

Des Univers à courbure nulle et constante cosmologique non-nulle

On suppose un univers homogène, isotrope dont les propriétés sont décrites par les équations de Friedmann. On considère des univers à courbure nulle composés uniquement d'une composante de matière non relativiste et d'une constante cosmologique.

On pose $c = 1$ et la constante cosmologique est Λ .

I. Montrez que dans ce cas $H(z)$ peut s'écrire:

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} \left[\Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \right]. \quad (1)$$

On décrira le sens des termes de cette expression.

Réponse:

A partir du cours on a

$$H(z)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0\Lambda} + \Omega_k(1+z)^2 \right], \quad (2)$$

où $H(z)$ est le facteur d'expansion, z est le redshift, H_0 est le facteur d'expansion à $t = t_0$ (temps présent), Ω_{0m} est le paramètre de densité de matière à $t = t_0$, $\Omega_{0\Lambda}$ est la constante cosmologique réduite à $t = t_0$, $\Lambda = 3 \Omega_{0\Lambda} H_0^2$ ($c = 1$, Λ est la constante cosmologique), Ω_k est le paramètre de courbure.

Pour un univers à courbure nulle, $\Omega_k = 0$. Par ailleurs $R/R_0 = 1/(1+z)$, donc

$$H^2(z) = H_0^2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} \left[\Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \right]. \quad (3)$$

II. Montrez alors que l'expansion est décrite par l'équation différentielle suivante

$$\dot{R}^2 \frac{R}{P(R)} = H_0^2 \quad (4)$$

où $P(R)$ est un polynome simple et $\dot{R} = dR/dt$.

Donner alors l'expression de $R(t)$ pour un univers à constante cosmologique nulle.

Réponse:

Sachant que $H(z) = \dot{R}/R$, la réponse est immédiate

$$\dot{R}^2 \left(\frac{R}{\Omega_{0m} R_0^3 + \Omega_{0\Lambda} R^3} \right) = H_0^2, \quad (5)$$

$$P(r) = \Omega_{0m} R_0^3 + \Omega_{0\Lambda} R^3.$$

Pour un univers à constante cosmologique nulle, l'équation différentielle se réduit à

$$R\dot{R}^2 = \Omega_{0m} R_0^3 H_0^2 \quad (6)$$

soit

$$R^{1/2} dR = \sqrt{\Omega_{0m} R_0^3 H_0^2} dt \quad (7)$$

dont la solution est connue, sachant qu'à $t = 0$, $R = 0$:

$$R(t) = R_0 \left[\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{0m} H_0^2} \right]^{2/3} t^{2/3} \quad (8)$$

III. Cas des univers à constante cosmologique non nulle

III.a. Montrez que l'expansion est décrite par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{u(1-u)}} = (-3\Lambda)^{1/2} \quad (9)$$

où on aura posé

$$\Omega_{0m} R_0^3 u = -\Omega_{0\Lambda} R^3, \quad (10)$$

avec $\Lambda = 3\Omega_{0\Lambda} H_0^2$ ($c = 1$).

Réponse:

On a

$$\Omega_{0m} R_0^3 du = -3 \Omega_{0\Lambda} R^2 dR \quad (11)$$

et donc

$$H_0^2 = \left(-\frac{1}{3} \frac{\Omega_{0m} R_0^3}{\Omega_{0\Lambda}} \frac{1}{R^2} \dot{u} \right)^2 \left(\frac{R}{\Omega_{0m} R_0^3 - \Omega_{0m} R_0^3 u} \right) \quad (12)$$

ce qui se réduit à

$$H_0^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{3 \Omega_{0\Lambda}} \left(\frac{1}{1-u} \right) \left(-\frac{1}{u} \right) \dot{u}^2 \quad (13)$$

Avec $\Lambda = 3 \Omega_{0\Lambda} H_0^2$ on trouve effectivement l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{u(1-u)}} = (-3\Lambda)^{1/2} \quad (14)$$

III.b. En posant $\frac{1}{2}\cos\omega = u - \frac{1}{2}$ montrez alors qu'il suffit de résoudre:

$$-\dot{\omega} = (-3\Lambda)^{1/2} \quad (15)$$

Réponse:

L'équation

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{u(1-u)}} = (-3\Lambda)^{1/2} \quad (16)$$

peut s'écrire

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2}} = (-3\Lambda)^{1/2} \quad (17)$$

et si l'on pose $\frac{1}{2}\cos\omega = u - \frac{1}{2}$ alors il est immédiat que l'équation différentielle se transforme en

$$-\dot{\omega} = (-3\Lambda)^{1/2} \quad (18)$$

III.c Discutez $R(t)$ pour le cas $\Lambda < 0$ et montrez que ces univers finissent toujours par se recontracter. Donnez le temps où le collapse s'achève.

Réponse:

Pour $\Lambda < 0$ la solution de l'équation différentielle est

$$\omega = -(-3\Lambda)^{1/2} t + C \quad (19)$$

A $t = 0$, $R = 0$, soit $u = 0$, et donc $C = \pi$:

$$u = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left[(-3\Lambda)^{1/2} t \right] \right] \quad (20)$$

par conséquent

$$R^3(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{0m}}{-\Omega_{0\Lambda}} \right) R_0^3 \left[1 - \cos \left[\left(-9H_0^2 \Omega_{0\Lambda} \right)^{1/2} t \right] \right] \quad (21)$$

Se modèle passe par un maximum, puis recollapse toujours pour atteindre $R = 0$ à $\left[\left(-9H_0^2 \Omega_{0\Lambda} \right)^{1/2} t \right] = 2\pi$, soit à

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{-9H_0^2 \Omega_{0\Lambda}}} \quad (22)$$

III.d Discutez $R(t)$ pour le cas $\Lambda > 0$ et montrez que ces univers sont toujours en expansion

Réponse:

Pour $\Lambda > 0$, la solution est immédiate en considérant le cas précédent (avec $i = \sqrt{-1}$). On trouve alors

$$R^3(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0\Lambda}} \right) R_0^3 \left[\text{ch} \left[\left(9H_0^2 \Omega_{0\Lambda} \right)^{1/2} t \right] - 1 \right] \quad (23)$$

Ce modèle a bien $R = 0$ à $t = 0$.

On a donc l'expression du facteur d'échelle des modèles $\Lambda > 0; k = 0$:

$$R(t) = A [\text{ch}(B t) - 1]^{1/3} \quad (24)$$

En dérivant en fonction du temps on a

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} A [\text{ch}(B t) - 1]^{-2/3} \times B \text{sh}(B t) \quad (25)$$

qui est toujours positive pour $t > 0$. Ces univers sont donc en expansion éternelle.

III.e Montrez que ces modèles $\Lambda > 0$ passent par deux phases d'accélération différentes. Ensuite, en considérant les deux cas limites $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$ montrez que ces univers décélèrent d'abord, puis accélèrent

Réponse:

Il faut calculer la dérivée seconde de $R(t)$ par rapport au temps. Il est facile de montrer qu'elle prend la forme suivante:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = AB^2 [\text{ch}(B t) - 1]^{-5/2} [2 + \text{ch}^2(B t) - 3 \text{ch}(B t)] \quad (26)$$

Les termes en dehors des crochets sont toujours positifs et donc le signe de la dérivée seconde est donné par

$$R_s = [2 + \text{ch}^2(B t) - 3 \text{ch}(B t)] . \quad (27)$$

- Pour $t \rightarrow 0$, on a , en posant $B t = x$

$$R_s \simeq 2 + \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{x^2}{2-3}\right) \quad (28)$$

Soit

$$R_s \simeq -\frac{x^2}{2} < 0 \quad (29)$$

L'univers commence donc pas une expansion décélérée.

- Pour $t \rightarrow \infty$, alors le terme $\exp(2B t)$ de $\text{ch}^2(B t)$ finira par dominer et donc

$$R_s \simeq \frac{1}{4} \exp(2B t) > 0 \quad (30)$$

et l'univers poursuit son expansion, mais de façon accélérée.

Ce type d'univers a donc bien deux phases d'accélération différentes.

IV. Ce dernier type d'univers semble correspondre à notre univers actuel. Rappeler les arguments observationels qui justifient que sa courbure doit être (quasi)-nulle et qu'il est en expansion accélérée

Réponse:

Voir le cours. La courbure nulle est justifiée par la position et l'amplitude du premier pic acoustique dans les mesures des anisotropies du CMB. L'accélération de l'univers est observée via le comportement de la luminosité apparente des supernovae de type SNIa en fonction du redshift. Ces deux faits sont corroborés par les observations des oscillations acoustiques des baryons dans la distribution des galaxies.