Master M2
Examen de Cosmologie C1 - Jeudi 17 mars 2005

2 heures Document autorisé: cours

Question de cours (6 *pts*).

Compte tenu des faits observationnels et des conséquences sur $H(z)$, combien de grandes périodes, indépendamment de la phase d'inflation, notre univers semble avoir traversé ? On énumérera les observations et leur validité puis on discutera $H(z)$.

Les anisotropies du rayonnement cosmologique fossile, les courbes de lumière des SNIa, les masses des systèmes gravitants, l'abondance des amas de galaxies et les effets de lentilles gravitationnels concordent vers un univers plat avec une constante cosmologique non-nulle, positive où $\Omega_{0,m} \approx 0.3$ et $\Omega_\Lambda \approx 0.7$.

Dans ce cas, $H(z)$ est telle que

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,\gamma}(1+z)^4 + \Omega_{0,m}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \tag{1}$$

Clairement, $H(z)$ exprime que l'univers va connaitre trois périodes selon la valeur de z, donc de l'age de l'univers: une période radiative, une période dominée par la matière et une période dominée par l'énergie noire associée à la constante cosmologique.

Période radiative (14 *pts*).

On suppose un univers plat, sans terme d'énergie noire dont les propriétés sont caractérisées par H_0, $a(t) = R(t)/R_0$, $\Omega_{0,m}$ et $\Omega_{0,\gamma}$. Ces paramètres décrivant respectivement la constante de Hubble à t_0, la facteur déchelle nomalisé à sa valeur aujoud'hui, et les paramètres de densité de matière et de rayonnement à t_0.

1. Montrer que pour cet univers, on peut écrire

$$\left(\frac{H(t)}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{0,m}}{a^3} + \frac{\Omega_{0,\gamma}}{a^4} \tag{2}$$

Par exemple en utilisant l'équation 276 du cours, avec $w = 0$ pour la matière et $w = 1/3$ pour le rayonnement, on a

$$\left(\frac{H(t)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,m}(1+z)^3 + \Omega_{0,\gamma}(1+z)^4 \ , \tag{3}$$

et sachant que $(1+z) = R_0/R = a(t)^{-1}$, le résultat est immédiat.

2. En déduire que

$$H_0 \ \mathrm{d}t = \frac{a\mathrm{d}a}{\sqrt{\Omega_{0,\gamma}}} \ \left[1 + \frac{a}{a_{rm}}\right]^{-1/2} \tag{4}$$

où $a_{rm} = \frac{\Omega_{0,\gamma}}{\Omega_{0,m}}$**.**

On écrit

$$H(t)^{-1} = \left(\frac{1}{H_0}\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \tag{5}$$

et on met en facteur $\Omega_{0,\gamma}a^{-4}$ dans le terme de droite.

3. Montrez alors que l'age de l'univers s'exprime de la façon suivante:

$$H_0 \ t = \frac{4}{3}\frac{a_{rm}^2}{\sqrt{\Omega_{0,\gamma}}} \ \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}}\right)\left(1 + \frac{a}{a_{rm}}\right)^{1/2}\right] \tag{6}$$

Il suffit d'intégrer. On pose $a/a_{rm} \ = \ u$ et on intègre par parties.

4. Verifiez que les deux régimes, celui dominé par le rayonnement (*i.e.* $a << a_{rm}$**) et celui dominé par la matière (***i.e.* $a >> a_{rm}$**) se comportent bien comme**

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad \text{et} \quad a(t) \propto t^{2/3} \tag{7}$$

On donnera les facteurs de proportionalité en fonction de H_0 **,** $\Omega_{0,m}$ **et** $\Omega_{0,\gamma}$**.**

Dans le premier cas limite il faut faire un développement de Taylor au deuxième ordre, le second est immédiat. On trouve alors

$$a << a_{rm} \Longrightarrow \ a = \left(3\sqrt{\Omega_{0,\gamma}}H_0 t\right)^{1/2} \tag{8}$$

$$a >> a_{rm} \Longrightarrow \ a = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{0,m}}H_0 t\right)^{2/3}$$

ce qui est bien ce qu'on attendait: période radiative $a \propto t^{1/2}$ et période dominée par la matière $a \propto t^{2/3}$

5. 5. Montrez que la période d'équilibre matière-rayonnement correspond à $a = a_{rm}$ et donc que:

$$t_{eq} = 0.391 \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_{0,\gamma}^{3/2}}{\Omega_{0,m}^2} \tag{11}$$

La période d'équilibre correspond à $a(t_{eq}) = a_{rm}$. En effet on a $\rho_\gamma = \rho_{0,\gamma}(1+z)^{-4}$ et $\rho_m = \rho_{0,m}(1+z)^{-3}$. Donc

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_m} = \frac{\rho_{0,\gamma}}{\rho_{0,m}} \frac{1}{1+z} \tag{12}$$

A t_{eq} on a $\rho_\gamma = \rho_m$, et dans ce cas on a

$$1 + z = \frac{\rho_{0,\gamma}}{\rho_{0,m}} = \frac{\Omega_{0,\gamma}}{\Omega_{0,m}} \tag{13}$$

C'est à dire

$$a(t_{eq}) = a_{rm} \tag{14}$$

La solution est ensuite immédiate.

6. Sachant que $\Omega_{0,\gamma} = 8.5\ 10^{-5}$, $\Omega_{0,m} = 0.3$ et ce que vaut H_0 par ailleurs, calculez t_{eq}. Vérifiez que la valeur trouvée justifie pleinement de négliger la période radiative lorsque l'on détermine l'age actuel de l'univers.

On a $H_0^{-1} = 14\ .\ 10^{10}$ ans. D'où

$$a(t_{eq}) = 47000 \text{ ans} \tag{15}$$

Il est clair que c'est totalement négligeable devant l'age de l'univers actuel.