut se mettre sous la forme

$$Y = 0.261 - 0.018 \log \left[10^5 \frac{n_D + n_{3\text{He}}}{\text{H}} \right] + 0.014 [N_\nu - 3] + 0.014 [\tau_{1/2} - 10.6] \quad (552)$$

où $\tau_{1/2}$ est la durée de vie du neutron en minute, N_ν est le nombre d'espèces de neutrinos (d'après les expériences du LEP, il n'en existe que 3).

Le rapport η_{10} est contraint par les observations, notamment le ${}^7\text{Li}$ mesuré dans les étoiles de faible métallicité. Avec les mesures actuelles nous avons finalement les limites suivantes

$$1.2 \leq \eta_{10} \leq 6.4 \quad (553)$$

$$0.0040 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.025 \quad (554)$$

Si l'on considère l'intervalle le plus compatible avec l'abondance des éléments légers, $\eta_{10} = 4.1$, alors,

$$\Omega_B h^2 = 0.015 \quad (555)$$

et dans ce cas

1. Comme $\Omega_{lumineux} = \Omega_{galaxie} + \Omega_{gaz} = 0.007$, il doit exister des baryons non lumineux.
2. Comme $\Omega > 0.1$, il doit exister de la matière non baryonique.

13 ANNEXES

13.1 Annexe A: Des objectifs pour la cosmologie de la prochaine décennie

Un rapide panorama des grandes questions qu'abordera la cosmologie dans les deux décennies à venir.

1. les tests des théories de la gravitation,
2. la topologie de l'Univers,
3. les paramètres cosmologiques,
4. la nature de la matière noire,
5. la nature de l'énergie sombre,
6. la recherche de signatures des défauts topologiques,
7. les contraintes sur les modèles inflationnaires,
8. l'origine du spectre de fluctuation,
9. la quantité et la distribution de la matière noire à très grande échelle,
10. la description de la structuration de l'Univers,
11. la formation des amas et l'évolution de l'abondance des amas de galaxies,
12. la(es) relation(s) entre la lumière et la matière; évaluation du facteur de biais: comment dépend-il du temps, de la densité locale, du type de galaxie? Est-ce une relation linéaire?
13. la formation des halos (le *Dark Age*),
14. l'origine de la re-ionisation de l'Univers,
15. lien(s) entre quasars, AGNs et galaxies,
16. les premières étoiles (la fin du *Dark Age*) et l'histoire de la formation stellaire dans les galaxies,
17. l'origine des types morphologiques des galaxies,
18. la distribution et les mécanismes de formation des nuages de la forêt Lyman- α ,
19. lien entre systèmes amortis et les premières galaxies: histoire du gaz,
20. les fluctuations du fond diffus, des très grandes aux toutes petites échelles,
21. la masse et la distribution des composantes de la matière dans les amas de galaxies: SZ/X/Lentille gravitationnelle.

13.2 Annexe B: Projection de la fonction de corrélation

Supposons que la fonction de corrélation à deux points ait la forme usuelle:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} . \quad (556)$$

On se propose de calculer la projection $\omega(\theta)$ et d'analyser son comportement pour des petits angles.

On rappelle que

$$dP_{2D} = N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (557)$$

et

$$dP_{3D} = n^2 [1 + \xi(r_{12})] dV_1 dV_2 . \quad (558)$$

Si la fonction de sélection du relevé est $\Phi(r/D)$, la densité numérique par unité d'angle solide est¹⁷

$$N = \int_0^\infty r^2 n \Phi\left(\frac{r}{D}\right) dr \quad (559)$$

$$= nD^3 \int_0^\infty y^2 \Phi(y) dy \quad (560)$$

$$= nD^3 E \quad (561)$$

et la projection de dP_{3D} s'écrit:

$$dP_{2D} = n^2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) d\Omega_1 dr_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) [1 + \xi(r_{12})] d\Omega_2 dr_2 . \quad (562)$$

En utilisant (557), (559) et (562) on obtient:

$$n^2 D^6 E^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 = n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) [1 + \xi(r_{12})] dr_2 \quad (563)$$

et donc:

$$N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 = N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 + n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) dr_2 \quad (564)$$

soit:

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) dr_2 \quad (565)$$

Dans l'hypothèse où θ est petit, alors

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta \approx (r_1 - r_2)^2 + r_1 r_2 \theta^2 \quad (566)$$

et on peut définir une nouvelle variable u telle que

$$r_2 - r_1 = ur_0; \quad \text{et par ailleurs } r_2 = r_1 = yD , \quad (567)$$

on a donc

$$r_2 \approx ur_0 + yD , \quad (568)$$

et, pour r_1 fixe

$$dr_2 \approx r_0 du . \quad (569)$$

¹⁷ $dS = r^2 d\Omega \quad dV = r^2 dr d\Omega$

Dans ce cas, y est presque constant autour de $r_2 - r_1$ et donc:

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi \left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2} \right] r_0 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) r_2^2 \quad (570)$$

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int y^4 \Phi(y)^2 D^5 dy \int r_0 \xi \left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2} \right] du \quad (571)$$

Comme $N^2 = n^2 D^6 E^2$, on pose

$$x = \frac{ur_0}{yD\theta}, \quad (572)$$

d'où l'on déduit finalement

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^\gamma \frac{1}{E^2} \int y^{5-\gamma} \Phi(y)^2 dy \int (1+x^2)^{-\gamma/2} dx \quad (CQFD). \quad (573)$$

13.3 Annexe C: Théorème du viriel

La méthode la plus simple pour déterminer une masse dynamique d'un système stellaire consiste à utiliser le théorème du viriel.

Considérons un système auto-gravitant composé de N masses ponctuelles dont les positions, vitesses et masses sont représentées respectivement par les quantités \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i et m_i . Le moment d'inertie du système est alors:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^2. \quad (574)$$

Par conséquent:

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad (575)$$

et

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^2 + \mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i). \quad (576)$$

Puisque le système est auto-gravitant, l'accélération d'une particule i est la somme des interactions gravitationnelles de chacune des particules:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (577)$$

Le terme en \mathbf{v}_i^2 est associé à l'énergie cinétique totale K du système auto-gravitant, de sorte que:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2 K + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (578)$$

On peut exprimer le second terme plus simplement avec $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j$:

$$\sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (579)$$

d'où:

$$\sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (580)$$

On transfère le second terme de droite à gauche, puis on y intervertit les indices. Les deux termes de gauche sont alors identiques, d'où l'on déduit:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2 K - \frac{G}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = 2 K + W. \quad (581)$$

Cette quantité est quelquefois appelée le Viriel, $K + W$ représentant l'énergie totale du système auto-gravitant.

Dans l'hypothèse où le système est stationnaire, on peut admettre que sur plusieurs fois l'échelle de temps dynamique caractérisant le système, la moyenne temporelle de \ddot{I} est nulle. L'échelle de temps dynamique est le temps typique qu'il faut à une particule pour traverser l'ensemble du système auquel elle est associée. Ce n'est généralement pas une quantité observable puisqu'en pratique l'astronome n'observe un système qu'une seule fois et/ou pendant une courte période.

L'utilisation du théorème du viriel pour les galaxies n'est donc pas rigoureuse, mais on admet néanmoins que pour les systèmes observés on a:

$$2K + W \approx 0. \quad (582)$$

En d'autres termes, il est implicitement admis que les systèmes sont à l'équilibre et dans un état stationnaire. Ceci n'est vrai que lorsque l'échelle de temps dynamique du système est beaucoup plus courte que son âge au moment de l'observation.

En résumé on a donc:

- Système lié: $E_{totale} \leq 0 \Leftrightarrow K + W \leq 0$.
- Système Stationnaire: $2K + W = 0$.

13.4 Annexe D: La sphère isotherme singulière

Considérons une sphère de gaz isotherme en équilibre hydrostatique. L'équation d'équilibre peut donc s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{kT}{m} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (583)$$

où p et T sont la pression et la température du gaz, m la masse des particules individuelles, k la constante de Boltzmann, ρ la densité du gaz et enfin $M(r)$ la masse de gaz contenue dans une sphère de rayon r .

Sachant que $dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho$, si on multiplie les deux membres de l'équation précédente par r^2 et si on différencie ensuite, on obtient:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{Gm}{kT} 4\pi r^2 \rho. \quad (584)$$

Supposons maintenant que nous observons un système dynamique dont la fonction de distribution ait la forme suivante:

$$f(E) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right). \quad (585)$$

E est en fait l'énergie totale changée de signe.

La densité est obtenue en sommant sur l'espace des vitesses:

$$\rho = \int f(E) d^3\vec{v} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\Psi}{\sigma^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{\sigma^2}} 4\pi v^2 dv. \quad (586)$$

Donc:

$$\rho = \rho_1 e^{\frac{\Psi}{\sigma^2}} \quad \text{ou} \quad \Psi = \sigma^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1}. \quad (587)$$

Pour ce système l'équation de Poisson s'écrit alors:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (588)$$

Compte tenu de l'expression précédente de Ψ , on a:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho. \quad (589)$$

L'expression en fonction de Ψ s'écrit alors:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho_1 r^2 \exp\left[\frac{\Psi}{\sigma^2}\right]. \quad (590)$$

La comparaison des équations (584) et (590) montre qu'elles sont identiques si on pose:

$$\sigma^2 = \frac{kT}{m}, \quad (591)$$

où σ est la dispersion de vitesse sur une dimension.

Par conséquent *une sphère de gaz auto-gravitante est identique à un système d'étoiles sans collisions dont la fonction de distribution est donnée par l'expression (585), soit:*

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}\right] \quad (592)$$

Cette distribution est identique à celle d'un gaz isotherme à l'équilibre: la distribution de Maxwell-Boltzmann. Cependant, il ne faut absolument pas les confondre: la distribution d'un gaz isotherme donne une équipartition de l'énergie par particule. Mais dans notre cas, le système étant sans collisions il ne peut y avoir équipartition par particule. Ce que nous donne la fonction de distribution c'est l'énergie par unité de masse. On peut se demander comment un système sans collisions a pu parvenir à un tel état dynamique. En fait, il résulte d'une étape transitoire extrêmement rapide se déroulant après l'effondrement du système et que l'on appelle relaxation violente. Cette phase explique aussi pourquoi des systèmes sans collisions ont pourtant tous globalement la même morphologie.

On peut trouver facilement une solution à l'équation (590) en recherchant les solutions du type $\rho = Cr^{-\alpha}$. On a alors nécessairement:

$$\alpha = \frac{4\pi G}{\sigma^2} Cr^{2-\alpha}. \quad (593)$$

D'où:

$$\alpha = 2 \quad \text{et} \quad C = \frac{\sigma^2}{2\pi G}, \quad (594)$$

ce qui conduit au profil qui caractérise la sphère isotherme singulière:

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2}. \quad (595)$$

Cette solution est appelée *Sphère Isotherme Singulière*.

Bien qu'extrêmement simple, la sphère isotherme singulière a l'inconvénient d'avoir une densité infinie en $r = 0$. Pour obtenir un comportement plus réaliste on définit de nouvelles variables sans dimension \tilde{r} et $\tilde{\rho}$ telles que:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \quad (596)$$

où ρ_0 est la densité centrale et:

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}}. \quad (597)$$

r_0 est le *Rayon de King*. C'est le rayon pour lequel la densité projetée vaut environ la moitié de la densité centrale projetée. C'est pour cette raison que r_0 est fréquemment appelé le rayon de cœur par analogie avec le rayon de cœur qu'ont défini les modélisateurs.

La valeur de r_0 peut paraître arbitraire. En fait elle provient du théorème du Viriel: la vitesse quadratique moyenne des particules d'une sphère isotherme est:

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) v^4 dv}{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) v^2 dv} = 3\sigma^2. \quad (598)$$

Le théorème du Viriel donne donc:

$$2K + W = 2m\frac{1}{2}(3\sigma^2) - \frac{GM(r)m}{r} = 0, \quad (599)$$

Les ordres de grandeur sont alors fixés par la masse contenue dans une sphère de rayon r_0 et de densité ρ_0 :

$$M(r_0) = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0, \quad (600)$$

la relation entre σ et $M(r_0)$ fixe alors r_0 :

$$3\sigma^2 = \frac{4G}{3r_0}\pi\rho_0r_0^3. \quad (601)$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation (590) s'écrit:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{d\ln\tilde{\rho}}{d\tilde{r}}\right) = -9\tilde{r}^2\tilde{\rho}, \quad (602)$$

ρ_0 étant la densité centrale, on a donc dans ce cas:

$$\rho_1 = \rho_0 e^{-\frac{\Psi(0)}{\sigma^2}}. \quad (603)$$

D'autre part, la relation entre Ψ et ρ impose que:

$$\frac{d\ln\rho}{dr} = \frac{d(\Psi/\sigma^2)}{dr}. \quad (604)$$

On a donc:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left[\tilde{r}^2\frac{d(\Psi/\sigma^2)}{d\tilde{r}}\right] = -4\pi G\rho_0r_0^2\exp\left[\frac{\Psi(r)-\Psi(0)}{\sigma^2}\right]. \quad (605)$$

La détermination de $\tilde{\rho}$ s'obtient par intégration numérique de l'équation (605) et des conditions aux limites réalistes, comme $\tilde{\rho}(0) = 1$ et $(d\tilde{\rho}/d\tilde{r}) = 0$. La solution numérique montre que pour \tilde{r} suffisamment grand, $\tilde{\rho}$ décroît comme \tilde{r}^{-2} et s'approche donc du modèle à sphère isotherme singulière. On peut alors évaluer le comportement de la densité projetée loin du centre (en pratique quelques rayons de cœur):

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2} \quad \text{et} \quad \Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r)dz, \quad (606)$$

où z est l'axe perpendiculaire au rayon projeté, R le rayon projeté et $\Sigma(R)$ la densité projetée au rayon R .

Comme $r^2 = R^2 + z^2$, et pour des raisons de symétrie, on peut écrire:

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^{+\infty} \rho(r) \cdot \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (607)$$

Compte tenu de l'expression de $\rho(r)$, on a:

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{\pi G} \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (608)$$

L'intégration admet une solution analytique en posant $r = R/\cos w$, et on obtient finalement la densité projetée de la sphère isotherme singulière:

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{2GR} = \frac{2}{9}\pi\rho_0r_0\left(\frac{r_0}{R}\right). \quad (609)$$

Lorsque l'on s'approche du centre, le profil de densité de la sphère isotherme est bien représenté par une *loi de Hubble modifiée*:

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) \approx \tilde{\rho}_H(\tilde{r}) = \frac{1}{(1 + \tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (610)$$

La densité projetée est alors obtenue en intégrant le long de la ligne de visée, z :

$$\Sigma(\tilde{R}) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1 + \tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1 + \tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (611)$$

Soit:

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{(1 + \tilde{R}^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1 + \frac{\tilde{z}^2}{1 + \tilde{R}^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (612)$$

L'intégration se fait par deux changements de variables consécutifs:

$$u = \frac{\tilde{z}}{\sqrt{1 + \tilde{R}^2}}; \quad \text{puis : } u = \text{sht}. \quad (613)$$

On obtient alors:

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2} [\text{tht}]_0^{+\infty}, \quad (614)$$

La densité projetée a donc une expression simple:

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2}, \quad (615)$$

où $\tilde{R} = R/r_0$.

À grand rayon, la loi de Hubble modifiée décroît comme \tilde{r}^{-3} et n'est donc pas une bonne approximation d'un profil isotherme. Néanmoins, la densité projetée issue de la loi de Hubble modifiée ajuste remarquablement les profils de brillance de surface des galaxies elliptiques à grand rayon, alors qu'elle n'ajuste pas leur profil à petit rayon. On arrive donc à une situation un peu paradoxale, où $\tilde{\rho}_H$ est une expression simple des régions internes des sphères isothermes et des régions externes des galaxies, mais ne peut être utilisée pour les zones externes des sphères isothermes ou les zones internes des galaxies.

Enfin, la sphère isotherme présente l'inconvénient de conduire à des masses totales infinies. Par conséquent, en dépit de son attrait par les expressions simples qu'elle prédit, la sphère isotherme n'est certainement pas un modèle réaliste au-delà d'une zone limitée. C'est ce qui a par la suite conduit à l'introduction des fonctions de distribution de King et Michie qui définissent un rayon de troncature. Dans la pratique, on définit un rayon de troncature qui correspond à la distance radiale à partir de laquelle la densité du fond de ciel noie totalement l'énergie reçue de l'objet observé. Dans ce cas, il est probable qu'une partie du profil de l'objet correspondant aux zones les plus externes n'est plus accessible, mais on admet que la région noyée dans le fond de ciel reste limitée et n'affecte pas fondamentalement le profil restitué par les régions internes où le ciel n'est plus dominant.

13.5 Annexe E: Angle de déflexion et densité de matière

Dans l'approximation des champs faibles, la métrique est définie par

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl^2 . \quad (616)$$

Pour un photon $ds^2 = 0$ est donc

$$dt = \frac{1}{c} \left(\frac{1 - \frac{2\Phi}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}\right)^{1/2} dl \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl . \quad (617)$$

La figure 100 décrit la configuration et le système de coordonnées. On a donc $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Le principe de Fermat nous dit que les chemins empruntés par les photons sont ceux pour lesquels le temps écoulé sera un extremum. Le temps écoulé est immédiatement donné par l'équation (617) et les chemins peuvent donc être déterminés en calculant ceux qui seront stationnaires par rapport à une petite variation δt . Comme

$$ct = \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl \quad (618)$$

$$ct = \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} dz . \quad (619)$$

Remarquons tout d'abord que l'équation (618) est formellement identique à celle correspondant à la propagation du faisceau dans un milieu d'indice

$$n = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) . \quad (620)$$

Par ailleurs, on peut, sans perdre en généralité, faire varier simplement t suivant la coordonnée $x(z)$. On a alors

$$c\delta t = \int \frac{\partial n}{\partial x} \delta x \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} dz \quad (621)$$

$$+ \int n \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \frac{dx}{dz} \frac{d\delta x}{dz} dz \quad (622)$$

dont le second terme (Eq. (452)) peut être intégré par parties:

$$\int n \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \frac{dx}{dz} \frac{d\delta x}{dz} dz = \left[\delta x n \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]_S^O \quad (623)$$

$$- \int dz \delta x \frac{d}{dz} \left\{ n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\} \quad (624)$$

Le premier terme de droite de l'équation (453) est nul car la variation de δx en $S = source$ et en $O = observateur$ est évidemment nulle. Par conséquent:

$$c\delta t = \int dz \delta x \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \frac{d}{dz} \left[n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right] \right\} . \quad (625)$$

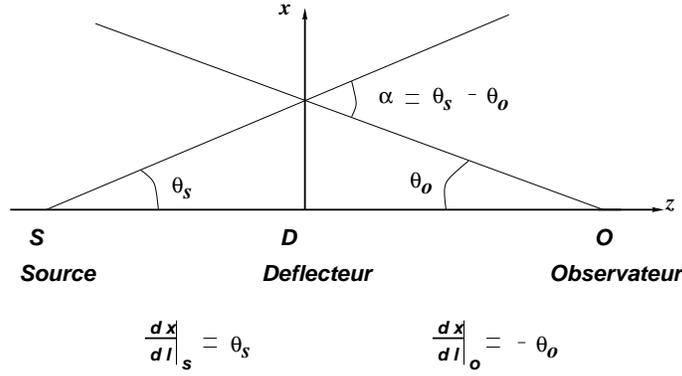


Figure 100: Configuration du “banc d’optique gravitationnel”.

Or $\delta t = 0$ quel que soit le chemin considéré. Comme δx est maintenant en facteur dans l’intégrant, $\delta t = 0$ pour tout δx si le terme multiplicatif associé à δx est nul pour tout z . Par conséquent

$$\frac{\partial n}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \frac{d}{dz} \left[n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]. \quad (626)$$

Que l’on peut intégrer:

$$\int dz \frac{\partial n}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \int d \left[n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]. \quad (627)$$

c’est à dire

$$\int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} dl = \int_S^O d \left[n \frac{dx}{dl} \right]. \quad (628)$$

Le terme de droite est assez clair. Aux bornes S et O le champ du déflecteur est nul est donc $n = 1$. On a donc

$$\int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} dl = \left(\frac{dx}{dl} \right)_S - \left(\frac{dx}{dl} \right)_O. \quad (629)$$

Et dans ce cas, les deux termes de droites sont respectivement les deux angles θ_S et $-\theta_O$ projetés sur le plan (x, z) . Leur différence est donc exactement l’angle de déflexion α projeté sur ce plan. De la même façon on peut déterminer l’angle projeté sur l’axe yz . La somme des deux donne donc α . Pour les mêmes raison le terme de droite généralisé aux deux plans (x, z) et (y, z) s’exprime donc en fonction du gradient de n le long des axes perpendiculaires à z . On obtient donc la loi générale

$$\alpha = \int_S^O \nabla_{\perp} n \, dl. \quad (630)$$

Soit, compte tenu de la relation entre n et Φ :

$$\alpha = -\frac{2}{c^2} \int_S^O \nabla_{\perp} \Phi \, dl. \quad (631)$$

La force gravitationnelle engendrée par le champ de matière de la lentille est

$$\mathbf{F} = G \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}'. \quad (632)$$

On définit le potentiel gravitationnel $\Phi(\mathbf{x})$ par

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' , \quad (633)$$

tel que

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi , \quad (634)$$

et où le gradient est tel que

$$-\nabla\mathbf{x} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} . \quad (635)$$

On peut donc effectuer la substitution dans l'équation (631) pour exprimer l'angle de déflexion en fonction du champ de densité de matière:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int_S^O dl \int d\mathbf{x}' \nabla_{\perp} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (636)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \int_S^O \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dl \quad (637)$$

Dans le cas des petits angles de déflexion, l'intégrale (637) le long du vrai chemin dl peut être approximée par

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \int \frac{d(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (638)$$

soit, en définissant

$$a^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = |(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}|^2 ; \quad \text{et} \quad b = (z' - z) \quad (639)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db}{(a^2 + b^2)^{3/2}} . \quad (640)$$

Cette dernière intégrale peut être calculée en posant $b = a \sinh\psi$. La primitive est $\text{th}\psi$, et l'intégrale vaut $2/a^2$. Donc

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_{\perp}) = -\frac{4G}{c^2} \int d\mathbf{x}'_{\perp} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}|^2} \int \rho(\mathbf{x}') dz' \quad (641)$$

ou bien

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_{\perp}) = -\frac{4G}{c^2} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}|^2} \Sigma(\mathbf{x}'_{\perp}) d\mathbf{x}'_{\perp} = -\frac{4}{c^2} \nabla_{\perp} \Phi_2(\mathbf{x}_{\perp}) , \quad (642)$$

où

$$\Sigma(\mathbf{x}'_{\perp}) = \int \rho(\mathbf{x}') dz' , \quad (643)$$

et

$$\Phi_2(\mathbf{x}_{\perp}) = G \int \Sigma(\mathbf{x}'_{\perp}) \ln |(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}| d\mathbf{x}'_{\perp} \quad (644)$$

Dans le cas d'une masse ponctuelle de masse M , $\Sigma(\mathbf{x}_{\perp}) = M\delta(x_x)\delta(x_y)$, où δ est la distribution de Dirac. Les deux composantes de l'angle de déflexion s'écrivent (sauf pour l'expression de la densité de masse, cette forme est tout à fait générale et s'applique à tout type de déflecteur)

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{pmatrix} = -\frac{4GM}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x_x)\delta(x_y)}{(x_x - x'_x)^2 + (x_y - x'_y)^2} \begin{pmatrix} x_x - x'_x \\ x_y - x'_y \end{pmatrix} dx'_x dx'_y . \quad (645)$$

On peut donc calculer chacune des composantes

$$\alpha_x = -\frac{4GM}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_y) \frac{x_x}{x_x^2 + (x_y - x'_y)^2} dx'_y ; \quad (646)$$

soit

$$\alpha_x = -\frac{4GM}{c^2} \frac{x_x}{x_x^2 + x_y^2} . \quad (647)$$

L'angle de déflexion d'une masse ponctuelle est donc

$$\alpha = -\frac{4GM}{c^2} \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\mathbf{x}}{x} , \quad (648)$$

où $x = |\mathbf{x}|$.

13.6 Annexe F: Notions sur les tenseurs

Avant tout, je rappelle que la *convention d'Einstein* consiste à simplifier l'utilisation des symboles dans les sommes portant sur des indices qui sont répétés une fois en haut et une fois en bas des quantités sommées.

$$\sum_{i=1}^n A_i B^i = A_i B^i . \quad (649)$$

En particulier cette convention est adoptée pour ds^2

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (650)$$

13.6.1 Vecteurs contravariants

Supposons que l'on décrive une trajectoire par une courbe paramétrée sous la forme $x^i = x^i(\lambda)$. La direction de la tangente à cette courbe est déterminée par le vecteur A^i tel que

$$A^i = \frac{dx^i}{d\lambda} . \quad (651)$$

Mais la tangente à une courbe est un invariant; elle ne dépend pas du système de coordonnées, même si ses composantes dans un autre système sont différentes. Supposons donc que dans un nouveau système de coordonnées x'^i , les nouvelles composantes du vecteur représentant la direction de la tangente soient

$$A'^i = \frac{dx'^i}{d\lambda} . \quad (652)$$

Sachant que $x^i = x^i(x'^k)$ et $x'^k = x'^k(x^i)$, on établit immédiatement que

$$A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A^i , \quad (653)$$

où nous avons adopté la convention d'Einstein.

L'équation (653) est la loi de transformation générale de tous vecteurs de type A^i . Les quantités qui se transforment selon cette loi sont appelées des *vecteurs contravariants*.

13.6.2 Vecteurs covariants

Soit $\Phi(x^k)$ une fonction scalaire. L'équation $\Phi(x^k) = C^{te}$ décrit une hyper-surface dont la normale est définie par les 4-vecteurs

$$B_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} . \quad (654)$$

La normale à l'hyper-surface est aussi une quantité indépendante du système de coordonnées. De la même façon, ses nouvelles composantes dans un nouveau système peuvent s'écrire

$$B'_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} , \quad (655)$$

avec

$$B'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i . \quad (656)$$

Les quantités dont les lois de transformation sont selon l'équation (656) sont appelées *vecteurs covariants*.

13.6.3 Tenseurs

Définition: Par définition, un *tenseur contravariant* de rang 2 est un objet défini par la loi de transformation suivante:

$$T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^{mn} \quad (657)$$

(on adopte toujours la convention d'Einstein).

Un *tenseur covariant* de rang 2 est un un objet défini par la loi de transformation suivante:

$$T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_{mn} . \quad (658)$$

Enfin, un *tenseur mixte* de rang 2 est un un objet défini par la loi de transformation suivante:

$$T_k'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_n^m . \quad (659)$$

Les tenseurs généralisent les concepts de scalaires et de vecteurs. En fait, les scalaires, les vecteurs et les tenseurs sont les seules quantités avec lesquels on peut définir des invariants par changement de systèmes de coordonnées. Il était donc naturel qu'Einstein tente d'exprimer les équations reliant la courbure à la matière-énergie sous forme tensorielle. La difficulté des tenseurs est surtout dans le fait que contrairement aux scalaires et aux vecteurs, nous n'avons pas de moyens de nous les représenter.

Exemple: tenseur métrique

Les g_{ik} sont effectivement les composantes d'un tenseur. En effet,

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (660)$$

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} dx'^m \right) \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} dx'^n \right) \quad (661)$$

$$g_{ik} dx^i dx^k = \left(g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \right) dx'^m dx'^n \quad (662)$$

et donc

$$g_{ik} dx^i dx^k = g'_{mn} dx'^m dx'^n \quad (663)$$

qui est bien la loi de transformation d'un tenseur.

Un tenseur satisfaisant $T_{ik} = T_{ki}$ est dit symétrique. Inversement, un tenseur satisfaisant $T_{ik} = -T_{ki}$ est dit antisymétrique. Le tenseur métrique est symétrique.

Contraction des tenseurs : La contraction est une opération de réduction du rang d'un tenseur. Elle s'effectue en identifiant un indice supérieur d'une composante avec un indice inférieur d'une autre composante. Par exemple

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (664)$$

est un scalaire obtenu par contraction d'un vecteur. Il est construit par association des composantes de même indice.

Par la même procédure on peut abaisser ou monter un indice:

$$A_i = g_{ik} A^k \quad \text{ou} \quad A^i = g^{ik} A_k . \quad (665)$$

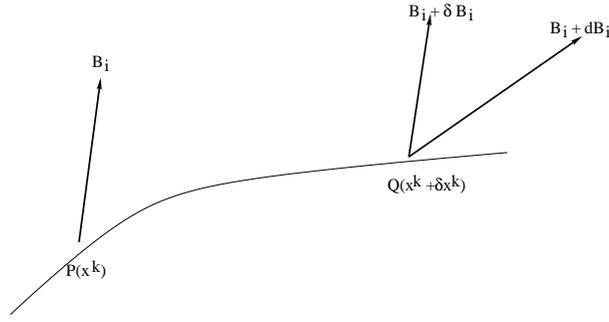


Figure 101: Illustration de la signification de la dérivée covariante. Le vecteur B au point P évolue vers le vecteur $B + dB$ au point Q . Pour établir la variation de B il faut tenir compte du déplacement de B et donc, il faut transporter d'abord B au point Q et l'évaluer à cette position. C'est précisément ce que donne $B + \delta B$.

Dérivée covariante : Soit un champ de vecteurs quelconque $B_i(x^k)$ covariant. Ses dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial B'_k}{\partial x'^m} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} \frac{\partial B_i}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^k} B_i . \quad (666)$$

Dans le cas le plus général le second membre de la partie droite de cette transformation n'est pas nul. Donc, la dérivée partielle d'un tenseur covariant n'est pas un tenseur. Cette situation est illustrée sur la figure 101. P et Q sont deux points voisins de coordonnées (x^k) et $(x^k + \delta x^k)$ où le vecteur B vaut respectivement B et $B + dB$. Mais pour calculer la variation de B de P à Q il faut évaluer la variation de B au même point. Pour cela on effectue un *transport parallèle* des composantes B_i de P vers Q . Les composantes y prennent les valeurs $B_i + \delta B_i$. La différence entre $B(x^k + \delta x^k)$ et B transporté par transport parallèle est un vecteur au point Q . Par conséquent, si on sait comment B est modifié pendant le transport parallèle, alors on peut définir la différentiation du vecteur.

On exprime ce changement par une relation de la forme

$$\delta B_i = \Gamma^l_{ik} B_l \delta x^k , \quad (667)$$

où les Γ^l_{ik} sont appelés les symboles de Christoffel. Il est important de noter que les Γ^l_{ik} sont des objets nouveaux qui s'ajoutent à la métrique. En effet, alors que la métrique définit comment mesurer des distances entre deux points, les Γ^l_{ik} définissent comment construire un vecteur parallèle en des points voisins (c'est plus génériquement une connexion affine).

On a donc:

$$B_i(x^k + \delta x^k) - [B_i(x^k) + \delta B_i] = B_i(x^k) + \delta x^k \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - B_i(x^k) - \delta B_i \quad (668)$$

soit, par identification avec l'équation 667:

$$\delta x^k \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \delta B_i = \left(\frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l \right) \delta x^k . \quad (669)$$

On redéfinit alors la dérivée d'un vecteur par l'expression suivante:

$$B_{i;k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l = B_{i,k} - \Gamma^l_{ik} B_l . \quad (670)$$

$B_{i;k}$ est appelé la *dérivée covariante d'un vecteur covariant*. Notez les symboles “j;k” et “j,k” qui différencient les dérivées partielles et covariantes.

L'objectif de toute cette procédure est de définir un objet dont la variation se transforme comme un tenseur. On peut alors démontrer que, pour que $B_{i;k}$ se transforme comme un tenseur, il faut que les Γ_{ik}^l se transforment de la façon suivante:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \Gamma_{np}^m + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k \partial x'^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^p} . \quad (671)$$

Dans le cas du tenseur métrique, on peut montrer que

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^p g_{pk} - \Gamma_{kl}^p g_{ip} \quad (672)$$

Dans le cas particulier des géométries Riemanniennes (utilisées notamment par Einstein), on peut montrer que

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i \quad \text{et} \quad g_{ik;l} = 0 \quad (673)$$

et dans ce cas, on peut déduire cette relation bien connue:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (674)$$

Différentielle covariante totale : Par définition

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{kl}^i A^k dx^l = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l \quad (675)$$

et

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k \right) dx^l \quad (676)$$

Cas d'un tenseur :

$$D_l A^{ik} = \partial_l A^{ik} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im} \quad (677)$$

Cas d'un scalaire :

$$D\Phi = d\Phi \quad ; \quad D_l \Phi = \partial_l \Phi \quad (678)$$

Tenseur de Riemann-Christoffel : Comme le montre la figure 102, dans le cas le plus général d'une géométrie non-euclidienne, le résultat d'un transport parallèle dépend du chemin de transport. Une question intéressante est de trouver quelles conditions il faudrait sur le vecteur B_i pour que le résultat du transport parallèle soit indépendant du chemin? Cela revient à trouver un vecteur tel que

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^l B_l \quad (679)$$

soit

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^m \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\Gamma_{ik}^l B_l \right) = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^m} B_l + \Gamma_{ik}^l \frac{\partial B_l}{\partial x^m} \quad (680)$$

On peut montrer que

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^m} B_l + \Gamma_{ik}^l \frac{\partial B_l}{\partial x^m} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^n} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{ln}^m \right) B_m \quad (681)$$

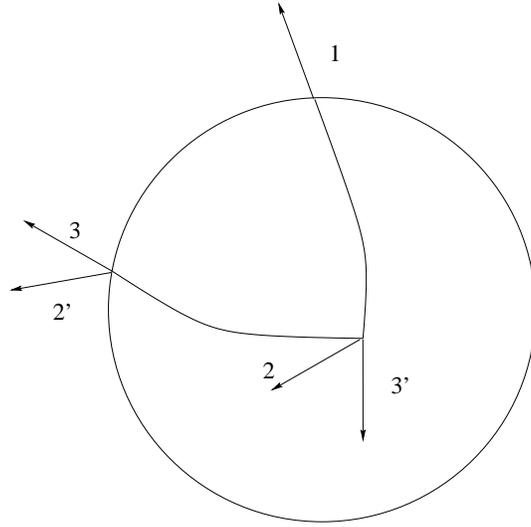


Figure 102: Illustration de la dépendance du transport parallèle avec le chemin. Les chemins (1,2,3) et (1,2',3') déplacent le même vecteur selon deux trajets différents. On voit que le résultat est différent: la direction du vecteur n'est pas identique.

et comme

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^n \partial x^k} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^n} \quad (682)$$

La condition qu'un résultat de transport parallèle soit indépendant du chemin est donc

$$R^m_{i\ kn} = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{ln} - \Gamma^l_{in} \Gamma^m_{lk} \right) = 0 \quad (683)$$

Comme il faut que ce résultat soit indépendant du système de coordonnées, il faut que $R^m_{i\ kn}$ soit un tenseur. Ce n'est pas évident mais cela se démontre effectivement. $R^m_{i\ kn}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel. On peut dire que c'est ce tenseur qui spécifie les propriétés géométriques de l'espace-temps. On peut montrer qu'il s'exprime en fonction du tenseur métrique de la façon suivante:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} (g_{kl,im} + g_{im,kl} - g_{km,il} - g_{il,km}) \quad (684)$$

Tenseur de Ricci et tenseur d'Einstein : Le tenseur de Ricci est construit par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel:

$$R_{ik} = g^{im} R_{iklm} = R^m_{klm} \quad (685)$$

qui est un tenseur symétrique.

Par contraction consécutive on construit ainsi la courbure scalaire R :

$$R = R_{kk} = R^k_k . \quad (686)$$

Le tenseur

$$G_{ik} = g^{kl} R_{kl} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (687)$$

est le tenseur d'Einstein.

13.7 Annexe G: Du tenseur métrique au tenseur d'Einstein: cas d'un univers homogène et isotrope

Cette annexe détaille les calculs conduisant aux expressions de tous les termes des tenseurs et des symboles de Christoffel qui sont nécessaires pour construire les modèles d'univers homogènes et isotropes abordés dans ce cours. Ces démonstrations peuvent être mises de côté, mais elle seront utiles à ceux qui parmi vous souhaiteraient refaire certains de ces calculs, à titre d'exercice, en disposant d'un support pour une auto-correction. Je les recommande plus particulièrement pour ceux qui envisagent de poursuivre les études vers la cosmologie. Pour les autres, ils sont intéressants pour comprendre comment ces tenseurs sont construits progressivement pour finalement nous permettre d'établir les équations de Friedmann.

13.7.1 Tenseur métrique

Nous avons vu que la métrique d'un univers homogène et isotrope est celle de Friedmann-Roberston-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (688)$$

définissant ainsi le tenseur métrique covariant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (689)$$

et du tenseur contravariant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1 - kr^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (690)$$

et par conséquent nous pouvons faire l'identification suivante:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 & , & \quad g_{11} = -\frac{R^2}{1 - kr^2} \\ g_{22} &= -R^2 r^2 & , & \quad g_{33} = -R^2 r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (691)$$

Pour calculer tous les tenseurs décrivant la dynamique de l'Univers il est nécessaire de connaître tous les termes des dérivées du tenseur métrique:

$$\begin{aligned}
\partial_k g_{00} &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\
\partial_0 g_{11} &= -\frac{2R\dot{R}}{1-kr^2} \\
\partial_r g_{11} &= -\frac{2krR^2}{(1-kr^2)^2} \\
\partial_\theta g_{11} = \partial_\phi g_{11} &= 0 \\
\partial_0 g_{22} &= -2R\dot{R}r^2 \\
\partial_r g_{22} &= -2R^2r \\
\partial_\theta g_{22} = \partial_\phi g_{22} &= 0 \\
\partial_0 g_{33} &= -2R\dot{R}r^2\sin^2\theta \\
\partial_r g_{33} &= -2R^2r\sin^2\theta \\
\partial_\theta g_{33} &= -2R^2r^2\sin\theta\cos\theta \\
\partial_\phi g_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{692}$$

où \dot{R} indique la dérivée du facteur d'échelle $R(t)$ par rapport à la coordonnée temporelle $x^0 = ct$:

$$\dot{R}(t) = \frac{dR(t)}{dx^0} = \frac{1}{c} \frac{dR(t)}{dt} \tag{693}$$

Avec les coefficients du tenseur métrique et de ses dérivées, on peut maintenant calculer tous les tenseurs et tous les symboles de Christoffel.

13.7.2 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel de première espèce sont donnés par la définition:

$$\Gamma_{j,kn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} \right) \tag{694}$$

d'où l'on tire toutes les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{0,01} = \Gamma_{0,10} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{0,02} = \Gamma_{0,20} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{00} + \partial_0 g_{20} - \partial_0 g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{0,03} = \Gamma_{0,30} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{00} + \partial_0 g_{30} - \partial_0 g_{03}) = 0 \\
\Gamma_{0,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{01} + \partial_r g_{10} - \partial_0 g_{11}) = \frac{R\dot{R}}{1 - kr^2} \\
\Gamma_{0,12} = \Gamma_{0,21} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{01} + \partial_r g_{20} - \partial_0 g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{0,13} = \Gamma_{0,31} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{01} + \partial_r g_{30} - \partial_0 g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{0,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{02} + \partial_\theta g_{20} - \partial_0 g_{22}) = R\dot{R}r^2 \\
\Gamma_{0,23} = \Gamma_{0,32} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{02} + \partial_\theta g_{30} - \partial_0 g_{23}) = 0 \\
\Gamma_{0,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{03} + \partial_\phi g_{30} - \partial_0 g_{33}) = R\dot{R}r^2 \sin^2\theta \\
\Gamma_{1,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01} - \partial_r g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{1,01} = \Gamma_{1,10} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_r g_{01}) = -\frac{R\dot{R}}{1 - kr^2} \\
\Gamma_{1,02} = \Gamma_{1,20} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{10} + \partial_0 g_{21} - \partial_r g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{1,03} = \Gamma_{1,30} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_r g_{03}) = 0 \\
\Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{11} + \partial_r g_{11} - \partial_r g_{11}) = -\frac{R^2 kr}{(1 - kr^2)^2} \\
\Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{11} + \partial_r g_{21} - \partial_r g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{1,13} = \Gamma_{1,31} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{11} + \partial_r g_{31} - \partial_r g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{1,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{12} + \partial_\theta g_{21} - \partial_r g_{22}) = R^2 r \\
\Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{12} + \partial_\theta g_{31} - \partial_r g_{23}) = 0 \\
\Gamma_{1,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{13} + \partial_\phi g_{31} - \partial_r g_{33}) = R^2 r \sin^2\theta \\
\Gamma_{2,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_\theta g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{2,01} = \Gamma_{2,10} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_\theta g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{2,02} = \Gamma_{2,20} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_\theta g_{02}) = -R\dot{R}r^2 \\
\Gamma_{2,03} = \Gamma_{2,30} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{20} + \partial_0 g_{32} - \partial_\theta g_{03}) = 0 \\
\Gamma_{2,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{21} + \partial_r g_{12} - \partial_\theta g_{11}) = 0 \\
\Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{21} + \partial_r g_{22} - \partial_\theta g_{12}) = -R^2 r \\
\Gamma_{2,13} = \Gamma_{2,31} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{21} + \partial_r g_{32} - \partial_\theta g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{2,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{22} + \partial_\theta g_{22} - \partial_\theta g_{22}) = 0 \\
\Gamma_{2,23} = \Gamma_{2,32} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{22} + \partial_\theta g_{32} - \partial_\theta g_{23}) = 0 \\
\Gamma_{2,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{23} + \partial_\theta g_{32} - \partial_\theta g_{33}) = R^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \\
\Gamma_{3,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_\phi g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{3,01} = \Gamma_{3,10} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_\phi g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{3,02} = \Gamma_{3,20} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{30} + \partial_0 g_{23} - \partial_\phi g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{3,03} = \Gamma_{3,30} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_\phi g_{03}) = -R\dot{R}r^2 \sin^2\theta \\
\Gamma_{3,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{31} + \partial_r g_{13} - \partial_\phi g_{11}) = 0 \\
\Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{31} + \partial_r g_{23} - \partial_\phi g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{31} + \partial_r g_{33} - \partial_\phi g_{13}) = -R^2 r \sin^2\theta \\
\Gamma_{3,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{32} + \partial_\theta g_{23} - \partial_\phi g_{22}) = 0 \\
\Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{32} + \partial_\theta g_{33} - \partial_\phi g_{23}) = -R^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \\
\Gamma_{3,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{33} + \partial_\phi g_{33} - \partial_\phi g_{33}) = 0
\end{aligned} \tag{695}$$

De même, les symboles de Christoffel de seconde espèce sont donnés par la définition:

$$\Gamma_{kn}^p = g^{pj} \Gamma_{j, kn} \tag{696}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,00} = g^{00}\Gamma_{0,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,01} = g^{00}\Gamma_{0,01} = 0 \\
\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,02} = g^{00}\Gamma_{0,02} = 0 \\
\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,03} = g^{00}\Gamma_{0,03} = 0 \\
\Gamma_{11}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,11} = g^{00}\Gamma_{0,11} = \frac{R\dot{R}}{1-kr^2} \\
\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,12} = g^{00}\Gamma_{0,12} = 0 \\
\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,13} = g^{00}\Gamma_{0,13} = 0 \\
\Gamma_{22}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,22} = g^{00}\Gamma_{0,22} = R\dot{R}r^2 \\
\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,23} = g^{00}\Gamma_{0,23} = 0 \\
\Gamma_{33}^0 &= g^{0j}\Gamma_{j,33} = g^{00}\Gamma_{0,33} = R\dot{R}r^2\sin^2\theta \\
\Gamma_{00}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,00} = g^{11}\Gamma_{1,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,01} = g^{11}\Gamma_{1,01} = \frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,02} = g^{11}\Gamma_{1,02} = 0 \\
\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,03} = g^{11}\Gamma_{1,03} = 0 \\
\Gamma_{11}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,11} = g^{11}\Gamma_{1,11} = \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,12} = g^{11}\Gamma_{1,12} = 0 \\
\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,13} = g^{11}\Gamma_{1,13} = 0 \\
\Gamma_{22}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,22} = g^{11}\Gamma_{1,22} = -r(1-kr^2) \\
\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,23} = g^{11}\Gamma_{1,23} = 0 \\
\Gamma_{33}^1 &= g^{1j}\Gamma_{j,33} = g^{11}\Gamma_{1,33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\
\Gamma_{00}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,00} = g^{22}\Gamma_{2,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,01} = g^{22}\Gamma_{2,01} = 0 \\
\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,02} = g^{22}\Gamma_{2,02} = \frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,03} = g^{22}\Gamma_{2,03} = 0 \\
\Gamma_{11}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,11} = g^{22}\Gamma_{2,11} = 0 \\
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,12} = g^{22}\Gamma_{2,12} = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,13} = g^{22}\Gamma_{2,13} = 0 \\
\Gamma_{22}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,22} = g^{22}\Gamma_{2,22} = 0 \\
\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,23} = g^{22}\Gamma_{2,23} = 0 \\
\Gamma_{33}^2 &= g^{2j}\Gamma_{j,33} = g^{22}\Gamma_{2,33} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{00}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,00} = g^{33}\Gamma_{3,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,01} = g^{33}\Gamma_{3,01} = 0 \\
\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,02} = g^{33}\Gamma_{3,02} = 0 \\
\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,03} = g^{33}\Gamma_{3,03} = \frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{11}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,11} = g^{33}\Gamma_{3,11} = 0 \\
\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,12} = g^{33}\Gamma_{3,12} = 0 \\
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,13} = g^{33}\Gamma_{3,13} = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{22}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,22} = g^{33}\Gamma_{3,22} = 0 \\
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,23} = g^{33}\Gamma_{3,23} = \cotg\theta \\
\Gamma_{33}^3 &= g^{3j}\Gamma_{j,33} = g^{33}\Gamma_{3,33} = 0
\end{aligned} \tag{697}$$

Des équations (697) on peut donc conclure que

$$\Gamma_{00}^k = 0 \quad , \quad \Gamma_{0k}^0 = 0 \quad , \quad \Gamma_{k0}^0 = 0 \tag{698}$$

et

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = -\dot{R}g_{\alpha\beta} \quad , \quad \Gamma_{\alpha 0}^\beta = \Gamma_{0\alpha}^\beta = \delta_\alpha^\beta \frac{\dot{R}}{R} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (699)$$

ce qui permet d'écrire de façon plus synthétique

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= 0 & \Gamma_{\alpha\beta}^1 &= 0 & \text{pour } \alpha \neq \beta \\ \Gamma_{\alpha\beta}^2 &= \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \frac{1}{r} & \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \delta_\alpha^1 \delta_\beta^3 \cotg\theta & \text{pour } \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (700)$$

et à partir de (699) et (700) on peut noter que

$$\partial_j \Gamma_{\alpha\beta}^j = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta \quad , \quad \partial_\beta \Gamma_{\alpha 0}^\beta = 0 \quad (701)$$

On peut facilement établir les relations remarquables suivantes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^j &= \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 = 3 \frac{\dot{R}}{R} \\ \Gamma_{1j}^j &= \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 = \frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{2}{r} \\ \Gamma_{2j}^j &= \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 = \cotg\theta \\ \Gamma_{3j}^j &= \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 = 0 \end{aligned} \quad (702)$$

d'où l'on déduit

$$\partial_\beta \Gamma_{\alpha j}^j = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta \quad , \quad \partial_0 \Gamma_{\alpha j}^j = 0 \quad (703)$$

13.7.3 Tenseur de Ricci

Nous savons que le tenseur de courbure s'écrit

$$R_{knl}^j = \partial_n \Gamma_{kl}^j - \partial_l \Gamma_{kn}^j + \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pn}^j - \Gamma_{kn}^p \Gamma_{pl}^j \quad (704)$$

et donc que le tenseur de Ricci s'écrit

$$R_{kn} = R_{knj}^j = \partial_n \Gamma_{kj}^j - \partial_j \Gamma_{kn}^j + \Gamma_{kj}^p \Gamma_{pn}^j - \Gamma_{kn}^p \Gamma_{pj}^j \quad (705)$$

C'est un tenseur symétrique et il n'a donc que 10 composantes indépendantes:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{00}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p0}^j - \Gamma_{00}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{01} = R_{10} &= \partial_r \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{01}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p1}^j - \Gamma_{01}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{02} = R_{20} &= \partial_\theta \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{02}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{02}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{03} = R_{30} &= \partial_\phi \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{03}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{03}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{11} &= \partial_r \Gamma_{1j}^j - \partial_j \Gamma_{11}^j + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p1}^j - \Gamma_{11}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{12} = R_{21} &= \partial_\theta \Gamma_{1j}^j - \partial_j \Gamma_{12}^j + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{12}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{13} = R_{31} &= \partial_\phi \Gamma_{1j}^j - \partial_j \Gamma_{13}^j + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{13}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{22} &= \partial_\theta \Gamma_{2j}^j - \partial_j \Gamma_{22}^j + \Gamma_{2j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{22}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{23} = R_{32} &= \partial_\phi \Gamma_{2j}^j - \partial_j \Gamma_{23}^j + \Gamma_{2j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{23}^p \Gamma_{pj}^j \\ R_{33} &= \partial_\phi \Gamma_{3j}^j - \partial_j \Gamma_{33}^j + \Gamma_{3j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{33}^p \Gamma_{pj}^j \end{aligned} \quad (706)$$

On peut donc calculer tous les termes non nuls du tenseurs de Ricci à partir de (706). Cependant, la série d'identités (699)-(704) peut être très utile pour établir un résultat remarquable concernant ces termes.

Pour $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ et $\alpha \neq \beta$ nous voulons calculer

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\beta \Gamma_{\alpha j}^j - \partial_j \Gamma_{\alpha\beta}^j + \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j - \Gamma_{\alpha\beta}^p \Gamma_{pj}^j \quad (707)$$

en utilisant $\Gamma_{\alpha\beta}^0 = 0$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^1 = 0$ pour $\alpha \neq \beta$ on obtient alors

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \frac{\cotg\theta}{r}, \text{ pour } (\alpha \neq \beta) \quad (708)$$

Donc, le second terme de droite de l'équation (708) est non nul que pour $(\alpha\beta) = (12)$.

Considérons maintenant le premier terme de droite de l'équation (708). On peut l'écrire

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j = \Gamma_{\alpha 0}^p \Gamma_{p\beta}^0 + \Gamma_{\alpha\omega}^p \Gamma_{p\beta}^\omega \quad (709)$$

soit

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j = \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0\beta}^0 + \Gamma_{\alpha 0}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^0 + \Gamma_{\alpha\omega}^0 \Gamma_{0\beta}^\omega + \Gamma_{\alpha\omega}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\omega \quad (710)$$

En calculant ces coefficients, on montre que les trois premiers termes de la partie droite de (710) sont nuls. On a donc

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j = \Gamma_{\alpha\omega}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\omega = \Gamma_{\alpha\omega}^1 \Gamma_{1\beta}^\omega + \Gamma_{\alpha\omega}^2 \Gamma_{2\beta}^\omega + \Gamma_{\alpha\omega}^3 \Gamma_{3\beta}^\omega \quad (711)$$

soit

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j &= \Gamma_{\alpha 1}^1 \Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^1 \Gamma_{1\beta}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^1 \Gamma_{1\beta}^3 \\ &\quad + \Gamma_{\alpha 1}^2 \Gamma_{2\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^2 \Gamma_{2\beta}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^2 \Gamma_{2\beta}^3 \\ &\quad + \Gamma_{\alpha 1}^3 \Gamma_{3\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^3 \Gamma_{3\beta}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^3 \Gamma_{3\beta}^3 \end{aligned} \quad (712)$$

dont les termes se calculent explicitement. On a ainsi

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j = \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3 = \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \frac{\cotg\theta}{r} \quad (713)$$

En substituant (713) dans (709) on obtient finalement

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (714)$$

Par ailleurs, pour $\alpha = 1, 2, 3$ on peut aussi calculer

$$R_{\alpha 0} = \partial_0 \Gamma_{\alpha j}^j - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^0 - \partial_\beta \Gamma_{\alpha 0}^\beta + \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p0}^j - \Gamma_{\alpha 0}^p \Gamma_{pj}^j \quad (715)$$

En utilisant (698), (701) et (703), il est facile de montrer que les trois premiers termes de la partie droite (715) s'annulent ce qui simplifie (715):

$$R_{\alpha 0} = \Gamma_{\alpha 0}^p \Gamma_{p0}^0 + \Gamma_{\alpha\beta}^p \Gamma_{p0}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\beta j}^j \quad (716)$$

En utilisant de nouveau (698), on montre que le premier et le troisième terme de la partie droite de (716) disparaissent. On obtient donc

$$R_{\alpha 0} = \Gamma_{\alpha\beta}^0 \Gamma_{00}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\beta 0}^0 - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\nu \quad (717)$$

qui peut aussi se simplifier en utilisant encore (698) pour éliminer le premier et le troisième terme de la partie droite de (717):

$$R_{\alpha 0} = \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\nu \quad (718)$$

En utilisant (712) on peut calculer ces termes, ce qui donne

$$R_{\alpha 0} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (719)$$

Donc, à partir de (714) et (719) nous concluons que *tous les termes non-diagonaux du tenseur de Ricci sont nuls*

$$R_{kn} = R_{nk} = 0 \quad (k \neq n) \quad (720)$$

et que les seuls termes non-triviaux qu'il faut calculer sont les composantes diagonales.

En utilisant (698)-(703), on trouve alors

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0j}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p0}^j \\ &= 3\partial_0 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + (\Gamma_{01}^1)^2 + (\Gamma_{02}^2)^2 + (\Gamma_{03}^3)^2 \\ &= 3 \frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{11} &= \partial_r \Gamma_{1j}^j - \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_r \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p1}^j - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1j}^j \\ &= \partial_r \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \right) - \partial_0 \left(\frac{\dot{R}R}{1-kr^2} \right) - \partial_r \left(\frac{kr}{1-kr^2} \right) \\ &\quad + \frac{2\dot{R}}{1-kr^2} + \frac{k^2 r^2}{(1-kr^2)^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{3\dot{R}^2}{1-kr^2} \\ &\quad - \frac{kr}{1-kr^2} \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \right) \\ &= -\frac{R^2}{1-kr^2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \right) \\ R_{22} &= \partial_\theta \Gamma_{2j}^j - \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_r \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{2j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1j}^j \\ &= \partial_\theta (\cotg \theta) - \partial_0 (R\dot{R}r^2) - \partial_r [-r(1-kr^2)] \\ &\quad + 2\dot{R}^2 r^2 - 2(1-kr^2) + \cotg^2 \theta - 3\dot{R}^2 r^2 - kr^2 \\ &= -R^2 r^2 \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \right) \\ R_{33} &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_r \Gamma_{33}^1 - \partial_\theta \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{3j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1j}^j - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2j}^j \\ &= -\partial_0 (R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta) - \partial_r [-r(1-kr^2) \sin^2 \theta] \\ &\quad - \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + 2\dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta - 2(1-kr^2) \sin^2 \theta \\ &\quad - 2\cos^2 \theta - 3\dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta + (2-kr^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= -R^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (721)$$

Si on multiplie les composantes covariantes ci-dessus par les composantes correspondantes du tenseur métrique (690) on obtient alors les composantes mixtes du tenseur de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_0^0 &= g^{00}R_{00} = 3\frac{\ddot{R}}{R} \\
R_1^1 &= g^{11}R_{11} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \\
R_2^2 &= g^{22}R_{22} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \\
R_3^3 &= g^{33}R_{33} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}
\end{aligned} \tag{722}$$

et le scalaire de Ricci est donc

$$R_j^j = 3\frac{\ddot{R}}{R} + 3\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}\right) = 6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}\right) \tag{723}$$

13.7.4 Tenseur d'Einstein

A ce stade nous avons désormais tout en mains pour calculer les termes mixtes du tenseur d'Einstein.

$$G_n^k = R_n^k - \frac{1}{2}\delta_n^k R_j^j \tag{724}$$

En substituant les résultats de (722) et (723) dans (724) on obtient alors

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= R_0^0 - \frac{1}{2}R_j^j &= 3\frac{\ddot{R}}{R} - 3\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}\right) \\
&= -3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 &= R_1^1 - \frac{1}{2}R_j^j &= \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \\
&= -3\frac{\ddot{R}}{R} - 3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} \\
&= -\left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}\right)
\end{aligned} \tag{725}$$

Tous les termes des tenseurs sont désormais déterminés et il ne reste plus qu'à se concentrer sur la physique que nous souhaitons décrire dans le tenseur $T_{\mu\nu}$ pour construire les modèles d'univers.

13.8 Annexe H: Perturbations cosmologiques et formation des structures

Cette section ne remplace pas le cours C2 d'Edouard Audit. Elle est cependant utile, notamment pour ceux qui ne suivent pas le cours C2, pour comprendre le chapitre concernant les contraintes sur les paramètres cosmologiques qui se fondent sur l'interprétation des propriétés du spectre de puissance des fluctuations de densité dans l'Univers. Je décris principalement la théorie linéaire et l'histoire du spectre de puissance. Contrairement au cours, la formulation des équations dans cette annexe utilise le facteur d'échelle normalisé, $a(t) = R(t)/R_0$ plutôt que le facteur d'échelle $R()$. Ce choix est simplement motivé par le souci de rester homogène avec le cours C2.

13.8.1 Les équations de la croissance des perturbations

Nous n'avons pas encore d'idées solides sur l'origine des perturbations dans l'Univers. Le paradigme est qu'elles résultent de fluctuations quantiques qui se sont amplifiées pendant la phase d'inflation pour finalement atteindre des échelles macroscopiques. Dans ce scénario, il semble raisonnable de commencer par traiter la croissance des perturbations dans un univers en expansion par la théorie linéaire.

Les équations différentielles qui décrivent la croissance linéaire des perturbations dans l'Univers en expansion doivent être formulées des coordonnées co-mobiles qui dépendent explicitement du temps. Nous allons voir que cette différence avec les équations usuelles conduit à un comportement particulier de l'évolution des perturbations. En toute rigueur nous devrions les exprimer dans un cadre relativiste. Cependant, nous allons nous restreindre ici à la limite Newtonnienne qui s'avère donner des solutions identiques.

Les quatre équations qui contrôlent l'évolution d'un fluide auto-gravitant sont l'équation de continuité, l'équation d'Euler, la conservation de l'énergie et l'équation de Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} u + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) u &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \rho \end{aligned} \tag{726}$$

où u est l'énergie par unité de masse:

$$u = \frac{p}{(1-\gamma)} \rho = \frac{k_B T}{(1-\gamma)} \mu m_h . \tag{727}$$

Les équations ci-dessus sont une description *Eulerienne* du mouvement du fluide, c'est à dire par rapport à un système de coordonnées fixes \mathbf{r} . Pour transcrire ces équations en suivant le mouvement du fluide (*i.e.* description *Lagrangienne*) il faut introduire l'opérateur de dérivée Lagrangienne qu'on applique à toutes fonctions f décrivant le fluide, $\partial f / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f$. Pour effectuer cette transformation, nous allons écrire les variables physiques de position, \mathbf{r} , et de vitesse, \mathbf{v} , comme des perturbations dans un univers en expansion uniforme. Nous introduisons

donc la position co-mobile, \mathbf{x} , et la vitesse particulière, \mathbf{v}_p , telle que

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= a(t) \mathbf{x} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}_p\end{aligned}\tag{728}$$

où $a(t) = R(t)/R_0$ est le facteur d'échelle normalisé du modèle cosmologique en expansion sous-jacent. La vitesse \mathbf{v} est donc la somme de la vitesse d'expansion, $\dot{a}\mathbf{x} = H\mathbf{r}$, avec $H = \dot{a}/a$ la constante de Hubble, et de la vitesse particulière, $\mathbf{v}_p = a\dot{\mathbf{x}}$.

Nous pouvons maintenant introduire ce changement de variables dans les équations décrivant le fluide. La transformation doit se faire en prenant en compte que la dérivée $\partial/\partial t$ est par rapport à t , mais a \mathbf{r} constant. Les transformations qu'il faut donc utiliser sont

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{r}/a(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}} &= a(t)\nabla_{\mathbf{r}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - H\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - H\mathbf{x}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}f\end{aligned}\tag{729}$$

La densité peut s'écrire sous la forme

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_b(t) (1 + \delta(\mathbf{x}, t))\tag{730}$$

où $\rho_b(t)$ décrit l'évolution de la densité de l'Univers non perturbé et δ est l'écart à la solution homogène. δ doit être petit, et comme $\rho \geq 0$, on a nécessairement $\delta \geq -1$. Dans ces conditions, l'équation de continuité devient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{x}\cdot\nabla\right)\rho_b(1 + \delta) + \frac{1}{a}\nabla\rho_b(1 + \delta)(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}_p) = 0\tag{731}$$

D'où l'on tire l'équation décrivant comment le champ de densité sous-jacent évolue ainsi que celle qui exprime l'équation de continuité pour la perturbation de densité:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_b + 3H\rho_b &= 0 \\ \dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla[(1 + \delta)\mathbf{v}_p] &= 0\end{aligned}\tag{732}$$

En substituant de façon analogue dans l'équation de Poisson on obtient

$$\frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_b(1 + \delta)\tag{733}$$

Cette équation peut être généralisée en y ajoutant un terme constant qui pourrait être la constante cosmologique, Λ :

$$\frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_b(1 + \delta) - \Lambda.\tag{734}$$

On peut définir alors un nouveau potentiel, Ψ tel que

$$\Phi = \Psi + \frac{2\pi}{3}G\rho_b a^2 x^2 - \frac{1}{6}\Lambda a^2 x^2\tag{735}$$

En comparant les équations Eq.(734) et Eq.(735), on peut remarquer que si on écrit

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2\Psi + 4\pi G\rho_b a^2 - \Lambda a^2 = 4\pi G\rho_b \delta a^2 + 4\pi G\rho_b a^2 - \Lambda a^2 \quad (736)$$

$(\Phi - \Psi)$ résout alors l'équation de Poisson pour le cas homogène, $\delta = 0$, et Ψ décrit le potentiel qui caractérise la perturbation:

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho_b \delta a^2 \quad (737)$$

On peut donc calculer la force gravitationnelle en fonction du nouveau potentiel Ψ :

$$\nabla\Phi = \nabla^2\Psi + \frac{4\pi}{3}G\rho_b a^2 \mathbf{x} - \frac{1}{3}\Lambda a^2 \mathbf{x} \quad (738)$$

En insérant cette relation dans l'équation d'Euler initiale, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{x}\cdot\nabla \right) (\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}_p) \\ & + \frac{1}{a} [(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}_p)\cdot\nabla] (\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}_p) \\ & = -\frac{1}{a} \left(\nabla\Psi + \frac{4\pi}{3}G\rho_b a^2 \mathbf{x} - \frac{1}{3}\Lambda a^2 \mathbf{x} \right) - \frac{1}{a\rho} \nabla p \end{aligned} \quad (739)$$

On peut développer le premier terme à gauche de cette équation, sachant que les dérivées temporelles supposent que \mathbf{x} est constant. Ce terme s'écrit alors:

$$\ddot{a}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{v}} - H\dot{a}\mathbf{x} - H(\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{v}_p + \frac{1}{a} \left[\dot{a}^2 \mathbf{x} + \dot{a}(\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{v}_p + \dot{a}\mathbf{v}_p + (\mathbf{v}_p\cdot\nabla)\mathbf{v}_p \right] \quad (740)$$

Par ailleurs, nous savons que la densité uniforme, ρ_b , et le facteur d'échelle, $a(a)$, satisfont l'équation de Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_b a + \frac{\Lambda}{3}a . \quad (741)$$

Nous pouvons donc l'utiliser avec l'équation précédente pour déterminer l'évolution temporelle de la vitesse particulière, \mathbf{v}_p

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_p + H\mathbf{v}_p + \frac{1}{a}(\mathbf{v}_p\cdot\nabla)\mathbf{v}_p &= -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{v_s^2}{a}\frac{\nabla\rho}{\rho} \\ \nabla^2\Psi &= 4\pi G\rho_b a^2 \delta , \end{aligned} \quad (742)$$

où v_s est la vitesse du son adiabatique, en supposant que le gaz est polytropique. Sa pression est donc une fonction de la densité et $dp/d\rho = v_s^2$:

$$\nabla p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \nabla\rho = v_s^2 \nabla\rho . \quad (743)$$

Si l'on remplace \mathbf{v}_p par $a\dot{\mathbf{x}}$, on obtient alors l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2H\dot{\mathbf{x}} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{a^2} \nabla \Psi - \frac{v_s^2}{a^2} \frac{\nabla \rho}{\rho} . \quad (744)$$

Ce qui permet d'écrire le système d'équations sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + \nabla [(1 + \delta) \dot{\mathbf{x}}] &= 0 \\ \ddot{\mathbf{x}} + 2H\dot{\mathbf{x}} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{1}{a^2} \nabla \Psi - \frac{v_s^2}{a^2} \frac{\nabla \rho}{\rho} \\ \dot{u} + 3H \frac{p}{\rho} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) u &= -\frac{p}{\rho} \nabla \dot{\mathbf{x}} \\ \nabla^2 \Psi &= 4\pi G \rho_b \delta a^2 \end{aligned} \quad (745)$$

Ces expressions résultent directement des hypothèses que d'une part le gaz est un polytrophe, avec $dp/d\rho = v_s^2$ et que d'autre part le facteur d'échelle satisfait l'équation de Friedmann.

En l'absence de pression ou de force gravitationnelle, l'équation d'euler s'écrit alors

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2H\dot{\mathbf{x}} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{x}} = 0 . \quad (746)$$

De l'expression de la dérivée Lagrangienne, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla)$, il résulte qu'il suffit d'intégrer

$$\frac{d}{dt} a^2 \dot{\mathbf{x}} = 0 , \quad (747)$$

soit $a\dot{\mathbf{x}} \propto 1/a$. Ainsi, à cause de l'expansion de l'Univers, les vitesses individuelles décroissent comme $1/a$.

De la même façon on peut intégrer l'équation de conservation de l'énergie, ce qui conduit à

$$a^{3(\gamma-1)} = \text{cte} \quad (748)$$

et donc $T \propto u \propto 1/a^2$

13.8.2 Croissance linéaire

Le comportement des petites perturbations peut être décrit en linéarisant le système (745):

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + \nabla \dot{\mathbf{x}} &= 0 \\ \ddot{\mathbf{x}} + 2H\dot{\mathbf{x}} &= -\frac{1}{a^2} \nabla \Psi - \frac{v_s^2}{a^2} \nabla \delta \\ \nabla^2 \Psi &= 4\pi G \rho_b \delta a^2 \end{aligned} \quad (749)$$

en calculant la dérivée par rapport au temps de la première équation, puis la divergence de la seconde, ces équations se simplifient. On obtient l'équation différentielle suivante, qui donne l'évolution de la perturbation de densité:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{v_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta = 4\pi G \rho_b \delta \quad (750)$$

On peut noter que pour un fluide auto-gravitant dans un univers sans expansion, $a = 1$ et $H = 0$, et l'équation se réduit à

$$\ddot{\delta} - v_s^2 \nabla^2 \delta = 4\pi G \rho_b \delta \quad (751)$$

dont les solutions sont bien connues. Par exemple, dans l'espace de Fourier $\delta(\mathbf{x}, t) = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$, et la relation de dispersion s'écrit:

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_b \quad (752)$$

Pour des perturbations de longueur d'onde $\lambda/2\pi < \sqrt{v_s/4\pi G \rho_b}$ les solutions correspondent à des ondes acoustiques dont les longueurs d'onde sont modifiées par la gravité. Au fur et à mesure que la perturbation se comprime, le gradient de pression augmente et devient suffisamment élevé pour résister à la gravité ce qui permet au fluide de s'étendre de nouveau, avant de subir une nouvelle compression. La longueur d'onde critique est la longueur de Jeans $\lambda_J 2\pi = \sqrt{v_s/4\pi G \rho_b}$. Les perturbations de longueur d'onde $> \lambda_J$ sont toujours instables et s'effondrent sous l'effet de la gravité avec un taux de croissance exponentiel $\exp(-\omega_I t)$ où ω_I est la partie imaginaire de ω .

Mais pour un univers en expansion, $H \neq 0$, le comportement est différent. Les solutions de type $\delta \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ ne sont plus valides puisque H et a dépendent aussi explicitement du temps. Nous devons donc exprimer les solutions pour chacune des périodes de l'histoire de l'Univers.

- **Univers dominé par la matière: cas d'univers EdS**

Nous avons vu dans le cours que pour un univers EdS pendant la période dominée par la matière, nous avons

$$\begin{aligned} a &= a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \\ H &= \frac{2}{3t} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_b = \frac{4}{9t^2} \end{aligned} \quad (753)$$

En négligeant le terme de pression, ces équations conduisent à

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t} \dot{\delta} = \frac{2}{3t^2} \delta, \quad (754)$$

dont les solutions sont de la forme $\delta \propto t^n$. Plus précisément, la solution générale est

$$\delta = At^{2/3} + Bt^{-1} = Aa + Ba^{-3/2} \quad (755)$$

Les modes croissants sont donnés par le premier terme. On peut noter que ces modes sont des lois de puissance, ce qui exprime un comportement différent des perturbations dans un univers en expansion. Les modes croissent donc beaucoup plus lentement que pour un fluide sans expansion.

Un point à souligner plus particulièrement est le comportement de modes croissants avec le redshift: $\delta \propto a \propto 1/(1+z)$. Comme les fluctuations de température observées dans le CMB à $z \sim 1000$ sont de l'ordre de 10^{-5} , et donc la théorie linéaire s'applique, elles devraient être aujourd'hui 1000 fois plus grandes, soit 10^{-2} . Ces fluctuations ne pourraient pas donc expliquer l'origine des structures non-linéaires actuelles. Pour résoudre cette contradiction, il semble inévitable de postuler l'existence d'une matière noire à grande échelle.

- **Univers dominé par la matière, $\Omega \ll 1$**

Pour un univers ouvert sans constante cosmologique nous avons vu dans le cours que la période dominée par la matière conduit à une évolution du facteur d'échelle de la forme $a \propto t$, et

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} + \frac{1}{a^2} \simeq \frac{1}{a^2}. \quad (756)$$

En substituant $H = \dot{a}/a = 1/t$ dans l'Eq.(750) et en négligeant la pression, nous avons

$$\ddot{\delta} + \frac{2}{t}\dot{\delta} = 0 \quad (757)$$

dont la solution générale est

$$\delta = A + Bt^{-1}. \quad (758)$$

Ainsi, à cause de la faible densité de matière, toutes les perturbations cessent de croître.

- **Fluctuations de matière dans un fond relativiste homogène**

Dans un univers qui serait composé d'un fluide relativiste sans collision, comme par exemple des photons ou des neutrinos, le comportement dans les périodes précoces de l'Univers est dominé par les propriétés des composantes relativistes. Nous avons vu dans le cours que dans ce cas

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_R) \quad (759)$$

avec $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$ et $\bar{\rho}_R \propto a^{-4}$.

Si le fond relativiste reste homogène, il n'y a pas de perturbations de rayonnement. Dans ce cas les perturbations sont déterminées par l'équation différentielle

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta \quad (760)$$

La seconde équation de Friedmann s'écrit dans ce cas relativiste

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p) = -\frac{4\pi H}{3}(\rho_m + 2\rho_R) \quad (761)$$

car $p \simeq 0$ et $p_R = \rho_R/3$. en combinant avec l'équation pour H , on obtient

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho_R(2 + \eta) = -\frac{1}{2}\frac{\eta + 2}{\eta + 1}H^2 \quad (762)$$

où $\eta = \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_R = \eta_0 a$.

En utilisant η comme une nouvelle variable de temps, on a $\dot{\eta} = \eta H$ et le système

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \delta' \eta H \\ \ddot{\delta} &= \delta'' (\eta H)^2 + \delta' \eta_0 \dot{a} = \delta'' (\eta H)^2 - \frac{1}{2}\frac{\eta + 2}{\eta + 1}\eta H^2 \end{aligned} \quad (763)$$

où $\delta' = \partial\delta/\partial\eta$ et $\delta'' = \partial^2\delta/\partial\eta^2$. L'équation décrivant les perturbation s'écrit donc finalement

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\eta^2} + \frac{(2 + 3\eta)}{2\eta(1 + \eta)} \frac{\partial\delta}{\partial\eta} = \frac{3}{2}\frac{\delta}{\eta(1 + \eta)} \quad (764)$$

Le modes croissants sont donc ceux pour lesquels

$$\delta = 1 + 3\eta/2. \quad (765)$$

Par conséquent, les fluctuations ne commencent à croître que lorsque $\eta = \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_R \leq 1$, c'est à dire lorsque la matière domine: dans un univers dominé par le rayonnement les fluctuations ne peuvent pas croître. C'est un point important et déterminant pour l'évolution du spectre de puissance des fluctuations et l'histoire de la formation des structures.

13.8.3 Analyse du champ de densité dans l'espace de Fourier

Spectre de puissance et fonctions de corrélation : Il est possible de décomposer le champ de densité dans l'espace de Fourier

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \sum \delta(\mathbf{k}, t) = \frac{V}{(2\pi)^2} \int \delta(\mathbf{k}, t) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) d\mathbf{k}, \quad (766)$$

où l'excès de densité est toujours défini par $\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\mathbf{x}, t))$, et V est un volume suffisamment grand. Comme $\delta(\mathbf{x})$ est réel et a une valeur moyenne nulle, $\langle \delta(\mathbf{k}, t) \rangle = 0$ et $\delta(\mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{k}, t)^*$. Par ailleurs, l'équation (750) étant linéaire, chaque mode de Fourier $\delta(\mathbf{k}, t)$ satisfait, indépendamment des autres modes, l'équation de croissance linéaire.

Les propriétés statistiques du champ de densité sont déterminées par une suite infinie de fonctions de corrélation

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle &= \xi_2 \\ \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_3) \rangle &= \xi_3 \\ \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_3) \delta(\mathbf{x}_4) \rangle &= \xi_4. \end{aligned} \quad (767)$$

Comme nous avons vu dans le cours, l'Univers étant homogène et isotrope, ces fonctions de corrélation ne doivent dépendre que de la distance relative entre les particules, $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$.

Si l'on décompose par exemple ξ_2 dans l'espace de Fourier on a

$$\begin{aligned} \xi_2(\boldsymbol{\delta}) &= \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \int \delta(\mathbf{k}) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) \int \delta(\mathbf{q}) \exp(i(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}))) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} |\delta(\mathbf{k})|^2 \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta})) \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta(\mathbf{k})|^2 \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta})) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (768)$$

où nous avons utilisé la propriété

$$\frac{1}{V} \int \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \delta_D(\mathbf{k}) \quad (769)$$

où δ_D est la fonction delta de Dirac.

La fonction $P(k) = \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle$ est le spectre de puissance du champ de densité.

Les champs Gaussiens : Les champs de densité où $\delta(\mathbf{k})$ sont des variables Gaussiennes sont ceux pour lesquels les parties réelles et imaginaires de δ , δ_R, δ_I , ont indépendamment une distribution Gaussienne, de moyenne nulle et de dispersion $P(k)/2$, soit $\langle |\delta|^2 \rangle = \langle |\delta_R|^2 \rangle + \langle |\delta_I|^2 \rangle = P$. Ces champs sont appelés *champs Gaussiens*.

Si on définit le champ complexe par $\delta = \delta_R + i\delta_I$, d'amplitude $A = \sqrt{(\delta_R^2 + \delta_I^2)}$ et d'angle de

phase $\theta = \delta_I/\delta_R$, la distribution de probabilité de A et θ est donnée par

$$\begin{aligned} P(\delta_R) d\delta_R P(\delta_I) d\delta_I &= \frac{1}{2\pi P/2} \exp\left[-\frac{(\delta_R^2 + \delta_I^2)}{P}\right] d\delta_R d\delta_I \\ &= \frac{1}{2\pi P/2} A \exp\left(-\frac{A^2}{P}\right) dA d\theta \end{aligned} \quad (770)$$

ce qui signifie que l'amplitude des modes de Fourier est distribuée suivant une loi de la forme $A \exp(A/P)$ et que les phases sont distribuées aléatoirement entre $[0, 2\pi[$.

Si les modes de Fourier sont Gaussiens, alors le champ de densité dans l'espace réel est une somme de champs Gaussiens. C'est donc aussi un champ Gaussien de probabilité

$$p(\delta) d\delta = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp\left(\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta \quad (771)$$

Comme $\delta > -1$, ceci n'est possible que lorsque $\sigma \ll 1$. En d'autres termes, le champ ne peut être Gaussien que pour des petites perturbations. Donc, au fur et à mesure que les perturbations croissent, le champ s'écarte inévitablement d'un champ Gaussien.

Les champs Gaussiens ont la propriété remarquable que toutes les fonctions de corrélation d'ordre élevé peuvent être calculées en termes de puissance spectrale ou de la fonction de corrélation à deux points. Ainsi donc toutes leurs propriétés statistiques sont déterminées par $P(k)$. Comme les propriétés observées du champ de fluctuations de température du CMB semblent Gaussiennes, d'une part, et que les modèles les plus simples d'inflation prédisent un champ Gaussien, d'autre part, les propriétés du spectre de puissance contiennent vraisemblablement la quasi-totalité des informations statistiques décrivant l'Univers. Elles sont donc parmi les données les plus importantes que l'on cherche à obtenir de la cosmologie observationnelle.

Fluctuations en masse : La décomposition de Fourier peut aussi être exploitée pour estimer la variance de la masse dans des sphères de taille données, V_W . La densité moyenne dans un tel volume est $\bar{M} = \bar{\rho}V_W$.

On s'intéresse aux amplitudes des fluctuations de la masse autour de la valeur moyenne, soit $\langle(\delta M/M)^2\rangle$. Pour cela, on définit une fonction filtre, W , telle que

$$\int W(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = V_W \quad (772)$$

Lorsque ce filtre est centrée sur la position \mathbf{x} , la masse contenue dans le filtre est

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}) &= \int \rho(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \\ &= \int \bar{\rho}(1 + \delta(\mathbf{x}')) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \\ &= \bar{\rho} \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \bar{\rho} \int \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \cdot W(\mathbf{q}) \cdot \exp(i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (773)$$

Comme $\int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = V \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{q})$, on a

$$M(\mathbf{x}) = \bar{M} \left[1 + \frac{V}{V_W} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}) W(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right]. \quad (774)$$

On peut alors calculer la variance de la masse:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{M(\mathbf{x}) - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{V} \int \left(\frac{M(\mathbf{x}) - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^2 d\mathbf{x} \\
&= \\
&= \frac{V}{V_W^2} \int \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \delta(\mathbf{k}) W(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \delta(\mathbf{q}) W(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \\
&= \frac{V^2}{V_W^2} \sum_{\mathbf{k}} |\delta(\mathbf{k})|^2 |W(\mathbf{k})|^2 \\
&= \\
&= \frac{V^3}{(2\pi)^3 V_W^3} \int |\delta(\mathbf{k})|^2 |W(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \\
&= \\
&= \frac{1}{V_W^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 |\delta(\mathbf{k})|^2 V^3}{2\pi^2} |W(\mathbf{k})|^2 .
\end{aligned} \tag{775}$$

Par conséquent, la quantité

$$\Delta^2(k) = \frac{k^3 |\delta(\mathbf{k})|^2 V^3}{2\pi^2} , \tag{776}$$

est une mesure de la contribution des fluctuations à l'échelle k aux fluctuations de masse par intervalle logarithmique de k .

On peut noter que

$$V_W = \int W(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k}} W(\mathbf{k}) \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = V W(\mathbf{k} = 0) \tag{777}$$

et donc $W(\mathbf{k} = 0) = V_W/V$.

Un cas particulier intéressant de filtre qui opère directement dans l'espace de Fourier est celui tel que

$$\frac{\delta M}{\bar{M}} = \sum_{k < k_m} \delta(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) , \tag{778}$$

où $\bar{M} \propto 1/k_m^3$. Ce type de filtre permet d'isoler la contribution des modes de grande longueur d'onde, tels que $\lambda > 2\pi\lambda_m/k_m \sim M^{1/3}$, aux fluctuations de masse. Pour ce type de filtre on a donc

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}} \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{V} \sum_{k < k_m ; q < k_m} \int \delta(\mathbf{k}) (\mathbf{q}) \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \\
&= \sum_{k < k_m} |\delta(\mathbf{k})|^2 \\
&= \\
&= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{k_m} k^2 P(k) dk
\end{aligned} \tag{779}$$

La fonction de transfert : Si nous pouvons connaître le spectre de puissance à un temps donné t_0 , alors on peut utiliser la théorie linéaire pour calculer le spectre de puissance à n'importe quel instant t :

$$P(k, t) = T^2(k, t) P(k, t_0) \tag{780}$$

Comme les modes de Fourier évoluent de façon indépendante des autres, $T(k, t)$ ne dépend pas de la forme de $P(k, t_0)$. $T(k, t)$ est appelé la *fonction de transfert*. Comme $P(k) = \langle |\delta(k)|^2 \rangle$, T décrit donc aussi la façon dont δ croît :

$$\delta(k, t) = T(k, t) \delta(k, t_0) . \quad (781)$$

Donc, si le champ des fluctuations primordiales de densité est Gaussien alors sa statistique est complètement déterminée par le spectre de puissance $P(k, t) = T^2(k, t) P(k, t_0)$ et par conséquent, $T(k, t)$ et $P(k, t_0)$ ensemble fournissent une description complète de la façon dont les structures évoluent dans le régime linéaire.

Deux points importants méritent d'être détaillés :

- **La croissance des structures de taille "super-horizon"**

Pour le moment, nous avons calculé le taux de croissance des structures dans l'approximation Newtonnienne uniquement. Ces résultats ne sont en principe valides que pour des longueurs d'onde telles que $\lambda = 2\pi/k \ll ct$, où t est l'âge de l'Univers. Mais les modes qui respectent aujourd'hui cette condition ont été dans le passé plus grands que l'horizon et ils devraient donc être traités aussi dans un contexte relativiste. Pour décrire cette phase en évitant un formalisme trop lourd et pour ne pas dépasser l'objectif de cette annexe, nous allons néanmoins adopter une approche Newtonnienne. Elle n'est pas rigoureusement exacte, mais il se trouve qu'elle conduit à la bonne solution.

Considérons des petites perturbations dans un univers de Friedmann plat, $k = 0$. L'équation de Friedmann non perturbée est donc

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \quad (782)$$

Considérons maintenant une perturbation. Localement, elle est équivalente à un univers de Friedmann, de même taux d'expansion, mais où la densité ρ_1 est simplement un peu plus élevée. Cette région correspond donc à un univers fermé caractérisé par l'équation suivante

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_1 - \frac{\kappa}{a^2} \quad (783)$$

où la courbure κ est positive. On peut comparer ces deux modèles pour des constantes de Hubble identiques. Dans ce cas, le contraste de densité entre ces deux "univers" est

$$\delta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\kappa/a^2}{8\pi G\rho_0/3} \quad (784)$$

Tant que δ est petit, les facteurs d'échelle a des deux modèles sont quasi-identiques. Par conséquent, l'équation (784) nous dit que δ croît comme $1/\rho_0 a^2$, soit $\delta \propto a$, dans un modèle dominé par la matière ($\rho_0 \propto a^{-3}$), et $\delta \propto a^2$, dans un modèle dominé par le rayonnement ($\rho_0 \propto a^{-4}$).

Cette discussion montre que les perturbations de densité croissent aussi lorsqu'elles sont "hors de l'horizon". Cela peut paraître contre-intuitif puisque les régions de cette perturbation ne sont pas connectés causalement.

- **La fonction de transfert pour un modèle CDM**

Pour déterminer la forme générale de la fonction de transfert $T(k)$, considérons des perturbations d'échelle suffisamment grande pour qu'elles ne soient "entrées dans l'horizon" que lorsque l'Univers était déjà dominé par la matière. Leur taux de croissance est donc

$\propto a$, et ceci pour toutes ces échelles, à la fois lorsqu'elles sont à l'extérieur et à l'intérieur de l'horizon. Par conséquent $T(k) = 1$ est constant pour toutes les longueurs d'onde.

Considérons maintenant des échelles plus petites qui sont entrées dans l'horizon alors que l'Univers était dominé par le rayonnement. On a vu que pendant cette phase, les perturbations s'arrêtent de croître, une fois qu'elles sont entrées dans l'horizon. Par contre, hors de l'horizon elles croissent comme a^2 . Leur comportement est donc assez différent au cours des deux périodes. Maintenant, considérons deux de ces perturbations dont les longueurs d'onde co-mobiles sont respectivement λ_1 et $\lambda_2 < \lambda_1$. Le rapport de leur facteur d'échelle a_1 et a_2 lorsque ces perturbations entrent dans l'horizon seront telles que $a_1/a_2 = \lambda_1/\lambda_2$ et donc leur taux de croissance seront tels que $(a_1/a_2)^2 = (k_2/k_1)^2$. Par conséquent $T(k) \propto 1/k^2$: plus la longueur d'onde est courte, plus vite elle rentre dans l'horizon, plus tôt elle sera bloquée par le rayonnement. L'ensemble du spectre aux petites échelles sera significativement altérée par ce processus.

En résumé

$$\begin{aligned} T(k) &\propto 1 && \text{pour } k \ll k_{eq} \\ &\propto 1/k^2 && \text{pour } k \gg k_{eq} \end{aligned} \quad (785)$$

où $\lambda_{eq} = 2\pi/k_{eq}$ est la taille co-mobile de l'horizon à la période d'égalité matière-rayonnement'

$$\lambda_{eq} \simeq 10 \left(\Omega_m h^2 \right)^{-1} \text{ Mpc} \quad (786)$$

En pratique, une représentation plus réaliste de la fonction de transfert pour un modèle CDM peut être approximée par la relation suivante:

$$T(k) = \left[1 + \left((ak) + (bk)^{3/2} + (ck)^2 \right)^\nu \right]^{-1/\nu} \quad (787)$$

où

$$\begin{aligned} a &= 6.4 \left(\Omega_m h^2 \right)^{-1} \text{ Mpc} \\ b &= 3.0 \left(\Omega_m h^2 \right)^{-1} \text{ Mpc} \\ a &= 1.7 \left(\Omega_m h^2 \right)^{-1} \text{ Mpc} \\ \nu &= 1.13 \end{aligned} \quad (788)$$

L'altération du spectre par ce phénomène est illustrée sur la Fig.103. On peut ajouter quelques remarques

- On normalise la fonction de transfert telle que $T(k) = 1$ à grande échelle. Mais cela ne signifie pas que les perturbations aux grandes échelles ne croissent pas. Elles croissent effectivement!
- La discussion ci-dessus ne concerne que la matière noire et le rayonnement. Il faudrait aussi prendre en considération les baryons. Ces particules induisent une complication supplémentaire car les baryons sont couplés aux rayonnement quand le plasma est ionisé à cause de la diffusion Thomson. En particulier pendant la phase dominé par le rayonnement, alors que les perturbations de matière noire croissent, les perturbations de baryons peuvent subir les effets de la pression. Lorsque le plasma se recombine les baryons sont rapidement captés par la matière noire. Mais au plus petites échelles la pression interdit aux perturbations de croître et engendre des oscillations de $T(k)$ qui correspondent à des ondes acoustiques. La figure 104 montre diverse fonctions de transfert et illustre comment la nature de la matière modifie le spectre de puissance.
- Le modèle CDM "standard" (SCDM: $\Omega_0 = 1.0$, $\Omega_\Lambda = 0.0$, $h = 0.5$, $n = 1$ (initial)) est décrit par une fonction de transfert ayant la forme

$$T(q) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} \left[1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4 \right]^{-1/4} \quad (789)$$

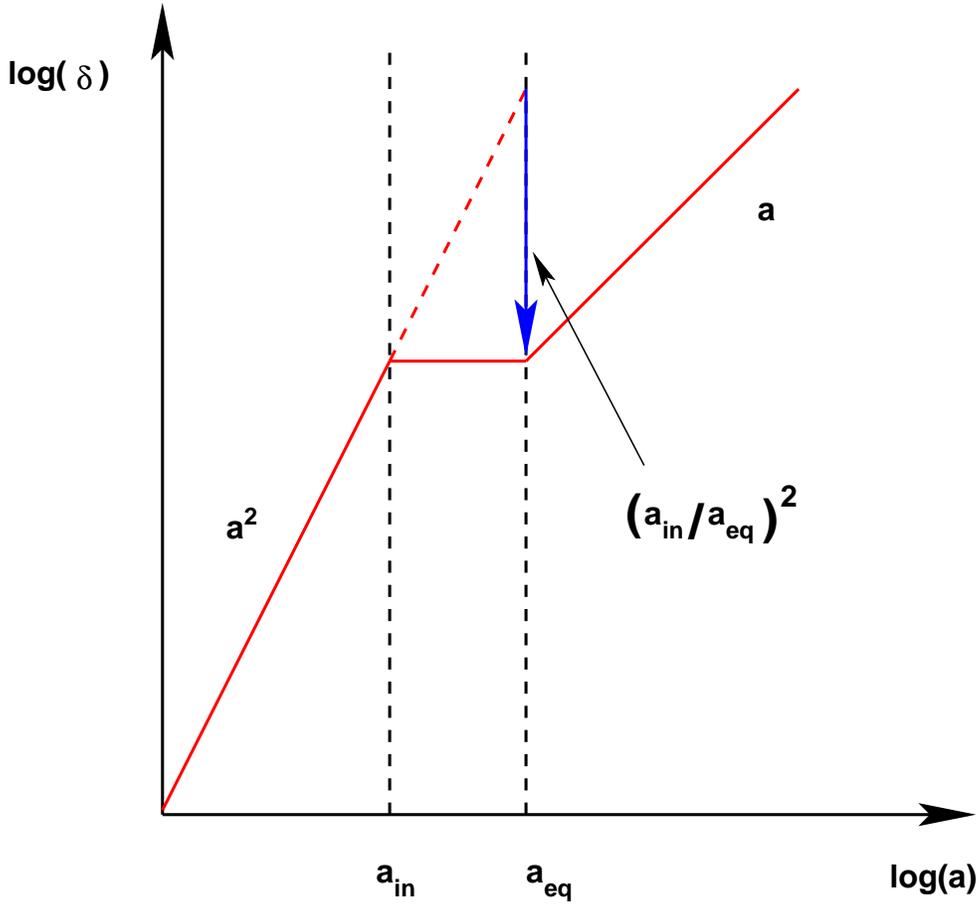


Figure 103: Altération de la croissance des perturbations qui entrent dans l’horizon pendant la période radiative. L’amplitude est amortie d’un facteur $(a_{in}/a_{eq})^2$ où a_{in} est le facteur d’échelle au moment où la perturbation ”entre” dans l’horizon et a_{eq} est le facteur d’échelle au moment où l’Univers entre dans la période dominée par la matière.

où $q = k/h\Gamma$ et Γ est le ”paramètre de forme”: $\Gamma \simeq \Omega_m h$.

- Pour une description plus précise des fonctions de transfert, on utilise généralement l’approximation suivante

$$P(k) = Ak^n T^2(k) \frac{g^2(\Omega(t))}{g^2(\Omega_0)} \quad (790)$$

où $g(\Omega, \Omega_\Lambda)$ est le taux de croissance des structures. Une approximation courante est

$$g(\Omega, \Omega_\Lambda) = \frac{5}{2}\Omega \left[\Omega^{4/7} - \Omega_\Lambda + \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{70}\right) \right]^{-1}. \quad (791)$$

13.8.4 Le spectre primordial des fluctuations

La formulation de la croissance des perturbations n’est pas suffisante pour décrire complètement le spectre de puissance. En particulier, elle ne nous donne aucune indication sur l’origine des fluctuations de densité et donc sur la forme du spectre primordial des fluctuations. La forme $P(k, t \rightarrow 0) \propto k^{n=1}$, appelé spectre invariant d’échelle, fut proposée par Harrison et

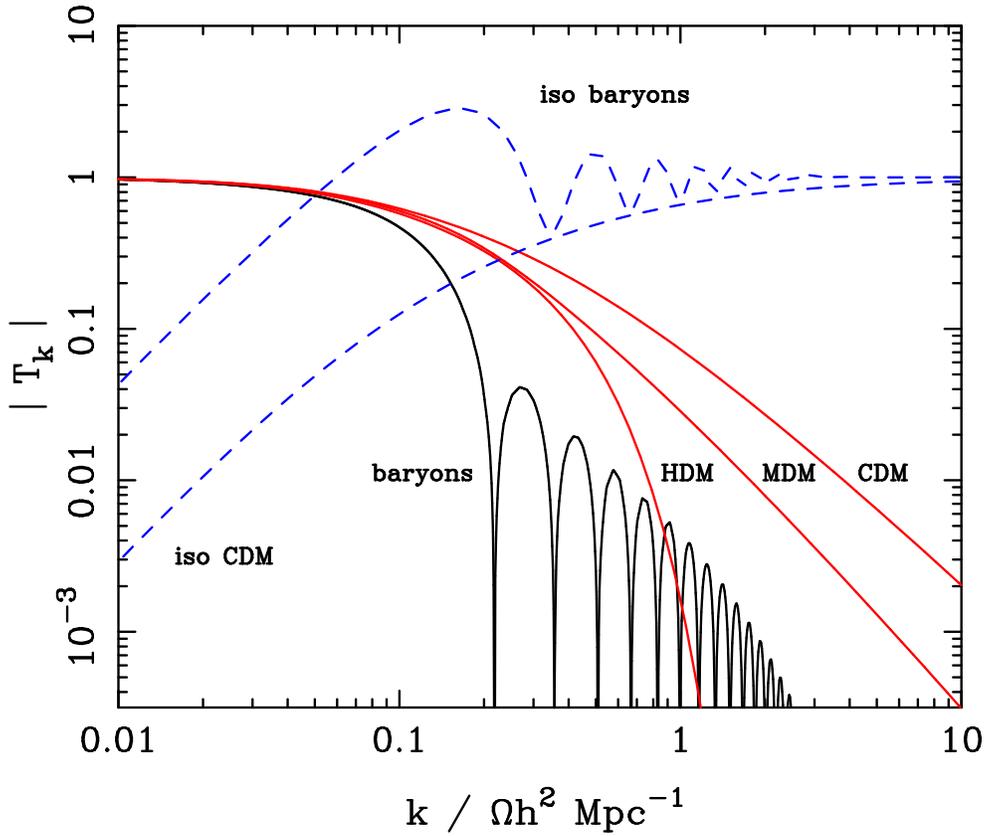


Figure 104: Exemples de fonctions de transfert pour des perturbations de matière, Les lignes continues sont des perturbations adiabatiques (les photons et la matière sont perturbées); les lignes continues sont des perturbations isocourbes (la courbure est constante). Plusieurs types de matière sont montrées: pure CDM, pure HDM. MDM est un mélange HDM et CDM. Pour les modèles de matière noire, le nombre d'onde caractéristique est à une échelle proportionnelle à $\Omega_m h^2$, et donc l'échelle de coupure correspond à celle de l'horizon à l'égalité matière-rayonnement. La figure montre des modèles ayant tous $\Omega_m = 1$, $h = 0.5$. D'après Peacock et al 2006, ESA-ESO Working Groups Report No. 3 on Fundamental Cosmology

Zel'dovich indépendamment, en se fondant sur des arguments de symétrie. Il se trouve que les modèles d'inflation prédisent que le spectre primordial doit être très proche d'un spectre invariant d'échelle, $n = 1$. Remarquablement, les mesure d'anisotropies du CMB montrent que leur spectre est celui que prédit un modèle de perturbations adiabatiques invariante d'échelle engendrée par les scénarios inflationnaires les plus simples. Il est donc intéressant de se pencher un peu sur ce "spectre de Harrison-Zel'dovich"

Soit $P(k, t \rightarrow 0) = P(k)$. Harrison et Zel'dovich recherchent un spectre tel qu'il n'y ait aucune échelle associée à $P(k)$, ce qui indique que $P(k) \propto k^n$. Considérons alors une sphère de rayon co-mobile R et de masse typique $M \propto R^3$. Compte tenu de la section précédente, pour un spectre de puissance en k^n , la fluctuation de masse est

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle = \int_0^{1/R} P(k) k^2 dk \propto M^{-(n+3)/3} \quad (792)$$

On peut donc estimer que la fluctuation du potentiel gravitationnel correspondant à cette fluctuation de masse est

$$\delta\Phi \sim \frac{\delta M}{R} \sim M^{-(n+3)/6} M^{2/3} \sim M^{(1-n)/6} \quad (793)$$

et par conséquent si $n = 1$ les fluctuations de potentiel sont dites *invariants d'échelle*.

Une autre façon de discuter ce point est de considérer l'amplitude des fluctuations au moment où elles entrent dans l'horizon. Sachant que les fluctuations hors de l'horizon pendant la période radiative sont telles que $\delta \propto a^2 \propto t$, la variance des fluctuations de densité dans une région de taille co-mobile R_h est

$$\left\langle \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right)^2 \right\rangle = t^2 \int_0^{1/R_h} P(k) k^2 dk \sim t^2 R_H^{-(n+3)} \quad (794)$$

Les fluctuations entrant dans l'horizon sont telles que $rR_h = ct$, soit $R_H \propto t/a \propto t^{1/2}$ pendant la période radiative. Donc, lorsque la perturbation entre dans l'horizon, son amplitude est $\propto R_H^4 R_H^{-(n+3)} = R_H^{-(n-1)}$. Elles sont donc invariantes d'échelle si $n = 1$

13.8.5 La croissance hiérarchique des structures

Pour le moment, nous nous sommes concentrés sur des fluctuations d'amplitude $\delta \ll 1$. Bien que nous n'ayons pas encore traité le cas non-linéaire, on peut raisonnablement imaginer que lorsque l'on s'approche de $\delta \sim 1$, la perturbation doit s'effondrer sur elle-même et se découpler progressivement de l'expansion. Il est intéressant de voir comment le processus dépend de l'échelle.

Conformément aux modèles que nous venons de décrire dans les sections précédentes, le spectre de puissance doit évoluer sous la forme

$$P(k, t) = T^2(k, t) P(k, t_0) \propto k^m \quad (795)$$

avec $m \sim 1$ aux grandes échelles et $m \sim -3$ aux petites échelles. Dans ce cas, en poursuivant notre raisonnement concernant la dépendance des fluctuations de masse en fonction de la masse des fluctuations, on doit avoir

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle = \int_0^{1/R} P(k) k^2 dk \propto M^{-(n+3)/3} \quad (796)$$

Donc, si $m \sim -3$ l'amplitude des fluctuations décroît lorsque l'échelle de la perturbation croît, ce qui signifie que les petits objets sont les premiers à devenir non-linéaires et qu'ils s'effondreront avant les objets les plus massifs. Ce phénomène est appelé la *croissance hiérarchique* et traduit le fait que les objets les plus massifs se forment à partir de la fusion de petites structures. Compte tenu de la valeur de $m \sim -3$, ce scénario correspond notamment au modèle CDM. A partir de ces arguments simples, la forme générale du spectre d'un modèle CDM peut ainsi être grossièrement dégagée. Elle est illustrée sur la Fig.105.

13.8.6 La croissance non-linéaire des perturbations cosmologiques

La théorie linéaire discutée auparavant ne représente pas l'état actuel des galaxies, des groupes ou des amas de galaxies dont les contrastes de densité dépassent 100 à 10000. Pour aborder la formation de ces systèmes la théorie de la formation des structure doit être complétée.

L'effondrement sphérique : Considérons une région sphérique de densité uniforme ρ et de rayon R . D'après le théorème de Newton (ou de Birkhoff en relativité générale), nous savons

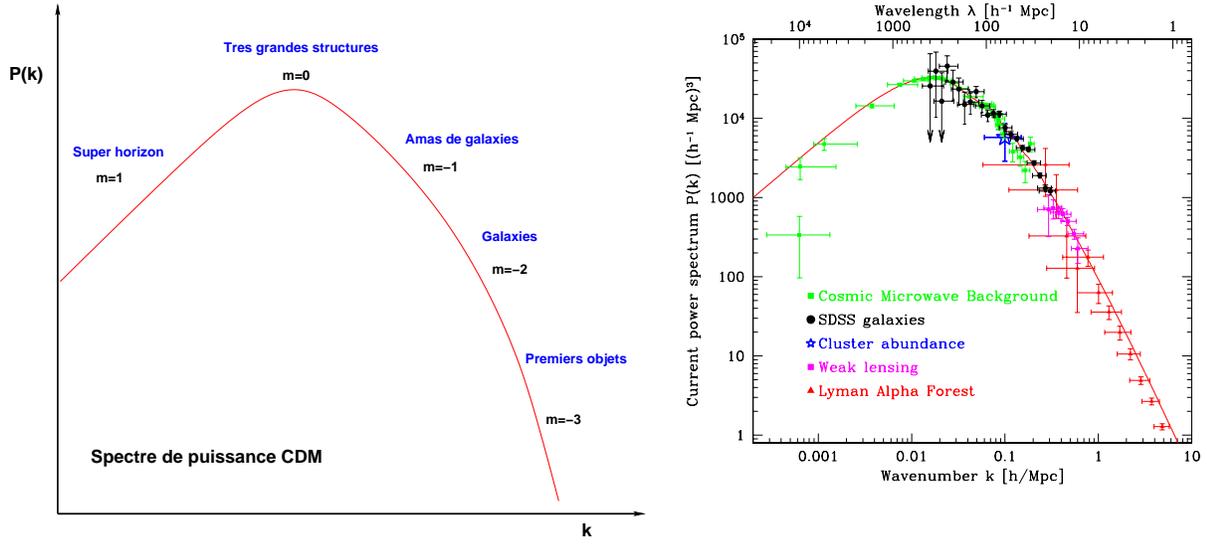


Figure 105: Allure générale du spectre des fluctuations de densité dans un modèle CDM. La reconstruction complète du spectre de puissance tri-dimensionnel à $z = 0$ déjà montrée dans ce cours est reproduite de nouveau ici pour la comparaison aux données (D'après Tegmark et al 2004, ApJ 606, 702).

que l'effondrement de cette sphère est indépendant de la distribution de masse autour d'elle. On a donc

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} \quad (797)$$

où $M = (4\pi/3)\rho R^3$ est constant. La conservation de l'énergie E implique que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E \quad (798)$$

Pour $E < 0$, on a un système lié dont la solution paramétrique est connue

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_m} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \eta) \\ \frac{t}{t_m} &= \frac{1}{\pi} (\eta - \sin \eta) \end{aligned} \quad (799)$$

L'objet va s'étendre de $R = 0$ à $t = 0$ jusqu'à une taille maximale R_m qu'il atteindra à $t = t_m$ ($\eta = \pi$), puis il s'effondrera pour atteindre une taille nulle à $t = 2t_m$ ($\eta = 2\pi$). En substituant cette solution dans les équations du mouvement on trouve que

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM}{R_m} \\ t_m &= \frac{\pi R_m}{(-8E)^{1/2}} \end{aligned} \quad (800)$$

Le comportement dans la phase initiale correspond à $\eta \ll 1$, qui peut être décrit en développant en série de Taylor l'Eq.(799)

$$\begin{aligned}\frac{R}{R_m} &= \frac{\eta^2}{4} \left(1 - \frac{\eta^2}{12} + \dots \right) \\ \frac{t}{t_m} &= \frac{\eta^3}{6\pi} \left(1 - \frac{\eta^2}{20} + \dots \right)\end{aligned}\tag{801}$$

On peut résoudre cette équation itérativement pour trouver $R = R(t)$:

$$R = \frac{R_m}{4} \left(\frac{6\pi t}{t_m} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6\pi t}{t_m} \right)^{2/3} + \dots \right]\tag{802}$$

Le second terme entre les crochets est la correction au premier ordre de l'écart à l'expansion. Il correspond donc à une déviation par rapport à un univers EdS. En écrivant que la masse dans la sphère de rayon R est $(4\pi/3)\bar{\rho}R_0^3$, pour l'Univers EdS, et $(4\pi/3)\bar{\rho}(1+\delta)R_3$, pour la petite perturbation dans cet univers EdS, on en déduit que lorsque le rayon R contient la même masse on a

$$R = \left(1 - \frac{\delta}{3} \right) R_0\tag{803}$$

Si l'on compare avec l'Eq.(802), on trouve que l'amplitude de la sur-densité moyenne par rapport à un univers EdS de même âge est

$$\delta = \frac{3}{20} \left(\frac{6\pi t}{t_m} \right)^{2/3}\tag{804}$$

L'effondrement non-linéaire de la sphère est accompli lorsque $R = 0$ à $t = 2t_m$, c'est à dire pour une sur-densité *linéaire* extrapolée de

$$\delta_{effond} = \delta(t = 2t_m) = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \simeq 1.686 = \delta_c\tag{805}$$

Ce résultat nous dit qu'il est possible d'utiliser la théorie linéaire des perturbations pour suivre leur croissance. On peut ainsi décider que l'effondrement *totalelement non-linéaire* se produira lorsque la sur-densité *linéaire* atteindra $\delta_c = 1.7$. C'est par exemple cette valeur critique qui est utilisée dans la théorie de Press-Schechter pour calculer la fonction de masse des objets effondrés.

13.8.7 La fonction de masse de Press-Schechter

Dans l'équation 775 nous avons exprimé la fluctuation de masse attendue à une échelle donnée dans un champ Gaussien et pour un spectre de puissance donné, $P(k)$:

$$\begin{aligned}\Delta^2(M, t) &= \left\langle \left(\frac{M(\mathbf{x}, t)}{M} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{V_W^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^2 |\delta(\mathbf{k}, t)|^2 V^2}{2\pi^2} |W(\mathbf{k})|^2 \\ &= D^2(t) \frac{1}{V_W^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^2 |\delta(\mathbf{k}, t_i)|^2 V^2}{2\pi^2} |W(\mathbf{k})|^2 \\ &= D^2(t) \Delta^2(M, t_i),\end{aligned}\tag{806}$$

où $W(k)$ est la transformée de Fourier d'une fonction filtre, qui sélectionne des volumes de taille V_W et de masse moyenne \bar{M} , et $\Delta^2 \langle \left(\frac{M(\mathbf{x}, t)}{\bar{M}} \right)^2 \rangle$ sont les fluctuations de masse M autour de la masse moyenne $\bar{M} = \bar{\rho} V_W$. Les $\delta(\mathbf{k}, t)$ sont les amplitudes de Fourier du champ de densité:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t) \sum_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (807)$$

Pour un modèle cosmologique donné nous avons vu que l'amplitude $\delta(\mathbf{k}, t)$ croît avec le temps selon une loi simple, $\delta(\mathbf{k}, t) = D(t) \delta(\mathbf{k}, t_i)$. Par exemple, pour un univers EdS $D(t) = (t/t_i)^{2/3}$, où t_i est un temps pour lequel δ est connu.

Supposons que dans les phases initiales, à $t = t_i$, $\delta(\mathbf{k}, t_i)$ soit un champ Gaussien. On peut utiliser la théorie linéaire pour prédire l'évolution du champ de densité, à partir de $\delta(\mathbf{k}, t) = D(t) \delta(\mathbf{k}, t_i)$. Ce champ lissé sur une échelle \bar{M} est

$$\begin{aligned} \delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t) &= \int \bar{\rho}(t) \delta(\mathbf{x}', t) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \sum \bar{\rho} V \sum_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}, t) W(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \\ &= \bar{\rho} D(t) \frac{V^2}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{k}, t_i) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (808)$$

Puisque $\delta(\mathbf{k}, t_i)$ est un champ Gaussien, $\delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t)$ est une somme de champs Gaussiens et est donc aussi un champ Gaussien. Il a une moyenne nulle et une dispersion *rms* de $\Delta(\bar{M}, t)$. Sa distribution de probabilité peut donc s'écrire

$$P(\delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t)) d\delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{[2\pi\Delta^2(\bar{M}, t)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{\delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t)^2}{2\Delta^2(\bar{M}, t)}\right) d\delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t) \quad (809)$$

Press et Schechter ont suggéré en 1974 une procédure comment utiliser cette distribution pour calculer la fonction de masses des halos. Supposons que la forme du spectre de puissance soit connue, $P(k, t_i) \propto k^m$, par exemple. On peut alors trouver la dépendance de la fluctuation de masse, Δ :

$$\Delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t) \propto D(t) \bar{M}^{-(m+3)/6} \quad (810)$$

Prenons par exemple $m = -2$, soit $\Delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t) \propto D(t) \bar{M}^{-1/6}$. Sur des échelles suffisamment grandes, pour lesquelles $\Delta(\bar{M}, t) \ll 1$, $\delta(\bar{M}, \mathbf{x}, t)$ est un champ Gaussien de moyenne nulle et de très faible dispersion. Donc, quasiment tous les points du champ sont encore en régime linéaire $\delta < 1$. A l'inverse, sur les échelles beaucoup plus petites, la dispersion s'accroît et donc une fraction significative du champ peut avoir $\delta \simeq 1$. Pour établir un lien avec le modèle sphérique discuté précédemment, cela signifie que cette fraction de l'espace peut subir des effondrements non-linéaires, se détacher de l'expansion de l'Univers puis former les halos comme les galaxies.

Alternativement, nous pouvons aussi conserver le filtre en masse constant, $\bar{M} = C^{te}$, mais investiguer cette fois le champ à des périodes de plus en plus avancées. La dispersion s'accroît cette fois parce que $D(t)$ s'accroît. Alors que le champ aux échelles correspondant à \bar{M} était initialement linéaire partout, il finira par atteindre $\delta \sim 1$ sur une certaine fraction de l'espace, ce qui signifie que des objets de grande masse \bar{M} se formeront progressivement. C'est la croissance hiérarchique des structures.

Comme on l'a vu, on peut considérer $\delta_c = 1.686$ comme la densité linéaire critique au-dessus de laquelle les objets s'effondrent. La fraction de l'espace pour laquelle la densité linéaire est au-dessus de ce seuil est

$$\begin{aligned} F(\bar{M}, t) &= \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{D(t) \Delta(\bar{M}, t_i)} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2D^2(t) \Delta^2(\bar{M}, t_i)}\right] d\delta \\ &= \int_{\delta_c/D\Delta}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-x^2/2) dx, \end{aligned} \quad (811)$$

où $x = \delta_x/D\Delta$. Press et Schechter ont fait l'hypothèse que cette fraction peut être identifiée à la fraction de l'espace qui s'est effondrée sous la forme d'objets de masse au moins égale à \bar{M} . Si $n(\bar{M})$ est la densité numérique d'objets de masse \bar{M} , ils occupent un volume $V = \bar{M}/\bar{\rho}$ et donc, selon Press et Schechter, on a

$$F(\bar{M}, t) = \int_{\bar{M}}^{\infty} n(\bar{M}) \frac{\bar{M}}{\bar{\rho}} d\bar{M}. \quad (812)$$

Considérons cependant le cas $\bar{M} \rightarrow 0$ dans l'Eq.(811). Dans ce cas, $\Delta \rightarrow \infty$, l'intégrale sur x est de 0 à ∞ et donc $F(\bar{M} \geq 0, t) = 1/2$. Ce qui signifie que seulement la moitié de l'Univers devrait s'effondrer dans des halos, quelles que soient leur taille. C'est étonnant car pour des masses \bar{M} suffisamment petites, le champ de densité, pour un spectre de puissance $P(k) \propto k^{m=-2}$, devient toujours non-linéaire ce qui laisse penser que l'Univers entier doit s'effondrer dans des objets suffisamment petits.

Pour répondre à ce paradoxe, Press et Schechter ont arbitrairement multiplié l'Eq.(811) par 2. Ensuite, on peut calculer les dérivées des Eq.(811) et Eq.(812) par rapport à \bar{M} pour déterminer l'expression de $n(\bar{M})$

$$-n(\bar{M}) \frac{\bar{M}}{\bar{\rho}} d\bar{M} = -2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2D^2\Delta^2}\right) \frac{-\delta_c}{D\Delta^2} \frac{d\Delta(\bar{M})}{d\bar{M}} d\bar{M}, \quad (813)$$

qui peut être ré-arrangée sous la forme

$$n(\bar{M}, t) d\bar{M} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\bar{\rho}}{\bar{M}} \frac{\delta_c}{D(t) \Delta^2(\bar{M}, t_i)} \frac{d\Delta(\bar{M}, t)}{d\bar{M}} \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2D^2(t) \Delta^2(\bar{M}, t_i)}\right] d\bar{M}. \quad (814)$$

Pour un spectre de puissance ayant la forme $P(k) \propto k^m$, on a vu que $\Delta(\bar{M}) \propto \bar{M}^{-(m+3)/6}$ et donc

$$n(\bar{M}, t) d\bar{M} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\bar{\rho}}{\bar{M}} \left(1 + \frac{m}{3}\right) \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_*(t)}\right)^{(3+m)/6} \exp\left[-\left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_*(t)}\right)^{(3+m)/3}\right] \frac{d\bar{M}}{\bar{M}}, \quad (815)$$

où la masse caractéristique $\bar{M}_*(t)$ est définie telle que

$$D(t) \Delta(\bar{M}_*(t), t_i) = \delta_c. \quad (816)$$

A un instant donné, $\bar{M}_*(t)$ a une certaine valeur. L'Eq.(815) montre que la fonction de masse, $n(\bar{M})$, a une coupure exponentielle aux grandes masses $\bar{M} \gg \bar{M}_*(t)$, et est une loi de puissance avec $n(\bar{M}) \propto \bar{M}^{(m-9)/6} \propto 1/\bar{M}^2$ pour les toutes petites échelles (on a vu que $m = -3$ pour ces échelles).

Comparons maintenant la fonction de masse à deux époques différentes, $t_1 < t_2$. A t_1 , la coupure en masse sera à $\bar{M}_*(t_1) < \bar{M}_*(t_2)$. En d'autres termes, il y aura une plus grande

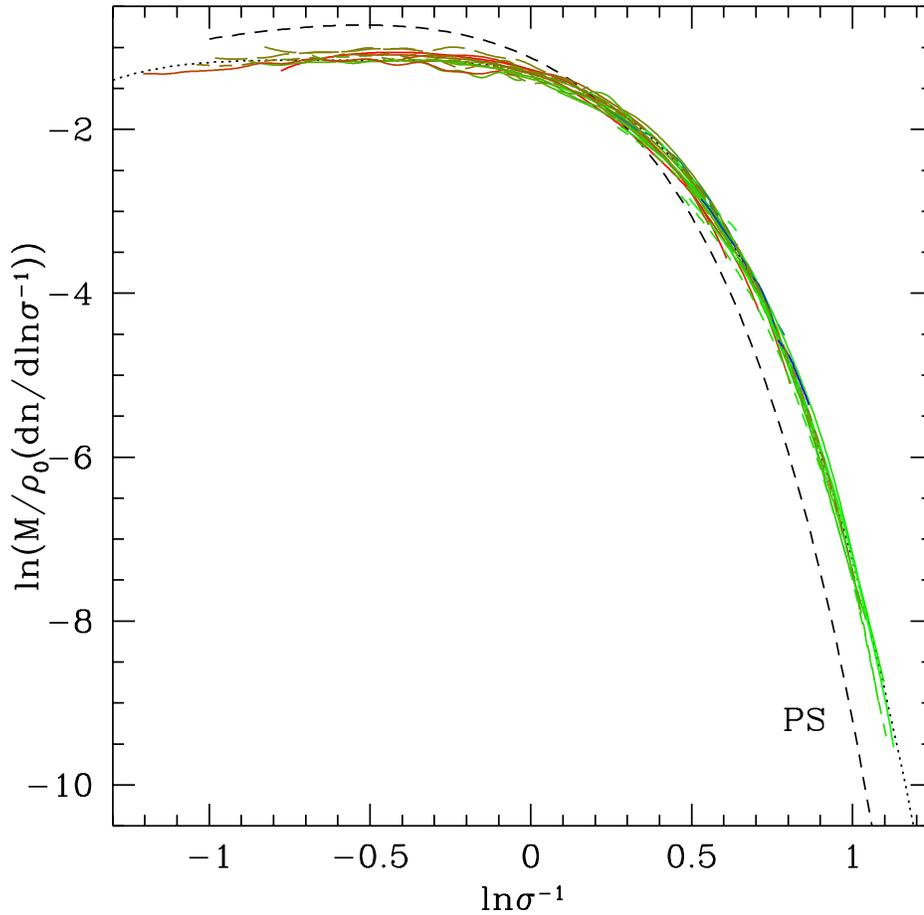


Figure 106: La fonction de masse des halos calculée avec le modèle de Press-Schechter (ligne noire achurée PS) et avec des simulations numériques (traits continus en couleur). σ^{-1} est une mesure de la masse des objets. On voit clairement la coupure exponentielle à grande masse et l'allure en loi de puissance à petite masse. Press-Schechter semble prédire trop de halos de petite masse et pas assez de halos de grande masse, si la simulation est correcte. D'après Jenkins et al 2001, MNRAS 321, 372.

fraction d'objets massifs à t_2 qu'à t_1 , ce qui signifie qu'une fraction des objets de l'époque t_1 a fusionné avec d'autres halos pour former les objets plus massifs de la période t_2 . Avec un spectre ayant un tel indice spectral, on s'attend donc que l'Univers évolue à partir d'un très grand nombre de halos de toute petite masse vers un nombre d'objets très massifs croissant progressivement par fusion des petits objets.

Dans ce scénario de formation hiérarchique, la Voie Lactée résulterait donc de fusions multiples. La valeur de la masse \bar{M}_* correspond aujourd'hui à celle de la Galaxie. La plupart de la masse serait confinée dans des objets de la taille de la Voie Lactée alors que la fraction de masse localisée dans des systèmes plus massifs, comme les groupes ou les amas de galaxies décroît exponentiellement. La Figure 106 montre la forme de la fonction de masse telle qu'elle est prédite par Press-Schechter (ligne noire PS) et par les simulations numériques (lignes en couleur).

13.9 Annexe I: Formulaire aide-mémoire

Métrie FRW:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (817)$$

Partie spatiale:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2) \quad ; \quad \text{soit} \quad ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 d\sigma^2 \quad (818)$$

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{si } k = 1 \\ \chi & \text{si } k = 0 \\ \text{sh}\chi & \text{si } k = -1 \end{cases} \quad (819)$$

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (820)$$

Redshift

$$\frac{R(t_0)}{R(t_1)} = 1 + z \quad (821)$$

Distance diamètre angulaire

$$D_A(z) = r_1 R(t_1) = \frac{r_1 R(t_0)}{1 + z} \quad D_L(z) = r_1 R(t_0) (1 + z) \quad (822)$$

Equation de Friedmann

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 & = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{c^2}{3} \Lambda - \frac{c^2}{R^2} k \\ \frac{\ddot{R}}{R} & = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{c^2}{3} \Lambda \end{cases} \quad (823)$$

Equation d'état

$$P = \omega \rho c^2 \implies \rho_X = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\omega+1)} \quad (824)$$

Paramètres cosmologiques

$$H_0 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)_{t=t_0} ; \quad q_0 = \left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right)_{t=t_0} \quad (825)$$

$$\Omega_{m0} + \Omega_{\gamma0} + \Omega_{X0} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1 \quad (826)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_{m0} + \rho_{\gamma0} + \rho_{X0}) = \frac{\rho_0}{\rho_c} \\ \Omega_{\Lambda} = \frac{c^2}{3H_0^2} \Lambda \\ \Omega_k = -\frac{c^2}{H_0^2 R_0^2} k \end{array} \right. \quad (827)$$

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{1}{1+z} ; \quad \frac{\dot{a}(t)^2}{H_0^2} = \sum_i \frac{\Omega_i}{a(t)^{3\omega_i+1}} \quad (828)$$

Composante	Ω_i	ω_i	
Matiere	Ω_m	0	
Photon	Ω_{γ}	1/3	
Energie sombre	Ω_X	ω	
Constante cosmologique	Ω_{Λ}	-1	(829)
Quintessence	Ω_Q	ω_Q	
Cordes cosmiques	Ω_C	-1/3	
Murs de domaine	Ω_D	-2/3	
Courbure	Ω_k	-1/3	

Temps cosmique

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\sum_i \frac{\Omega_i}{a(t)^{3\omega_i+1}}}} = \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{\sum_i \Omega_i (1+z)^{3\omega_i+1}}} \quad (830)$$

$$H(z) = H_0 (1+z) \sqrt{\sum_i \Omega_i (1+z)^{3\omega_i+1}} \quad (831)$$

Distances

$$\begin{aligned}D_p(z) &= \int_0^z \frac{c \, dz}{H(z)} \\D_A(z_1; z_2) &= \frac{1}{1+z_2} S_k \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{c \, dz}{H(z)} \right) \\D_L(z_1; z_2) &= (1+z_2)^2 D_A(z_1, z_2)\end{aligned}\tag{832}$$

Univers rayonnement	$\rho \propto a^{-4}$	$a \propto t^{1/2}$	(833)
Univers matiere	$\rho \propto a^{-3}$	$a \propto t^{2/3}$	
Univers constante cosmologique	$\rho = \text{Cte}$	$a \propto \text{Exp}(H t)$	

13.10 Annexe J : Table des grands moyens d'observations astronomiques mondiaux

Les pages suivantes ont été établies avec l'aide d'Anne Decourchelle (CEA/SAp) et de Jarle Brinchmann (Leiden Observatory). Bien que je tente de tenir à jour ce résumé des moyens, les projets du futur changent rapidement et il est possible que certaines des informations y soient obsolètes ou en partie inexactes. N'hésitez pas à me communiquer toutes précisions que vous jugeriez utiles.

Table 1: Moyen d’Observation Astronomique: High Energy

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/Institutes	Strength/Comment
CR, NE	UHE- γ /NE	S	AUGER	$>10^7$ TeV	pm	2004	ParticleAccelerat UltraHighEnergy	Gr	0.6°	5	Int'l	Large area, High energy Hybrid detector under water
NE CR	VHE UHE	S	BAIKAL NT200+	1-100 TeV >10 PeV	pm pd	2005	ParticleAcceler, Indirect DM searches AGN, SNR, GRB	Gr	4° 4°	1/3 5	RU, D	
NE CR	VHE UHE	S	BAIKAL GVD	10-100 TeV >10 PeV	pm pd	2009	ParticleAcceler, Indirect DM searches AGN, SNR, GRB	Gr	$< 5^\circ$ $< 5^\circ$	1/3 5	RU, D	under water
NE CR	VHE UHE	S	IceCube	1 TeV-1 PeV >10 PeV	pm pd	2006/2011	ParticleAcceler, Indirect DM searches AGN, SNR, GRB	Gr	0.8° $> 5^\circ$	1/3 5	US, D, B, SW, GB, NZ, J	under ice South pole
NE	VHE	S	ANTARES	100 GeV-100 TeV	pm	2007/2008	ParticleAcceler, Indirect DM searches AGN, SNR, GRB	Gr	0.3°	1/3	F, D, S, I, NL, RUS, ROM	undersea
CR NE	UHE VHE	S	KM3NET	>10 PeV 100 GeV-100 TeV	pd pm	2011/2015	ParticleAcceler, Indirect DM searches AGN, SNR, GRB	Gr	$< 0.3^\circ$	1/3	F, D, S, I, NL, G, UK, RU, CYP, ROM	undersea
CR CR	UHE UHE	S	KASKADE Grande	>10 PeV 10^4 - 10^6 TeV	pd pm, pd	2000?	AGN, SNR, GRB Cosmic Rays	Gr	$> 5^\circ$	5	G, I, PO, RU CHN, J	$\times 50$ -Sensitivity hybrid detection
PH CR PH	VHE- γ UHE VHE- γ	S	Tibet-III	1-100 TeV 100 TeV-100 PeV	i, pm pd	1999	AGNs/ParticleAcceler SNRs/Decaying-DM	Gr	$\sim 0.2^\circ$			
PH	VHE- γ	S	MILAGRO	100 GeV-100 TeV	i, pm	1998	AGNs/ParticleAcceler SNRs/Decaying-DM	Gr	$\sim 0.5^\circ$		US	Water Cherenkov detector, New Mex.
PH	VHE- γ	O	HESS	100 GeV-100 TeV	i, s, pm	2004	AGNs/ParticleAcceler/ SNRs/Decaying-DM	Gr	$\sim 0.1^\circ$	~ 7	G, F, UK, Int'l	4 \times 13m-Tel. southern hemis.
PH	VHE- γ	O	HESS-2	30 GeV-100 TeV	i, s, pm	2008	ParticleAcceler /Decaying-DM	Gr	$\sim 0.05^\circ$	~ 7	G, F, int'l	4 \times 13m-Tel. southern hemis.
PH	VHE- γ	O	VERITAS	50 GeV-50 TeV	i, s, pm	2007	AGN/ParticleAcceler SNRs/Decaying-DM	Gr	$\sim 0.1^\circ$	7-10	US, CAN, UK, IRL	4 \times 12m-Tel. northern hemis.
PH	VHE- γ	O	CTA	10 GeV-100 TeV	i, s, pm	$>2015/2020$	ParticleAcceler Decaying-DM	Gr	$\sim 0.1^\circ$	7-10	G, F, I, IRL, PL, SP, int'l	Gain=10 \times HESS
PH	VHE- γ	O	AGIS	40 GeV-100 TeV	i, s, pm	>2011	ParticleAcceler Decaying-DM	Gr	$< 0.1^\circ$	7-10	US	Gain=10 \times HESS
PH	VHE- γ	O	CANGAROO-III	100 GeV-100 TeV	i, s, pm	2004	SNRs/AGNs/ ParticleAcceler	Gr	$\sim 0.24^\circ$	7	AUS, J	4 \times 10m- Tel. southern hemis.
PH	VHE- γ	O	ARGO-YBJ	100 GeV-100 TeV	i, p	2007	ParticleAcceler	Gr	$\sim 0.5^\circ$	~ 5	I, CHN	HighAltitude
PH	VHE- γ	S	MAGIC-I	25-700 GeV	i, s, pm	2004	AGNs/ParticleAcceler/ SNRs/ Decaying-DM	Gr	$\sim 0.3^\circ$	4	G Int'l	1 \times 17m-Tel.
PH	VHE- γ	S	MAGIC-II	25-700 GeV	i, s, pm	2008/9	AGNs/ParticleAcceler/ SNRs/Decaying-DM	Gr	$< 0.2^\circ$	8	G, SP, I US, int'l	2 \times 17m-Tel.

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 2: Moyen d'Observation Astronomique : High Energy Cont'd

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
PH	VHE- γ	S	GLAST/LAT/ GBM	20 MeV-300 GeV 10 keV-25 MeV	i, s s	2008	AllSky/GRBs/ Decaying-DM ParticleAcceler/ Diffuse Em	Sp	0.15-3.5°	7-30 10	USA, J, I F, SW, G, SP	Large area detector
PH	γ	O	AGILE /GRID/ Super- Agile	30 MeV-50 GeV 10-40 keV	i i	2007	AGNs/GRBs/ GalacticSources	Sp	0.5° 6'	1 3-15	I	
PH	X-ray/ γ	O	INTEGRAL/SPI/ IBIS/ JEM- X	18 keV-8 MeV 15 keV-10 MeV 3-35 keV	i, s i, s i, s	2002	CompactObjects/ ExtragalAstron StelNuclSynth	Sp	2.5° 12' 3'	450 10-12 8	ESA	Detailed mapping Nuclear PH-spectro
PH	X-ray/ γ	S	SVOM/ECLAIRs	4-300 keV	i	>2013	GRBs	Sp		~40	CNES, CHN	GRB search
PH	X-ray/ γ	S	HXMT	20-200 keV	i	2011	AllSky	Sp	10'	5	CHN, ASI ?	Polarimetry ?
PH	X-ray	O	POLARIX	2-10 keV	po, i	2012-14	Galactic/Extragal	Sp	20"	10	ASI	Phase A, final selection end of 2008
PH	X-ray/ γ	S, O	RXTE	2-250 keV	s	1995	CompactObjects	Sp	1°	6	NASA	Timing
PH	X-ray/ γ UV/Vis	S	SWIFT XRT/BAT	0.3-150 keV	i	2004	GRB	Sp	18" HPD	50	NASA, UK, I	FOV, FastResponding
PH	X-ray	S	SRG/eROSITA/ Lobster/ ART	0.2-120 keV	i, s	>2009	BHs/Clusters of galaxies	Sp	20"-9'	5-50	RUS, IKI, LU, MPE	All-sky survey X- ray calorimeter good sensit. \leq 1keV
PH	X-ray	O	Suzaku	0.2-600 keV	i, s	2005	Hotstars/Galactic/ ExtragalAstron	Sp	2' HPD	5-50	JAXA/ NASA	large energy range X-ray calorimeter
PH	X-ray	O	NEXT	0.2-600 keV	i, s	2012	Hotstar/ Galactic/ ExtragalAstron	Sp	1'	5-1000	JAXA/ NASA?	supermirror Hard X-ray
PH	X-ray	S,O	NuSTAR	6-80 keV	i, s	2011	Accretion/ParticleAcceler	Sp	40" HPD	75	NASA I	focussing Optics CollectingArAea
PH	X-ray	O	IXO-XEUS IXO-CON-X	0.1-40 keV 0.3-40 keV	i, s, po i, s	>2019	BHs/ClustersofGal/ Galactic/ Extragal Gal/CompactObj/ WHIM Extragal	Sp Sp	5" 15 "	40-1000 10-2400	ESA/J NASA	HighThroughput/ Suite of Instrum.
PH	X-ray	O	XMM-Newton	0.1-10 keV	i, p, s	1999	Hotstars/Galactic/ Extragal	Sp	6"	20-800	ESA	CollectingArea
PH	X-ray	O	Chandra	0.1-10keV	i, p, s	1999	Hotstars/Galactic/ Extragal	Sp	0.5"	40-2000	NASA	HighSpatialRes
PH	X-ray/FUV	O	ASTROSAT	0.3-150 keV +FUV/NUV	i, p, s	2009	Variable sources Galactic/Extragal	Sp	8'@60 keV 1.8"@UV	20	IN	BroadBandUV Suite of Instrum.

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 3: Moyen d'Observation Astronomique : UV, Visible, Near/mid infrared

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
PH	FUV/NUV	O	GALEX	135–280nm	i,p,s	2003	Galaxies/SFR/ StarBurst/QSO	Sp	6."/ 8."	270/110	NASA,F	UV facility
PH	NUV/Vis/IR	O	HST	110–2500nm	i,p,s	1990	Any	Sp	0.05"/0.1"	20000	NASA, ESA	UV-NIRfacility Suite of Instrum. 4×8m Tel.
PH	UV/Vis/IR	O	4×8m-VLT	300–5000nm	i,p,s,po	1998	Any	Gr	0.1"-1"	100–100000	ESO	Suite of Instrum. 4T/6T interferom Suite of Instrum.
PH	NIR/IR	O	VLT1	1100–13500nm	i,s,p	2005	Bright-Stars/ AGNs/Planets	Gr	0.001–0.1"	10–30000	ESO	N+S 8m telescopes Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	2×8m-GEMINI	300–5000nm	i,p,s,po	1998	Any	Gr	0.1"-1"	10–100000	USA,UK, C,Int'l	2×10m Tel. Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	2×10m-Keck	300–5000nm	i,p,s,po	1993	Any	Gr	0.1"-1"	10–100000	USA	2T Interferom Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	KeckI	1100–13500nm	i,s,p	2001	Bright-Stars AGNs/Planets	Gr	5mas		USA	2T Interferom Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	10m-GTC	300–2500nm	i,s,p,co	2007	Any	Gr	0.1"-1"	10–30000	SP,Int'l	EU-North 10m Tel. Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	2×8m-LBT	300–3000nm	i,s,p	2005	Any	Gr	0.1"-1"	10–40000	I,G,USA	2×8m Tel. Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	LBT1	500–2000nm	i	2009?	80-NearBrightStar PlanetCandidates	Gr	0.02"		I,G, USA	2T Interferom Nulling Interform. Wide Field Imaging Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	8m-SUBARU	300–25000nm	i,s,p,c	2000	Any	Gr	0.1"-1"	10–100000	J	
PH	UV/Vis/IR	O	11m-SALT	320–1700nm	i,p,s	2005	Any	Gr	0.4"-1"	10–250000	RSA	
PH	UV/Vis/IR	O	10m-HET	360–980nm	s	1996	Any	Gr	-	1000–12000	USA,G	Spectro. only
PH	UV/Vis//IR	O	2×6.5m-Magellan	310–2500nm	i,s,p	2000	Any	Gr	0.2"-1"	10–30000	USA	
PH	UV/Vis/IR	O	6.5m-MMT	320–26000nm	i,s,p	2000	Any	Gr	0.4"-1"	10–25000	USA	Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	6m SAO-BTA	320–10000nm	i,s,p	1975	Any	Gr	0.6"-1"	10–60000	RUS	Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	4.2m-WHT	350–2500nm	i,s,p,c	1997	Any	Gr	0.2"-1"	10–10000	UK,SP	

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 4: Moyen d’Observation Astronomique : UV, Visible, Near/mid infrared Cont’d

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
PH	UV/Vis/IR	O	ESO-3.6	350–11000nm	i,s,p,po,co	1976	Any	Gr	0.4"-1"	10–115000	ESO	High Spec. Res.: HARPS= 1m/s
PH	UV/Vis/IR	O	3.5m-NTT	400–2500nm	i,s,p,co		Any	Gr	0.4"-1"	10–70000	ESO	Suite of Instrum. Refurbished for CFHTLS (2002)
PH	UV/Vis/IR	O	3.6m-CFHT	300–2400nm	i,s,p,po	1979	Any	Gr	0.3"-1"	10–10000	C,F,H	Suite of Instrum. Refurbished for CFHTLS (2002)
PH	UV/Vis/IR	O	3.5m-CAHA	320–2400nm	i,s,p	1975	Any	Gr	0.4"-1"	10–15000	G,SP	Suite of Instrum. Upgraded for DES (2011) Wide field applic.
PH	UV/Vis/IR	O	4m-CTIO-Blanco	400–2500nm	i,s,p	1974	Any	Gr	0.4"-1"	10	USA	Suite of Instrum. Upgraded for DES (2011) Wide field applic.
PH	UV/Vis/IR	O	4m-KPNO-Mayall	400–5000nm	i,p	1973	Any	Gr	0.4"-1"	10	USA	Wide field imaging
PH	UV/Vis/IR	O	3.5m-WYIN	400–2500nm	i,s,p	1994	Any	Gr	0.1"-1"	10–25000	USA	Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	3.5m-TNG	400–2500nm	i,s,p	1998	Any	Gr	0.1"-1"	10–1.6×10 ⁵	I.	Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	3.9m-AAT	400–2500nm	i,s,p	1974	Any	Gr	0.4"-1"	10–1.×10 ⁶	AUS,UK	High Spec. Res. Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	4m-SOAR	310–5000nm	i,s,p	2003	Any	Gr	0.4"-1"	10–90000	BRA,USA	Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	3.5m-ARC	310–2400nm	i,s,p		Any	Gr	0.6"-1"	10–30000	USA	4m IR Tel. Suite of Instrum. Wide field NIR Survey Facility
PH	UV/Vis/IR	O	3.9m-UKIRT	1000–5000nm	i,s,p,po	1998	Any	Gr	0.4"-1"	10–40000	UK	EU-40m-Tel. Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	S	4m-VISTA	1000–2500nm	i,p	2008	AllSky	Gr	0.4"-1"	10–100	UK, ESO	Suite of Instrum. Wide field NIR Survey Facility
PH	UV/Vis/IR	O	42m-E-ELT	300–20000nm	i,p,s,co,po	2018?	Any	Gr	0.01"-1"	10–10 ⁵	ESO, Int'l ?	EU-40m-Tel. Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	30m-TMT	300–20000nm	i,p,s,co,po	2018?	Any	Gr	0.01"-1"	10–×10 ⁵	USA,CAN	Suite of Instrum.
PH	UV/Vis/IR	O	21m-GMT	300–5000nm	i,p,s,co,po	2018?	Any	Gr	0.01"-1"	10–1.5×10 ⁵	USA	Suite of Instrum.
PH	Vis	S	GAIA	400–900nm	p,s,as	2013	AllSky Milky Way/Kinematics StellarPhysics/Distance	Sp	7–100μas	10–11500	ESA	Astrometry mission
PH	Vis	O	SIM	400–900nm	p,as	>2015	PlanetSearch LMC/SMC/GC	Sp	0.05–5μas	10	USA	Astrometry mission
PH	Vis	O	PLATO	400–900nm	p,as	2018?	Asterosismo. Planet-Stars	Sp		10	ESA	Ultra- high prec. photometry

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 5: Moyen d'Observation Astronomique : UV, Visible, Near/mid infrared Cont'd

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
PH	Vis	S	SDSS I&II	400–1000nm	i,p,s	2000	AllSky	Gr	0.6"-1.5"	10–2000	USA	Transit ima+spectro
PH	Vis/NIR	S	SDSS III	400–1700nm	i,p,s	2009	AllSky	Gr	0.6"-1.6"	10–20000	USA	Transit ima+spectro Survey Telescope
PH	UV/Vis	S	VST	320–1000nm	i,p	2011	AllSky	Gr	0.3"-1"	10	ESO I.,NL	ESO Vis Survey Tel.
PH	UV/Vis	S	8m-LSSST	350–1100nm	i,p	> 2015?	AllSky	Gr	0.6"-1"	10	USA	
PH	UV/Vis	S	Pan-STARRS-I -IV	350–1100nm	i,p	2010 2011?	AllSky	Gr	0.6"-1"	10	USA,G, UK	1.8m/4×1.8 Tel.
PH	UV/Vis	S	4m-LAMOST	400–900nm	s	2008	AllSky	Gr	~1"	1000–10000	CHN	Spectro Survey Tel.
PH	UV/Vis/IR	S	1.2m- Euclid	600–2500nm	i,p,s	2019?	DE-AllSky	Sp	0.1–1"	10–1000	ESA	DE survey Tel. WL/BAO
**			JDEM-projects:									
PH	Vis/IR	S	1.3m-DESTINY	1000–1800nm	i,p,s	2018?	DE	Sp	~0.1"	10–500	USA	JDEM DE survey Tel. WL/BAO/SN
PH	UV/Vis/IR	S	1.3m-ADEPT	1000–1800nm	i,p,s	2018?	DE-AllSky	Sp		10–100	USA	JDEM DE survey Tel. SN/BAO
PH	UV/Vis/IR	S	2.0m-SNAP	600–2500nm	i,p,s	2018?	DE	Sp	0.1"-1"	10–1000	NASA, DOE	JDEM DE survey Tel. (SN+WL)
**												
PH	NIR	S	2MASS	1.0–2.5 μ m	i,p	1997	AllSky	Gr	4"	10	USA	
PH	UV/Vis/MID	O	JWST	0.6–27 μ m	i,p,s,co	2013	Any	Sp	0.05"-0.5"	10–3000	USA,CAN ESA	Suite of Instrum.
PH	MID	S	WISE	3.5–23 μ m	i,p	2009	AllSky	Sp	6"-12"	5	USA	
PH	MID	S,O	Akari(ASTRO-F)	1.7–180 μ m	i,p,s	?	AllSky/High-zUni/ StarForm/Planets BrownDwarfs	Sp	3"-60"	4	J	
PH	MID	O	Spitzer	3.0–180 μ m	i,p,s	2003	DustUni/ProtPlant/ BrownDwarf/ULIRG/ High-zUni	Sp	2"-1'	10–1000	USA	Suite of Instrum.
PH	MID	O	Herschel	60–670 μ m	i,p,s	2009	High-zUni/Molecul StarForm/ISM ChemisPlanet	Sp	7"-1'	10–2000	ESA	Suite of Instrum.
PH	MID	O	SPICA	5.0–200 μ m	i,p,s,co	2017	High-zUni/Molecul/ StarForm/ISM ChemisPlanet	Sp	0.3"-2"	10–30000	JAXA, ESA	-
PH	UV-VIS- MID-mm	O	2.5m-SOFIA	0.3nm–1.6mm	i,p,s	2017	ISM StarForm	Ap	8.5"@100 μ m	10->10 ⁶	USA, G	Suite of Instrum.

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 6: Moyen d'Observation Astronomique : Millimetre/Sub-Millimetre for CMB

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
PH	mm/Submm	S	WMAP	3.3mm-13.6mm	i,po	2001	CMB/AllSky	Sp	0.2-1.0°	10	US	HEMT
PH	mm/Submm	S	Planck	370μm-10mm	i,po	2009	CMB/AllSky	Sp	0.1-0.3°	3	ESA	HEMT/Bolo
PH	mm/Submm	S	EBEX	0.7mm-2.0mm	i,po	2008	CMB	Ba	0.1°		USA,Int'l	Bolo
PH	mm/Submm	S	SPIDER	1.3mm-7.5mm	i,po	2010	CMB	Ba	0.5-2.0°		US	Bolo
PH	mm/Submm	S	BICEP	2mm-3.3mm	i,po	2007	CMB	Gr	1°		US/UK	Bolo
PH	mm/Submm	S	BRAIN	1.3mm-3.3mm	i,po	2009	CMB	Gr	1°	3	I,F,UK	Bolo
PH	mm/Submm	S	CLOVER	1.3mm-3.3mm	i,po	2009	CMB	Gr	0.1°	30	UK	Bolo
PH	mm/Submm	S	PolarBEAR	1.3mm-3.3mm	i,po	2008	CMB	Gr	0.07°	30-50	USA,UK,F	Bolo
PH	mm/Submm	S	QUIET	7.5mm-3.3mm	i,po	2008	CMB	Gr	0.25-0.5°	17	USA,UK, G,NO,J	HEMT
PH	mm/Submm	S	QUIJOTE	10mm-27mm	i,po	2008	CMB	Gr	1°		SP	HEMT
PH	mm/Submm	S	CBASS	60mm	i,po	2009	CMB/AllSky	Gr	0.85°		USA,UK, RSA	HEMT
PH	mm/Submm	S	GEM-P	30mm-60mm	i,po	2009	CMB	Gr	1°		USA, PT,BRA	HEMT
PH	mm/Submm	S	ACT	1.1mm-2.1mm	i	2007	CMB/SZ	Gr	0.01-0.03 °		USA	Bolo
PH	mm/Submm	S	SPT	0.8mm-3mm	i	2007	CMB/SZ	Ggr	0.01-0.03° 1'@2mm		USA,UK	Bolo
PH	mm/Submm	O	APEX -SZ	200μm-1.4mm	i	2008	CMB/SZ	Ggr	0.003-0.02°		ESO, G,USA	Bolo

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 7: Moyen d’Observation Astronomique : Millimetre/Sub-Millimetre, Radio

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/Institutes	Strength/Comment
PH	mm/Submm	O	APEX	200 μ m–2mm	2005	i,s,(po)	High-zUni/Molecul/ StarForm/ISM/SZ ChemisPlanet	Gr	10''–1'	> 60 kHz	ESO,G,SW	
PH	mm/Submm	O	JCMT	345 μ m–2.0mm	i,pi,s	1987	High-zUni/Molecul/ StarForm/ISM ChemisPlanet	Gr	10''–1'	5-1500	UK,NL, CAN	
PH	mm/Submm	O	CSO	350 μ m–1.3mm	i,p	1988	High-zUni/Molecul/ StarForm/ISM ChemisPlanet	Gr	10''–1 30''@1mm	5-2000	USA	
PH	mm/Submm	O	SMA	0.3mm–1.7mm	i,s,po	2003	AGNs,StarForm/ISM	Gr	0.15''–0.4'' 0.15''@0.45mm	> 20kHz	USA,CHN	Submm interfero.
PH	mm/Submm	O	SMT	0.3mm–4.6mm	i,s	1993	StarForm/ISM AstroChem	Gr	8''–2'	> 40kHz	USA,(CHN)	
PH	mm/Submm	O	LMT	0.85mm–4mm	i,s	2006	Any	Gr	4''–20'' 6''@3mm		MEX,USA	Collecting area
PH	mm/Submm	O	12MT	1.7mm–4.4mm	i,s	1967	StarForm/ISM/ AstroChem	Gr	0.7''–1.8'	> 30kHz	USA,(CHN)	
PH	mm/Submm	O	PMO 13.7m	2.6mm–3.6mm	i,s	?	StarForm/ISM/ AstroChem	Gr	1'		CHN	
PH	mm/Submm	O	Onsala 20m	2.6mm–13.6cm	i,s	1975	StarForm/ISM/ AstroChem	Gr	30''–30'	0.03–800 kHz	SWE	
PH	mm/Submm	S	ACT	1.1mm–2.0mm	i,p	2007	CMB/MilkyWay	Gr	1'		USA,CAN, UK,MEX RSA	
PH	mm/Submm	O	ALMA	300 μ m–10mm	i,p,s	2010	Any	Gr	0.005''–3'' 0.02''@1mm	3.8kHz–2GHz	USA, ESO,J	Int'l facility
PH	mm/Submm	O	IRAM/Veleta	1.0mm–4.00mm	i,s,po	?	Molecules/Atoms	Gr	10''–1'	> 3.3kHz	IRAM	
PH	mm/Submm	O	IRAM/Pit-Bures	0.8mm–3.0mm	i,s	1988	Molecules/Atoms	Gr	0.7''–4''	> 62kHz	IRAM	
PH	Radio	O	LOFAR	1.25m–10m	i,p	> 2009	Reionization First stars,ANGs, Transcient,Clusters	gr	6''@2m		NL, Int'l	Interferom.
PH	Radio	O	GMRT	21cm–6.0m	i,s	1996	Any	Gr	1''@21cm	62 kHz–16MHz	IN	
PH	Radio	O	Onsala 25m AstroChem	4cm–37cm	i,s	1963	StarForm/ISM/	Gr	30''–30'	0.03 – –8kHz	SWE	—
PH	Radio	O	Westerbork	3.6cm–110cm	i,s	1970	Any	Gr	2''–2.5'	0.18-400 kHz	NL	
PH	Radio	O	GBT	2.0mm–21.0cm	i,s	2000	Any	Gr	10''–36'' 9''@21cm	6–780 kHz	USA	Largest steerable antenna

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 8: Moyen d’Observation Astronomique : Millimetre/Sub-Millimetre, Radio Cont’d

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
PH	Radio	O	MERLIN	1.3cm–2.0m	i,s,po	1980	Any	Gr	8mas–1.4''	0.24 kHz–1MHz	UK	UK-Radio Interferometric Network
PH	Radio	O	Nançay	9.0cm–21.0cm	i,s,po	1965	Any	Gr	2'–22'		F	
PH	Radio	O	Arecibo	35cm–3.5cm	i,s,po	1963	Any	Gr	0.5'–100' 3.5'@21cm	10–500kHz	USA	Largest single dish.
PH	Radio	O	Effelsberg	3.5mm–72cm	i,s,po	1972	Any	Gr	10''–10'	2–50kHz	G	
PH	Radio	O	Parkes	1.3cm–70cm	i,s,po	1961	Any	Gr	1'–30'	20–500 kHz	AUS	
PH	Radio	O	ACTA	3mm–20cm	i,s,po	?	Any	Gr	0.5''–6'' 20''–8'	20–500 kHz	AUS	Interferom.-
PH	Radio	O	RATAN-600	1cm–31cm	i,s	1974	Any	Gr	1'–30'	19–110 kHz	RUS	Operated in transit mode
PH	Radio	O	DKR-1000	2.5–10m	i,s	1972?	Pulsars, space weather	Gr	11'×4.5°		RU	
PH	Radio	O	BSA LPI	3m	i,s	1973	Pulsars, space weather	Gr	48'×22'		RU	
PH	Radio	O	VLA/EVLA	7.0mm–90cm	i,s,po	1976/2012	Any	Gr	0.05''–200'' 0.4''@6cm	0.7kHz–12.5 MHz	USA	EVLA=Extention-Tunable
PH	Radio	O	VLBA	3.0mm–90cm	i	1993	Radiosources/ QSOs/SNRs/Jets	Gr	0.32mas–22mas 0.001''@86GHz		USA	
PH	Radio	O	EVN/e-EVN	7mm–18cm	i	1980	Radiosources	Gr	0.13–30 mas		Int'l	
PH	Radio	O	VSOP-2	7mm–4cm	i,po	2012	AGN, StarForm jet accretion/ jet collimation/	Gr/Sp	38–200 μ as		J	ASTRO-G Sat.+ VLBI ground arrays
PH	Radio	O	SKA	1.0cm–3m	i,sp,po	>2020	Any	Gr	0.1''@1.4GHz	0.5–4GHz	Int'l	
PH	Radio	O	MWA	1m–4m	i,fm	>2009	Reionization, Space weather	Gr	3.4'@200MHz	25000	USA,AUS	Interferom.
PH	Radio	O	PAST	1.5–6m	i,fm	>2009	Reionization,	Gr	3.'@100MHz	25000	USA,CAN CHN	Interferom.

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronography, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Ground, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

Table 9: Moyen d'Observation Astronomique : Gravitational Waves

Mes. ^a	Energy Domain	Type ^b	Mission/ Facility	Energy Range	Mode ^c	Date	Scientific Goals	Base ^d	Spatial Resol.	Spectral Resol.	Agencies/ Institutes	Strength/ Comment
GW	Low-freq	O	Allegro	~920±20Hz		1991	NS/BH binaries	Gr			US	Resonant Bar 2005 IGEC 5bars-Net
GW	Low-freq	O	NAUTILUS	~930±20Hz		1995	NS/BH binaries	Gr			I	Resonant Bar 2005 IGEC 5bars-Net
GW	Low-freq	O	EXPLORER	~910±30Hz		1984	NS/BH binaries	Gr			CERN	Resonant Bar 2005 IGEC 5bars-Net
GW	Low-freq	O	AURIGA	~900±50Hz		1997	NS/BH binaries	Gr			I	Resonant Bar 2005 IGEC 5bars-Net
GW	Low-freq	O	NIOBE	~700±20Hz		1993	NS/BH binaries	Gr			AUS	Resonant Bar 2005 IGEC 5bars-Net
GW	Low-freq	O	MiniGRAIL	~3±60kHz		?	NS/BH binaries	Gr			NL	Resonant Sphere
GW	Low-freq	O	M. Schenberg	3200±50Hz		?	NS/BH binaries	Gr			BR,NL	Resonant Sphere
GW	Low-freq	S	TAMA300	~1500Hz		2000	R&D	Gr			J	300m baseline interferometer
230 GW	Low-freq	S	GEO600	~100Hz~1kHz		2002	SN,Coalesc of Binary	Gr			G,UK	600m baseline interferometer
GW	Low-freq	S	VIRGO	~10Hz~2kHz		2005	NS/BH Binaries to 20Mpc	Gr			I,F	3km baseline interferometer
GW	Low-freq	S	VIRGO+ LIGO	10Hz~few kHz ~50Hz~2kHz		2009? 2002	Same as VIRGO NS/BH Binaries to 20Mpc	Gr			USA	2×4km baseline interferometer
GW	Low-freq	S	eLIGO Advanced-LIGO	10Hz~2kHz ~10Hz~2kHz		2008	Same as LIGO NS/BH Binaries to 300Mpc	Gr			USA,G,UK UK,(AUS?)	Join LIGO+ GEO600+(ACIGA?) coll. interferometer
GW	Low-freq	S	LISA	~100μHz~0.1Hz		>2020?	Orig./Evol. compact objects High-z BH mergers Struc./Evol. Universe Theory of gravity GW Bck: EW transition	Sp			ESA,NASA	5×10 ⁶ km interferometer
GW	Low-freq	S	BBO	~0.1Hz~10.Hz		>2020?	GW Bck: inflation	Sp			NASA	interferometer

^aMes.=Messenger: CR=High Energy Cosmic Ray, NE=neutrino, PH=photon, GW=Gravitational Wave^bS=surveyor, O=Observatory^ci=imaging, p=photometry, s=spectroscopy, po=polarimetry, co=coronagraphy, as=astrometry, pm=photomultiplier, pd=particle detection^dGr=Groung, Sp=Space, Ba=Balloon, Ap=Air plane

13.11 Annexe K: Acronymes utiles

- 2dF: Two Degree Field
- 2MASS: Two Micron All Sky Survey
- AAT: Anglo-Australian Telescope
- ACT: Atacama Cosmology Telescope
- AGAPE: Andromeda Galaxy Amplified Pixel Experiment
- AGN: Active Galactic Nuclei
- AMANDA: Antarctic Muon and Neutrino Detector Array
- ANTARES: Astronomy with a Neutrino Telescope and Abyss environmental RESearch
- APM: Automated Plate Machine
- ALMA: Atacama Large Millimeter Array
- BAO: Baryon Acoustic Oscillation
- BBO: Big Bang Observer
- BCG: Brightest Cluster Galaxy
- BH: Black Hole
- BIMA: Berkeley-Illinois-Maryland millimeter Array
- BOOMERANG: BalOON OBServations of Millimetric Extragalactic Radiation ANd Geophysics
- BOSS: Baryon Oscillation Spectroscopic Survey
- B-W: Baade-Wiesselink
- CAHA: Centro Astronmico Hispano Alemán (Télescope de Calar Alto)
- CANGAROO: Collaboration between Australia and Nippon for a Gamma Ray Observatory in the Outback
- CBI: Cosmic Background Imager
- CDM: Cold Dark Matter
- CDMS: Cryogenic Dark Matter Search
- CELT: California Extremely Large Telescope
- CfA: Center for Astrophysics
- CFHT: Canada-France-Hawaii Telescope
- CFHTLS: Canada-France-Hawaii Telescope Legacy Survey
- CMB: Cosmic Microwave Background

- COBE: COsmic Background Explorer
- COSMOS: COSMic evOlution Survey
- CSLS: CFHTLS Cosmic Shear Legacy Survey
- CTIO: Cerro Tololo Inter-American Observatory
- DAMA: DArk MAtter detection
- DASI: Degree Angular Scale Interferometer
- DENIS: DEep Near Infrared Survey of the Southern Sky
- DES: Dark Energy Survey
- DGP: Dvali, Gabadadze, Porrati
- DLA: Damped Lyman Alpha
- DMR: Differential Microwave Radiometers
- DUNE: Dark UNiverse Explorer
- EDELWEISS: Experience pour DEtecter Les WIMP en Site Souterrain
- EdS: Einstein de Sitter
- EGO: European Gravitational Observatory
- ELT: Extremely Large Telescope
- E-ELT: European-ELT
- EROS: Expérience pour la Recherche d'Objets Sombres
- ESA: European Space Agency
- ESSENCE: Equation of State: SupErNovae trace Cosmic Expansion
- ESO: European Southern Observatory
- FP: Fundamental Plane
- FRW: Friedmann Robertson Walker
- GRB: Gamma Ray Burst
- GCLF: Globular Cluster Luminosity Function
- GMRT: Giant Meterwave Radio Telescope
- GOODS: Great Observatories Origins Deep Survey
- GW: Gravitational Wave
- HDM: Hot Dark Matter
- HDF: Hubble Deep Field
- HESS: High Energy Stereoscopic System

- HST: Hubble Space Telescope
- GL: Gravitational Lenses
- GRB: Gamma Ray Burst
- IRAS: InfraRed Astronomy Satellite
- JDEM: Joint Dark Energy Mission
- JWST: James Webb Space Telescope
- KATRIN: KARlsruhe TRItium Neutrino
- LAMOST: Large sky Area Multi-Object fiber Spectroscopic Telescope
- LCRS: Las Campanas Redshift Survey
- LEP: Large Electron Positron collider
- LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory
- LISA: Laser Interferometer Space Antenna
- LHC: Large Hadron Collider
- LLS: Lyman Limit System
- LMT: Large Millimeter Telescope
- LOFAR: LOw Frequency ARray
- LSP: Lightest Supersymmetric Particle
- LSS: Large Scale Structure
- LSST: Large Synoptic Survey Telescope
- MACHO: MAssive Compact Dark Halo
- MAXIMA: Millimeter Anisotropy eXperiment IMagine Array
- MGC: Millennium Galaxy Catalogue
- MDM : Mixed Dark Matter
- MOND: MOdified Newtonian Dynamics
- NGP: North Galactic Pole
- NIR: Near InfraRed
- NRAO: National Radio Astronomy Observatory
- NS: Neutron Star
- NVSS: NRAO/VLA Sky Survey
- OGLE: Optical Gravitational Lensing Experiment
- OVRO: Owens Valley Radio Observatory

- PNFL: Planetary Nebulae Luminosity Function
- PSCz: Point Source Catalogue redshift survey
- REFLEX: ROSAT-ESO Flux Limited X-ray
- ROSAT: ROentgen SATellite
- Λ CDM: Standard Cold Dark Matter
- SDSS: Sloan Digital Sky Survey
- SFB: Surface Brightness Fluctuation
- SGP: South Galactic Pole
- SKA: Square Kilometer Array
- SMA: SubMillimeter Array
- SNIa: SuperNova de type Ia
- SNAP: SuperNovae Acceleration Probe
- SNLS: SuperNovae Legacy Survey
- SZ: Sunyaev Zeldovich (Effet SZ)
- SUSY: SUperSYmmetry
- TF: Tully-Fischer
- TRGB: Tip of the Red Giant Branch
- TMT : Thirty Meter Telescope
- UHE: Ultra-High Energy
- UKIRT: United Kingdom InfraRed Telescope
- UKIDSS: UKIRT Deep Sky Survey
- UKIDSS LAS : UKIDSS Large Area Survey
- UVES: UV-Visual Echelle Spectrograph
- VHE: Very High Energy
- VIMOS: VIisible Multi-Object Spectrograph
- VISTA: Visible and Infrared Survey Telescope for Astronomy
- VLA: Very Large Array
- VLT: Very Large Telescope
- VSA: Very Small Array
- VST: VLT Survey Telescope
- VVDS: VIMOS VLT Deep Survey

- WDM: Warm Dark Matter
- WHIM: Warm/Hot Intergalactic Medium
- WHT: William Herschel Telescope
- WIMP: Weakly Interacting Massive Particle
- WL: Weak Lensing
- WMAP: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe
- WMAP-1: WMAP first year survey
- WMAP-3: WMAP third year survey
- XMM: X-ray Multi-Mirror Mission