

I. Expansion et composition de l'univers

On suppose un univers homogène, isotrope et en expansion dont les propriétés sont définies par $H(z)$, $R(t)/R_0 = 1/(1+z)$ et les composantes sont caractérisées par leur équation d'état $P = \omega\rho$. Les paramètres décrivant l'univers aujourd'hui s'écriront H_0 , t_0 .

I.1 Description de l'expansion.

Rappeler ce qui peut justifier une équation d'état de cette forme pour toutes les composantes.

Cette forme d'équation d'état est celle d'un fluide parfait. Dans l'hypothèse d'un univers homogène et isotrope on s'attend que le fluide ne subisse pas de contraintes, de chocs, de gradient de vitesse ni de transport de chaleur importants, du moins à grande échelle, ce qui est une propriété des fluides parfaits. L'ensemble de l'univers conserve donc la même température et en l'absence de flux de chaleur, le fluide se comporte comme un gaz parfait et l'expansion est adiabatique. Ces arguments justifient donc une équation d'état de cette forme.

A partir des équations de Friedmann déterminer la forme du facteur d'échelle, $a(t) = R(t)/R_0$ en fonction de t pour les modèles suivants:

- les univers vides, de courbure non-nulle,
- l'univers plat et uniquement composé de photons,
- l'univers plat et uniquement composé de matière,
- l'univers plat et uniquement composé d'une constante cosmologique.

On fera l'hypothèse que $a(t)$ est de la forme t^n et l'on justifiera les valeurs considérées pour n pour chaque modèle. On tracera ces modèles ($a(t)$) sur une même figure, en prenant t_0 comme une référence commune de façon à faire passer tous ces modèles au point $(t_0, 1)$.

- Pour un univers vide, l'équation de Friedmann (290) du cours donne immédiatement

$$\dot{a}^2(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2} . \quad (1)$$

Les solutions dépendent de κ :

- $\kappa = 1$: solution irréaliste (\dot{a} imaginaire).
- $\kappa = 0$: $\dot{a} = 0$. Il s'agit d'un univers statique: $a = a_0 = 1$. La métrique est celle de Minkowski.
- $\kappa = -1$: les solutions sont:

$$\dot{a} = \pm \frac{c}{R_0} \quad (2)$$

mais nous ne considérons que les univers en expansion et la solution qui nous intéresse est donc

$$a(t) = \frac{c}{R_0} t . \quad (3)$$

La dérivée \dot{a} est constante et doit exactement correspondre à H_0 ($H_0 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{z=0}$), donc $H_0 = 1/t_0 = c/R_0$. La forme de l'expansion peut donc s'écrire:

$$a(t) = H_0 t \quad (4)$$

- Pour univers plat mais uniquement composé d'une composante (les autres modèles à discuter), on peut partir de l'expression générale donnée par l'Eq.(264) du cours:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i . \quad (5)$$

et sachant que

$$\rho_i = \rho_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)} = \rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)} . \quad (6)$$

L'équation différentielle qui décrit l'expansion d'univers plats est donc

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_{0i} a^{-(1+3\omega_i)} . \quad (7)$$

- si $\omega \neq -1$, alors On cherche des solutions de la forme $a(t) \propto t^n$ ce qui implique que

$$n = \frac{2}{3 + 3\omega} \quad (8)$$

* Composante photon uniquement: $\omega = 1/3$ donnée par l'équation d'état des photons, donc $n = 1/2$. On a toujours $\dot{a}(t = t_0) = H_0$, soit

$$\frac{1}{2t_0} = H_0. \quad (9)$$

La solution, avec $a(t = t_0) = 1$ comme référence, s'écrit

$$a(t) = \sqrt{2H_0 t^{1/2}} \quad (10)$$

* Composante matière uniquement: $\omega = 0$. En effet, dans un univers dominé par la matière, le terme de pression est totalement négligeable compte tenu des vitesses individuelles des galaxies qui sont de l'ordre de 100 kms^{-1} . Donc $n = 2/3$ et on a de même

$$a(t) = (3/2H_0)^{2/3} t^{2/3} \quad (11)$$

– si $\omega = -1$, alors on est dans la cas de la constante cosmologique et la solution devient

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda a^2 \quad (12)$$

Soit

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} \quad (13)$$

ce qui conduit à une solution exponentielle:

$$a(t) = \exp [H_0 (t - t_0)] \quad (14)$$

En résumé, pour l'ensemble de ces modèles, avec une référence temporelle sur $t = t_0$ et en fonction de H_0 et t , nous avons

- Univers vide, $\kappa = 0$: $a(t) = 1$
- Univers vide $\kappa = 1$: $a(t) = H_0 t$
- Univers plat dominé par le rayonnement: $a(t) = \sqrt{2} (H_0 t)^{1/2}$
- Univers plat dominé par la matière: $a(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (H_0 t)^{2/3}$
- Univers plat dominé par la constante cosmologique: $a(t) = \exp [H_0 (t - t_0)]$

Il fallait reporter ces modèles sur une figure de façon à les comparer. Il suffit de tracer les courbes suivantes:

- $y_1=1.$
- $y_2=\exp(1./1.*\log(x))$
- $y_3=\exp(1./2.*\log(x))$
- $y_4=\exp(2./3.*\log(x))$
- $y_5=\exp(x-1.)$

Voir figure.

I.2 La transition vers la période énergie sombre.

Si pour les besoins de la comparaison les divers modèles de la figure doivent être tous normalisés pour $t = t_0$, c'est n'est évidemment pas le cas en réalité. Compte tenu de la dépendance des composantes matière et constante cosmologique en fonction du redshift et des valeurs des paramètres cosmologiques les plus vraisemblables aujourd'hui, calculer à quel redshift $z_{m,\Lambda}$ doit commencer la phase dominée par l'énergie sombre. Qu'en concluez vous?

La transition se produit lorsque

$$\rho_m = \rho_\Lambda \quad (15)$$

c'est à dire

$$\rho_{0,m} (1 + z_{m,\Lambda})^3 = \rho_{0,\Lambda} = \rho_\Lambda \quad (16)$$

puisque la densité de constante cosmologique est constante. En normalisant sur la densité critique on obtient donc

$$1 + z_{m,\Lambda} = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{0,m}} \right)^{1/3} \quad (17)$$

Les observations laissent penser que $\Omega_{0,m} = 0.24$ et $\Omega_\Lambda = 0.73$. Dans ce cas

$$z_{m,\Lambda} = 0.44 . \quad (18)$$

La transition est donc très récente ce qui montre que notre univers a connu quatre grande phases, au moins: l'inflation, la période radiative, la période matière et la période énergie sombre. La transition vers cette dernière et quasi-contemporaine à l'histoire de l'humanité. On peut donc se demander si cela n'est pas suspect: pourquoi cette phase se déroule justement aujourd'hui?

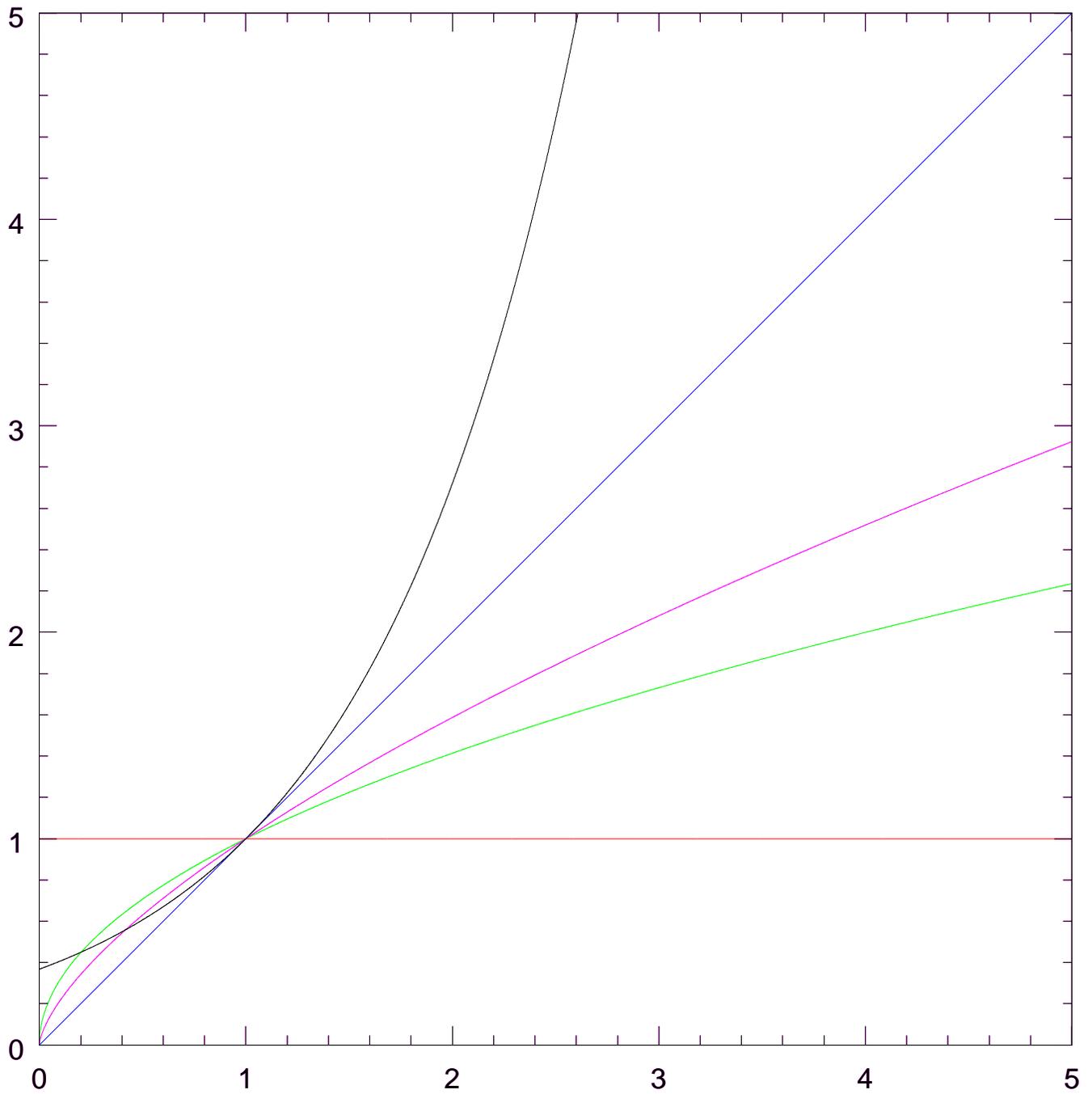


Figure 1: Forme du facteur d'échelle pour les modèles discutés ci-dessus. En rouge: univers vide, $\kappa = 0$: $a(t) = 1$; en bleu univers vide $\kappa = -1$: $a(t) = H_0 t$; en vert univers plat dominé par le rayonnement: $a(t) = \sqrt{2} (H_0 t)^{1/2}$; en magenta univers plat dominé par la matière: $a(t) = (3/2)^{2/3} (H_0 t)^{2/3}$; en noir univers plat dominé par la constante cosmologique: $a(t) = \exp [H_0 (t - t_0)]$. Tous les modèles sont rapportés au temps t_0 .

II. Mesurer H_0 avec précision et effet de distance.

La vitesse observée des galaxies est la somme de la vitesse d'expansion et de la vitesse individuelle de chaque galaxie. Cette combinaison induit une erreur sur la mesure de H_0 , si une correction n'est pas effectuée. Supposons que nous mesurons la distance D et le redshift z d'une galaxie pas trop lointaine. Sachant que H_{est} est contaminé par une composante particulière v_{pec} , déterminer à quelle distance on sera en mesure de calculer H_0 avec une précision de 1%. On supposera que $v_{pec} = 200 \text{ km s}^{-1}$ et on choisira un H_0 conforme à la valeur la plus vraisemblable aujourd'hui, en la justifiant. Discuter ce résultat.

La vitesse observée de la galaxie est

$$v_{obs} = H_0 D + v_{pec} . \quad (19)$$

Sans correction, on aurait donc

$$H_{est} = \frac{v_{obs}}{D} . \quad (20)$$

L'erreur est donc de

$$\delta H_{est} = H_{est} - H_0 = \frac{v_{pec}}{D} \quad (21)$$

Pour avoir une précision relative mieux que 1% nous devons donc observer des galaxies telles que

$$\frac{H_{est} - H_0}{H_0} = \frac{v_{pec}}{H_0 D} < 0.01 \quad (22)$$

Avec $v_{pec} = 200 \text{ km s}^{-1}$ et $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, qui est la valeur déduite de

- l'observation de Céphéides par le HST ou
- des analyses des anisotropies du CMB par WMAP,

on trouve alors que

$$D > 280 \text{ Mpc} \quad (23)$$

Le gain en précision s'accroît avec la distance. Il faut cependant noter que la perte de rapport signal-sur-bruit sur le flux des galaxies ainsi que la dégradation de la résolution spatiale jouent dans le sens inverse.