

Cosmologie

Cours M2/C1

2008-2009

Yannick Mellier

Institut d'Astrophysique de Paris

mellier@iap.fr

Tel: 0144328140

Bureau: 210a

Cours Cosmologie C1

Master M2 2008-2009

- Transparents : *sur le web ; susceptibles de modification à n'importe quel moment*
- Cours: *pdf sur le web prêt (version 01/03/09)*
http://terapix.iap.fr/rubrique.php?id_rubrique=113

Examen: **Jeudi 19 MARS**
de 10 à 12 hrs ;
Ecrit , 2hrs, avec documents

Objectif du cours

- Fournir les bases de la cosmologie moderne
 - Cosmologie observationnelle
 - L'univers homogène et les modèles cosmologiques
 - Les paramètres cosmologiques
 - L'histoire thermique de l'univers et la nucléosynthèse primordiale

Bibliographie

Compte tenu de la grande diversité d'origine et d'objectif des étudiants, ces références bibliographiques couvrent un domaine assez vaste en niveau et en contenu.

- F. Bernardeau, *Cosmologie. Des fondements théoriques aux observations*. EDP Sciences/CNRS Editions. 2007.
- S. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley. 2004.
- F. Combes, P. Boissé, A. Mazure, A. Blanchard, *Galaxies et cosmologie*. InterEditions/CNRS. 1991.
- M. Lachièze-Rey, *Initiation à la cosmologie*, Masson 2004.
- J. Merleau-Ponty, *Cosmologies du XXIème siècle*, Gallimard. 1965.
- C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman. 1973.
- T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, CUP. 1993.
- T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics Volume III: Galaxies and Cosmology*, CUP. 2002.
- J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, CUP, 1999.
- P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, PUP. 1993.
- P. J. E. Peebles, *Large-Scale Structures of the Universe*, PUP. 1980.
- P. Peter, J.-P. Uzan *Cosmologie primordiale*, Belin. 2005.
- J. Rich *Principes de cosmologie*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique. 2002.
- P. Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology. An introduction*. Springer, 2006.
- H. Stephani, *General Relativity*, CUP. 1996.
- S. Webb, *Measuring the Universe*, Springer. 2001.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley. 1972.
- S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press 2008.

Cosmologie

Cours M2/C1 Partie 1

Panorama

Une définition de la cosmologie

- **Etude et interprétation des propriétés et du contenu de l'Univers observable** avec les lois de la physique de l'Univers proche
- **Description de l'origine et de l'évolution** de son organisation, de ses propriétés physiques et de ses constituants

Les fondements de la cosmologie

- Expansion de l'Univers
- Abondance des éléments légers
- Fond de rayonnement micro-onde à $T=2.7\text{K}$

Une particularité...

Les fondements de la cosmologie

- Expansion de l'Univers
- Abondance des éléments légers
- Fond de rayonnement micro-onde à $T=2.7\text{K}$

Une particularité: c = constante...
*On peut remonter le temps et
construire une histoire de l'univers,*

Les fondements de la cosmologie

- Relativité Générale
- Principe Cosmologique

- Equations d'Einstein
- Equation d'état: modèles d'Univers

- Expansion de l'Univers
- Abondance des éléments légers
- Fond de rayonnement micro-onde à $T=2.7\text{K}$

Une particularité: c = constante...
*On peut remonter le temps et
construire une histoire de l'univers.*

Les fondements de la cosmologie

- Relativité Générale
- Principe Cosmologique

- Equations d'Einstein
- Equation d'état: modèles d'Univers

- Paradigme du Big Bang

- Expansion de l'Univers
- Abondance des éléments légers
- Fond de rayonnement micro-onde à $T=2.7\text{K}$

Une particularité: c = constante...
*On peut remonter le temps et
construire une histoire de l'univers.*

Les fondements de la cosmologie

- Relativité Générale
- Principe Cosmologique

- Equations d'Einstein
- Equation d'état: modèles d'Univers

- Paradigme du Big Bang

- Théorie de l'inflation
- Physique de l'Univers primordial

- Expansion de l'Univers
- Abondance des éléments légers
- Fond de rayonnement micro-onde à $T=2.7K$

Une particularité: $c = \text{constante} \dots$
On peut remonter le temps et construire une histoire de l'univers.

Une brève histoire de la cosmologie du XX^{ième} siècle

- **1915** Einstein. Théorie de la relativité générale.
- **1920** Le "Grand Débat" entre Shapley (les nébuleuses spirales sont des nuages galactiques) et Curtis (les nébuleuses spirales sont des objets extragalactiques comme notre Galaxie). Preuve de la nature extragalactique des galaxies.
- **1922** Modèles de Friedmann. Première intuition du Big Bang.
- **1927** Modèles de Lemaître. Modèle de l'atome primordial.
- **1928-1929** Robertson, Hubble. Preuve observationnelle de l'expansion de l'univers.
- **1933** Zwicky. Analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma. Naissance du problème de la *masse manquante*.
- **1940** Gamov. Suggestion de la nucléosynthèse des éléments dans l'Univers chaud. Prédiction d'un rayonnement résiduel fossile.
- **1940** Alpher & Herman. Premiers calculs de nucléosynthèse primordiale.
- **1948** Bondi, Gold, Hoyle. Modèle stationnaire.
- **1963** Découverte du premier quasar.
- **1965** Penzias & Wilson. Découverte du rayonnement cosmologique à $T=2.7$ K.
- **1965** Test de Gunn Peterson: l'univers est fortement ionisé.

Une brève histoire de la cosmologie du XX^{ième} siècle

- **Années 1970** Origine des galaxies et des structures: quand , où , comment?
- **Années 1970** Modèles isothermes (bottom-up) et adiabatiques (top-down) en confrontation.
- **Années 1970** Découverte de la forêt Lyman-alpha
- **1971** Première suggestion que les amas de galaxies sont baignés par un gaz chaud étendu (démonstration qu'il s'agit de rayonnement de freinage en 1986).
- **1981** Mise en évidence observationnelle des courbes de rotation plates des galaxies spirales. Évidence de halo de *matière noire*?
- **Années 1980** Echec des modèles de formation des structures avec matière baryonique seule. Naissance des modèles avec matière non-baryonique: Hot Dark Matter (HDM, s'apparente aux modèles top-down) et Cold Dark Matter (CDM, s'apparente aux modèles bottom-up).
- **1981** Guth. Théorie de l'inflation. Apporte un cadre théorique expliquant les problèmes de la "platitude" de l'Univers et de l'Horizon. Prédit le spectre de fluctuation primordiale.

Une brève histoire de la cosmologie du XX^{ième} siècle

- **Années 1970** Origine des galaxies et des structures: quand , où , comment?
- **Années 1970** Modèles isothermes (bottom-up) et adiabatiques (top-down) en confrontation.
- **Années 1970** Découverte de la forêt Lyman-alpha
- **1971** Première suggestion que les amas de galaxies sont baignés par un gaz chaud étendu (démonstration qu'il s'agit de rayonnement de freinage en 1986).
- **1981** Mise en évidence observationnelle des courbes de rotation plates des galaxies spirales. Évidence de halo de *matière noire*?
- **Années 1980** Echec des modèles de formation des structures avec matière baryonique seule. Naissance des modèles avec matière non-baryonique: Hot Dark Matter (HDM, s'apparente aux modèles top-down) et Cold Dark Matter (CDM, s'apparente aux modèles bottom-up).
- **1981** Guth. Théorie de l'inflation. Apporte un cadre théorique expliquant les problèmes de la "platitude" de l'Univers et de l'Horizon. Prédit le spectre de fluctuation primordiale.
- **1985** Arcs gravitationnels. Preuve directe que les amas de galaxies sont dominés par leur contenu en matière noire.
- **1986** Le *Center for Astrophysics* (CfA) redshift survey: mise en évidence de la structuration tri-dimensionnelle des galaxies. Elles se trouvent disposées sur les parois de gigantesques bulles dont l'intérieur semble vide de lumière.

Une brève histoire de la cosmologie du XX-XXI^{ème} siècle

- **1988** Comptage ultra-profond des galaxies, excès de galaxies bleues.
- **Années 1990-2000:** Expériences de micro-lensing gravitationnelle MACHO et EROS pour la détection de candidats matière noire formés d'objets compacts dans le halo de notre Galaxie. Les résultats après 10 ans montrent qu'il s'agit d'une composante sous dominante, voire négligeable de notre halo.
- **1992** COBE: spectre de corps noir du rayonnement fossile. $T=2.725$ K. Carte des fluctuations de température du rayonnement cosmologique. Observations compatibles avec une origine purement gravitationnelle, un spectre de puissance des fluctuations invariant d'échelle et des structures engendrées par un champ de fluctuation de densité gaussien.
- **1996** Découverte du fond diffus infrarouge.
- **1997-1999** Diagramme magnitude-distance des supernovae de type Ia. Preuve que l'univers est accéléré. Compte tenu des connaissances actuelles, la constante cosmologique est vraisemblablement non nulle. Emergence du concept d'énergie sombre.
- **1995-2000** Le Hubble Key programme: $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km/sec/Mpc}$ (Freedman et al. 2001).
- **1997-2003** Le relevé spectroscopique *2-degree Field* (2dF) et le relevé photométrique et spectroscopique *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).
- **2000** BOOMERANG et MAXIMA: mise en évidence du premier pic (appelé pic acoustique) du spectre des fluctuations de température du rayonnement cosmologique qui démontre que notre univers est vraisemblablement plat.

Une brève histoire de la cosmologie du XXI^{ème} siècle

- **2000** BOOMERANG et MAXIMA: mise en évidence du premier pic (appelé pic acoustique) du spectre des fluctuations de température du rayonnement cosmologique qui démontre que notre univers est vraisemblablement plat.
- **2000-2002** Premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique. Premières déterminations de Ω_m et σ_8 .
- **2000-2002** Mesure du spectre de puissance et du facteur de biais aux grandes échelles avec les relevés spectroscopiques 2dF et SDSS.
- **2000-2002** Mise en évidence de l'oscillation des neutrinos prouvant la masse non-nulle des neutrinos (du moins, la somme totale des masses).
- **2003** WMAP-1: carte haute résolution des anisotropies du fond diffus cosmologique. Détermination précise d'une série de paramètres cosmologiques et validation du modèle du Big bang standard composé de matière noire froide et dominé par une composante d'énergie sombre. Premières réjections de certains scénarios d'inflation.
- **2005** SDSS puis 2dF: détection du pic acoustique des baryons dans la distribution à grande échelle des galaxies. Mesure indépendante de Ω_m , de la courbure Ω_k et du paramètre w_0 de l'énergie sombre.
- **2006** WMAP-3/SNLS. WMAP-3: première cartographie complète de la polarisation du CMB par WMAP. Avec les données du SNLS: détermination précise d'une série de paramètres cosmologiques et affinement des contraintes sur l'énergie sombre.
- **2006** "The Bullet Cluster": désaccord apparent entre la distribution de la matière noire déterminée par les effets de lentille gravitationnelle et la distribution de la matière baryonique vue par les observations X. Première confrontation directe et tangible entre l'hypothèse matière noire et l'hypothèse MOND.
- **2007** Reconstruction de la distribution tri-dimensionnelle de la matière noire par analyse des effets de distorsion gravitationnelle avec le relevé COSMOS.

Une brève histoire de la cosmologie du XXI^{ème} siècle

- **2008** Première mesure du cisaillement gravitationnel cosmologique et de la distribution de la matière noire aux très grandes échelles (échelles où la physique linéaire, bien connue, s'applique) avec le CFHTLS. Mesure de $\sigma_8 - \Omega_m$ par le "cosmic shear" .
- **2008** Lancement du LHC.
- **2009** .. 16 avril ... lancement des satellites Planck et Herschel.

Les briques des modèles cosmologiques

Conditions initiales
Défauts topologiques
Gaussianité...

Géométrie globale

Ouvert
Plat
Fermé
Taux d'expansion...

Contenu en matière et énergie

Baryons
Leptons (e, ν ,...), DM?, DE?...

Paramètres cosmologiques

Spectre de puissance de la matière noire

Ω_M densité de matière
 Ω_Λ Constante cosmologique
 H_0 Constante de Hubble
Etc...

Ω_b densité en masse de baryons
 n Indice spectral primordial
Etc...

W , champ de quintessence ?

Histoire de l'Univers

- Ω_m
- Ω_λ
- Ω_ν
- Ω_γ
- Ω_b
- $\eta = n_b/n_\gamma$

Origine, nature et propriétés des fluctuations

Spectre de puissance: $A_n k^{n_s} A_T k^{n_T}$

Age et expansion: $t + h$

DAWN OF TIME
?

tiny fraction of a second

inflation

Surface dernière diffusion:

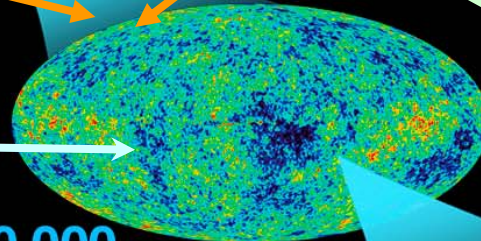
$z_{dec}, t_{dec}, \Delta z_{dec}$

380,000 years

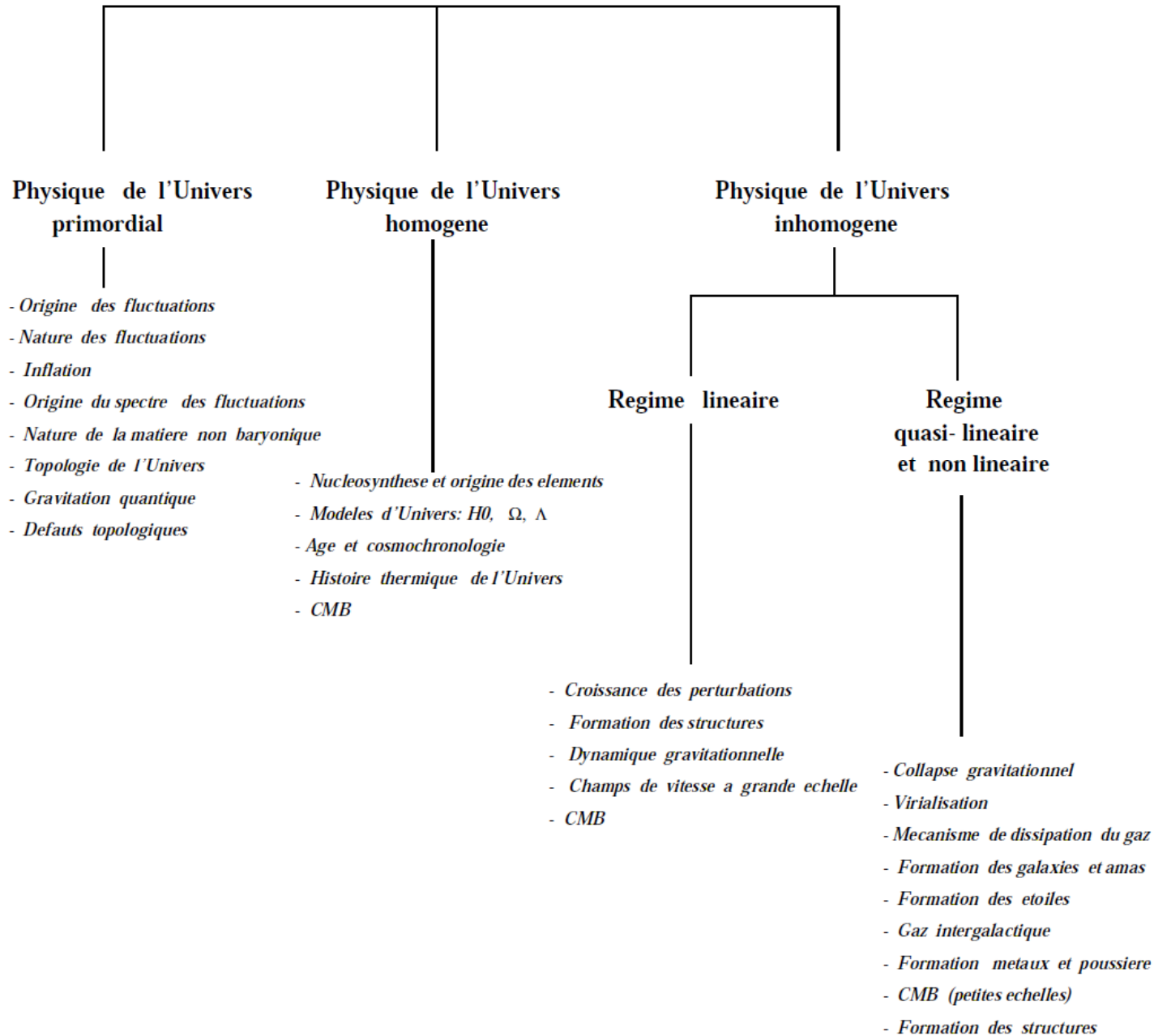
Premières lumières: flash et re-ionisation du milieu:

τ, z_τ

13.7 billion years

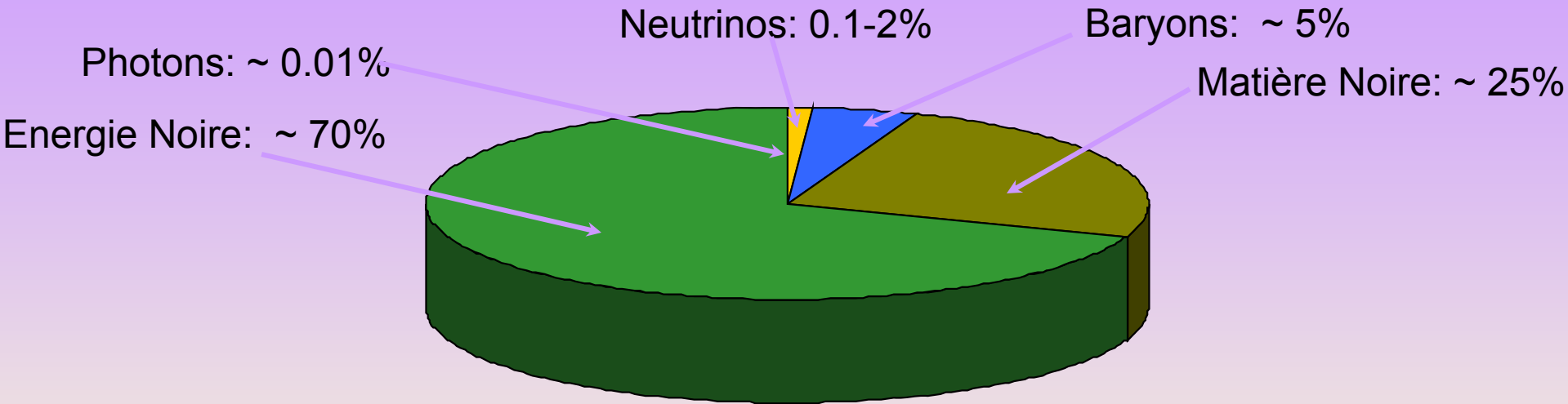


PRINCIPE COSMOLOGIQUE

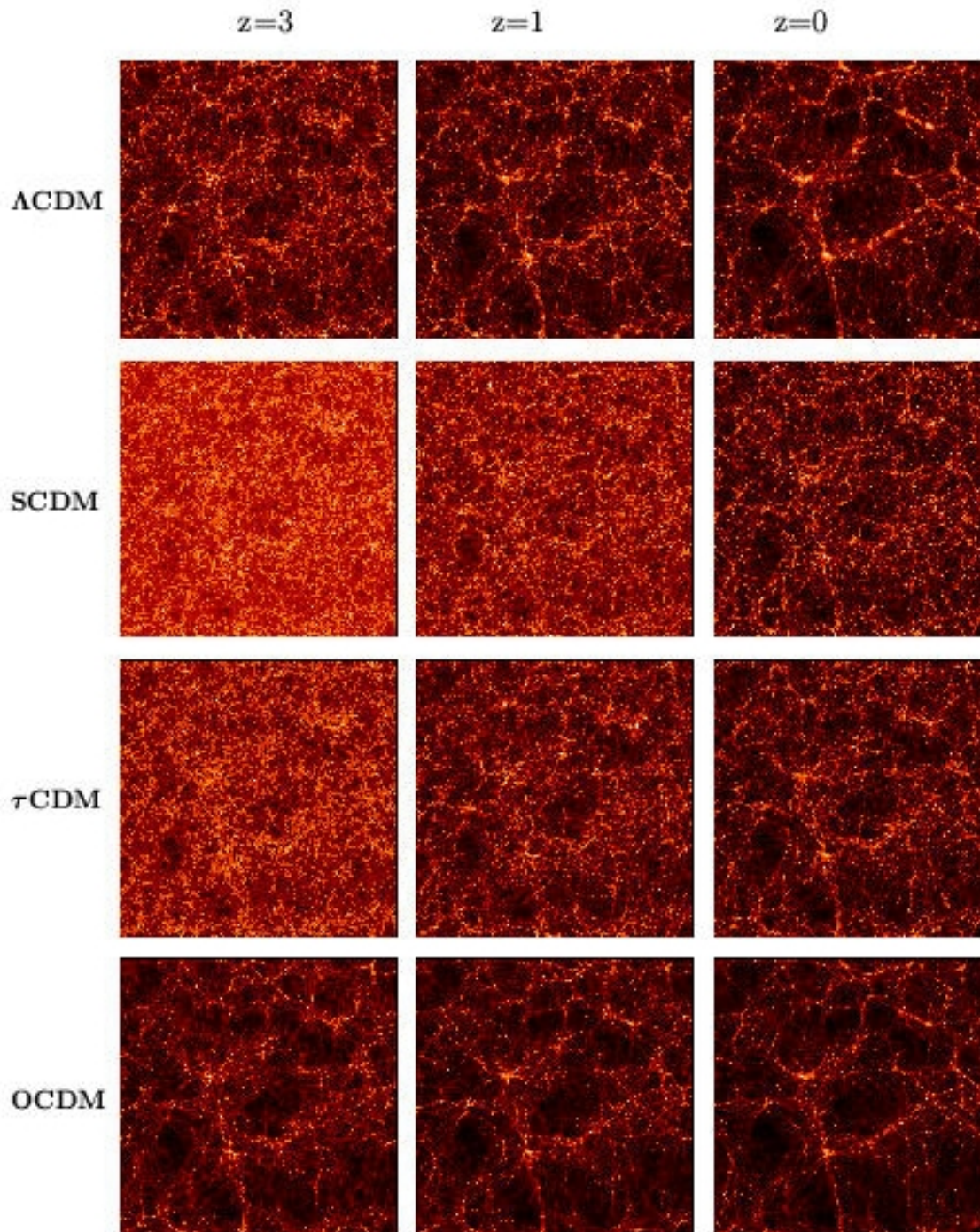


Le paradigme actuel

- On pense connaître le contenu en énergie/matière



- Mécanisme de formation des grandes structures
 - Fluctuations quantique d'un champ scalaire primordial, l'inflaton ;
 - Instabilité gravitationnelle ;
 - Structuration progressive et effondrements ultimes selon les paramètres cosmologiques, la nature de la matière noire et les processus dissipatifs affectant les baryons.



Le paradigme
actuel:
instabilité et
croissance
gravitationnelle

Problèmes ouverts

- Sous quelle forme se présentent les baryons?

- Gaz intergalactique : froid + chaud ?
- Gaz chaud galactique ? + gaz intra-amas (sûr!... ROSAT, XMM, Chandra)
- Vestige d'une première génération d'étoiles ?

- Nature et propriétés de la matière noire

- Recherches directes
- Recherches indirectes (produits de désintégration)
- Le CDM ??? : monolithique vs. hiérarchique (EROs), propriétés des halos

- Nature et propriétés de l'énergie noire

- Mesure de l'équation d'état du vide cosmologique
- Modification de la gravité?

- De la sortie de « l'âge sombre » aux galaxies actuelles

- Formation des premières étoiles; des premiers halos aux galaxies,
- Origine de la re-ionisation
- Histoire des galaxies: LBG et EROs; fusion, morphogenèse, SFR, chimie

- Preuves de l'inflation, Propriétés de l'inflaton, identification

- Extensions du modèle standard avec couplage avec la matière normale

- Propriétés géométriques globales de l'Univers (topologie)

Le contenu de l'Univers

- Photons
- Baryons, électrons
- Neutrinos
- Matière noire non-baryonique (?)
- Champ d'ondes gravitationnelles
- Energie "noire" (?)

Propriétés de l'univers observable

- Propriétés statistiques des galaxies
- Preuve de l'expansion
- Structuration des galaxies
- Gaz intergalactique
- Quasars
- Fonds de rayonnement
- Pourquoi le ciel est noir ?
- Age de l'Univers

Propriétés des galaxies

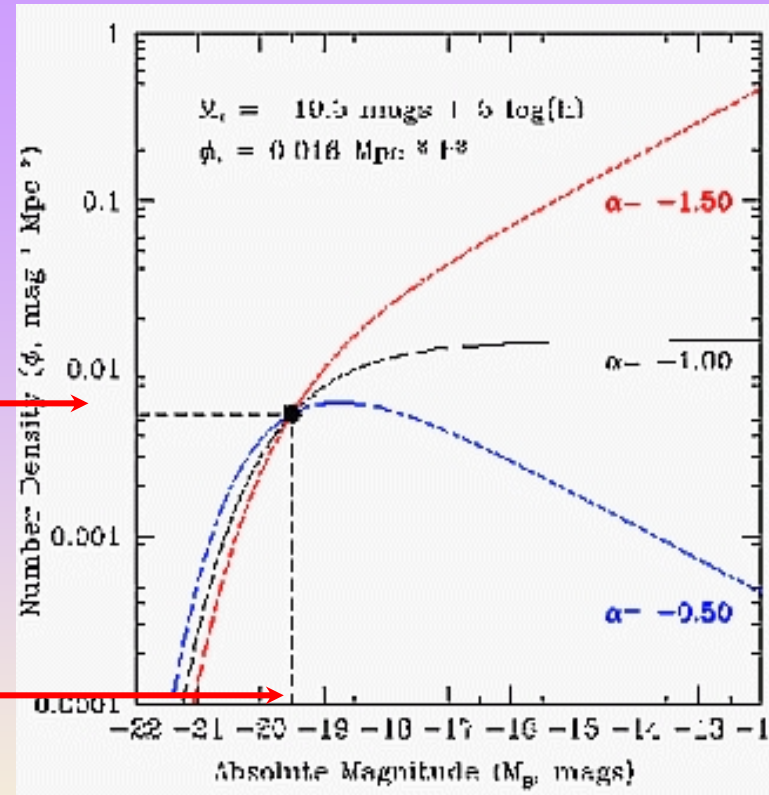
- Comment les galaxies sont distribuées?
- Voit on toutes les galaxies?
 - Y a-t-il des galaxies naines ultra-faibles, combien?
 - Y a-t-il des galaxies à tres faible brillance de surface, combien?
- Quelle est la densité de lumière d'origine galactique dans l'univers?
- Quelles informations donnent –elles sur la distribution vraie de la matière dans l'univers à grande échelle? ²⁷

Fonction de luminosité des galaxies

Fonction empirique de Schechter

$$n(L) = \Phi(L)dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{dL}{L^*}$$

$$\frac{L}{L^*} = 10^{0.4(M^* - M)}$$



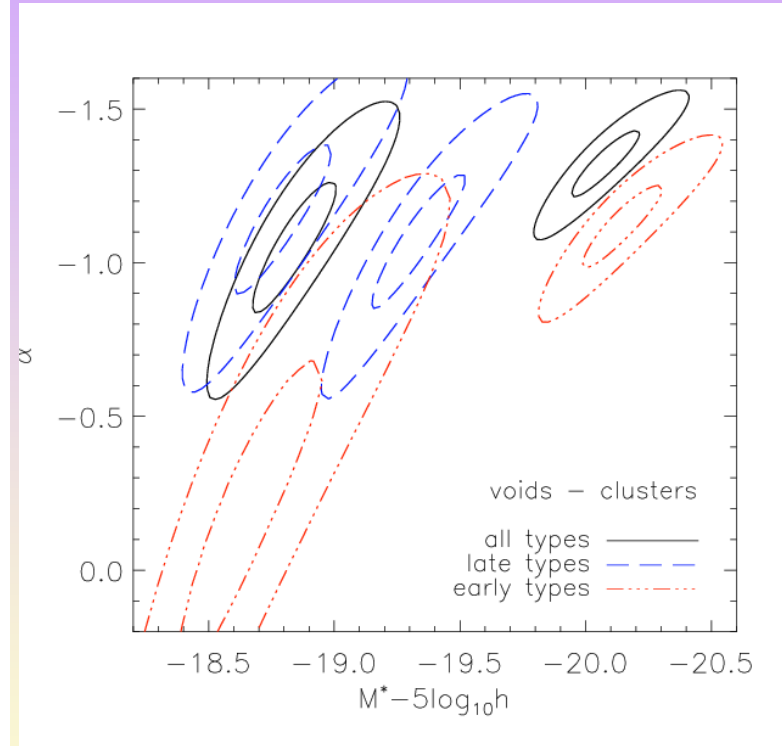
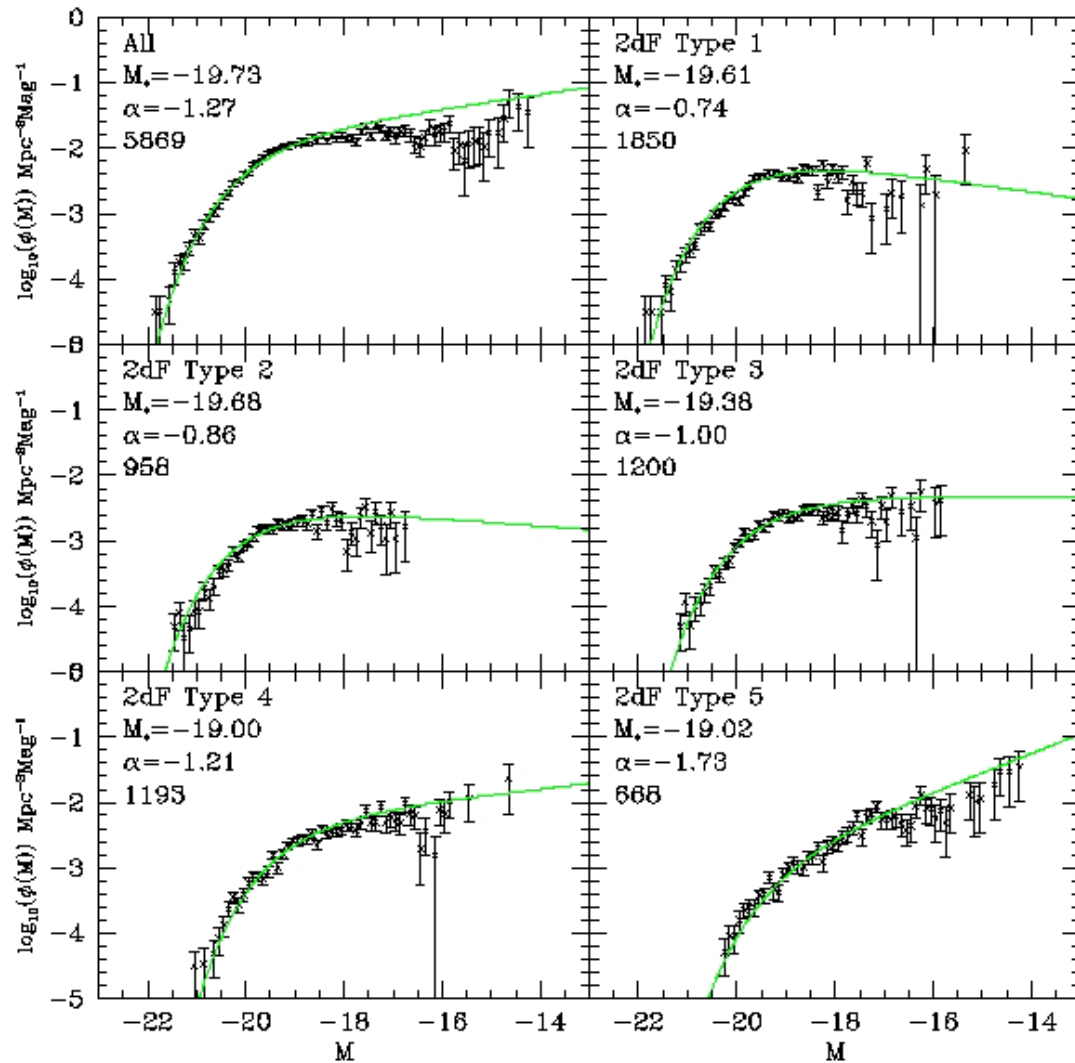
2dF, 221000 galaxies

$$M^* = -19.65 \pm 0.02, \quad \alpha = -1.05 \pm 0.02, \quad \Phi^* = 0.0213 \pm 0.0002 h^3 \text{ Mpc}^{-3}$$

SDSS, 145000 galaxies

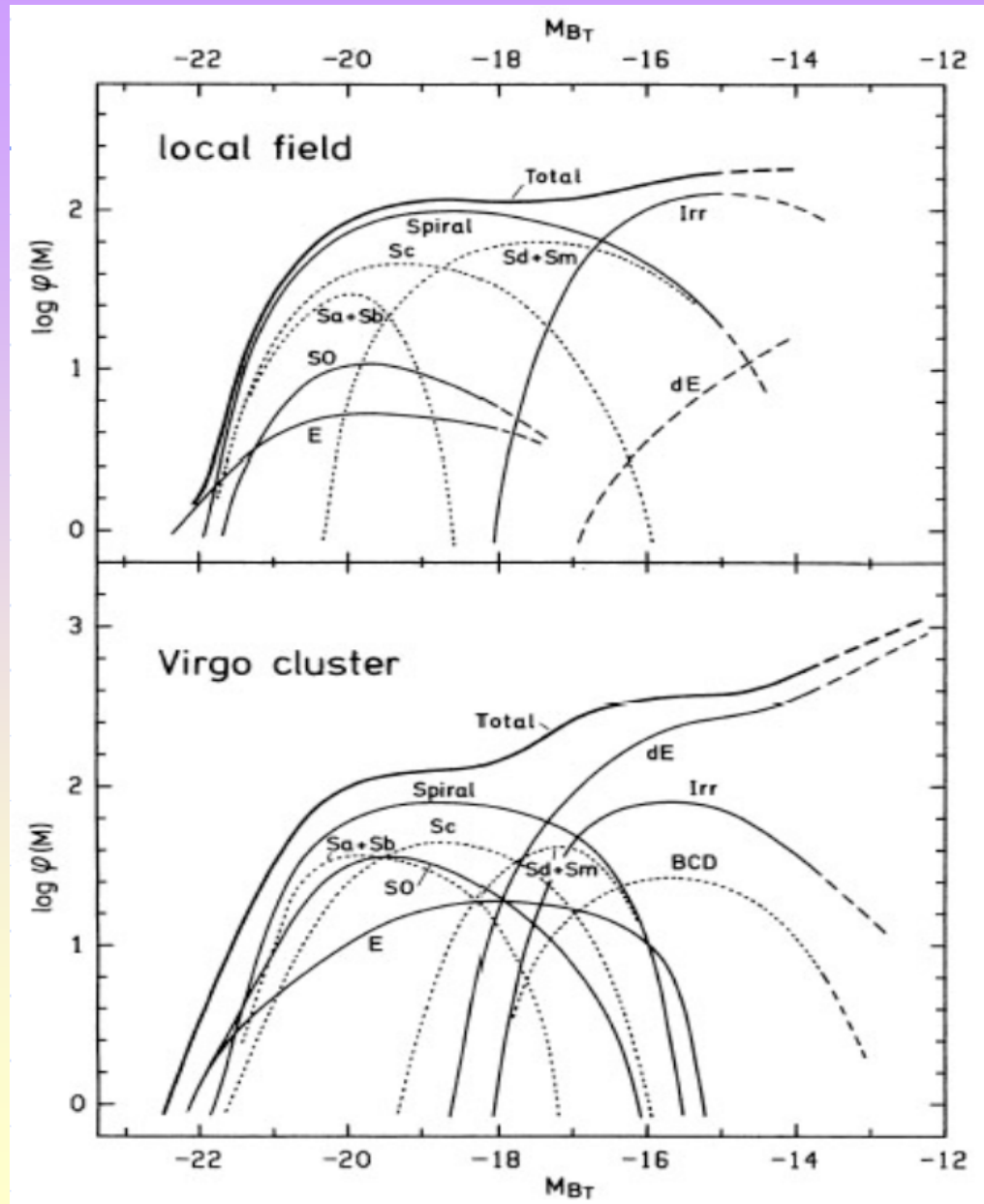
$$M^* = -20.44 \pm 0.01, \quad \alpha = -1.05 \pm 0.01, \quad \Phi^* = 0.0149 \pm 0.0004 h^3 \text{ Mpc}^{-3}$$

Fonction de luminosité des galaxies



Fonction de luminosité des galaxies

Distribution par
type suivant
l'environnement



Densité numérique des galaxies

$$\begin{aligned} N(L > L_{min}) &= \int_{L_{min}}^{\infty} \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{dL}{L^*} \\ &= \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^\alpha e^{-y} dy \\ &= \Phi^* \Gamma\left(1 + \alpha; \frac{L}{L^*}\right), \end{aligned}$$

$$n_{gal} = \Phi^* \Gamma(1 + \alpha)$$

Contribution des galaxies à la densité de matière de l'univers:

$$\rho_{gal} \approx \Phi^* \Gamma(1 + \alpha) h^3 \text{Mpc}^{-3} \times \langle M_g \rangle \approx 10^{-31} h^3 \text{gcm}^{-3}$$

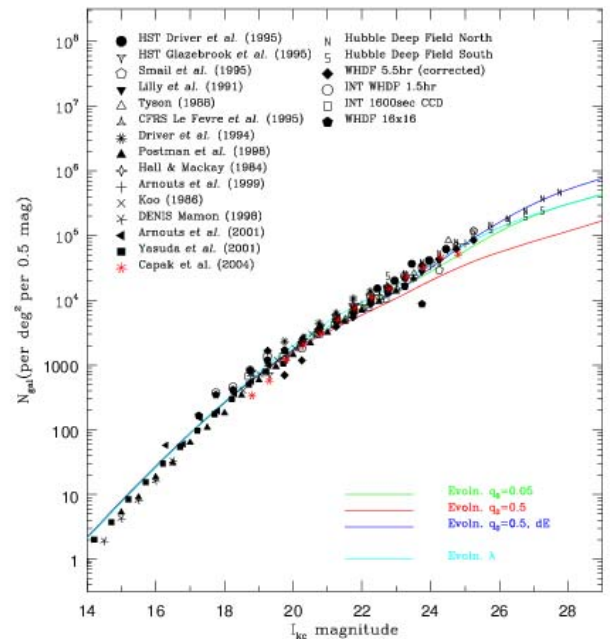
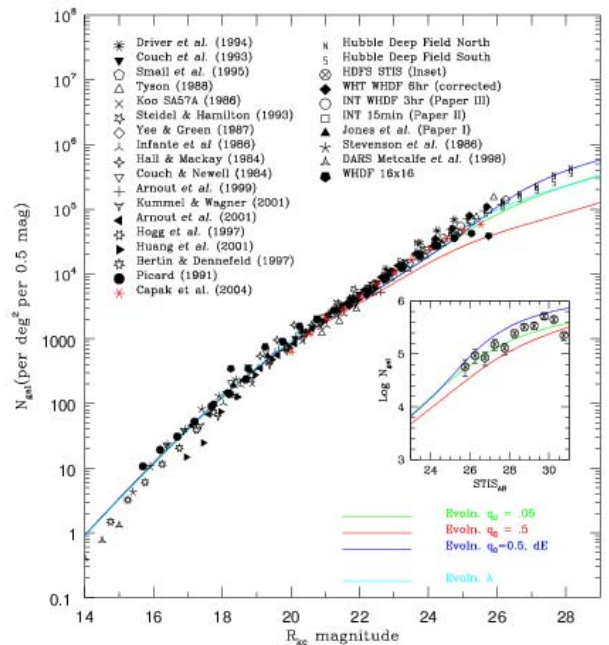
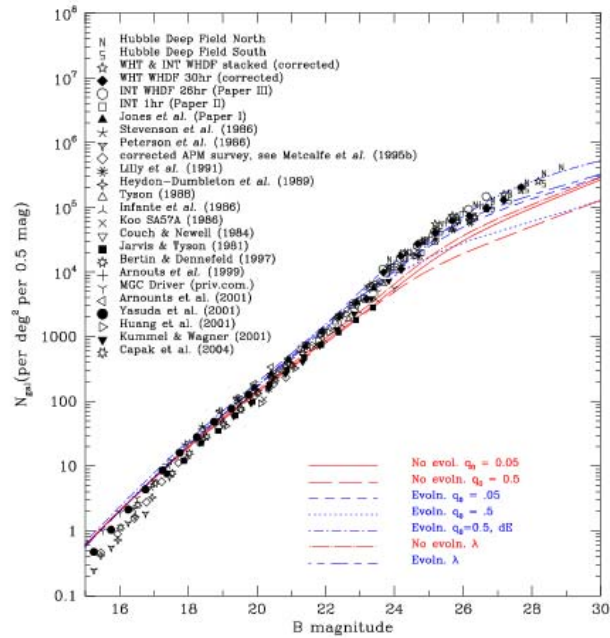
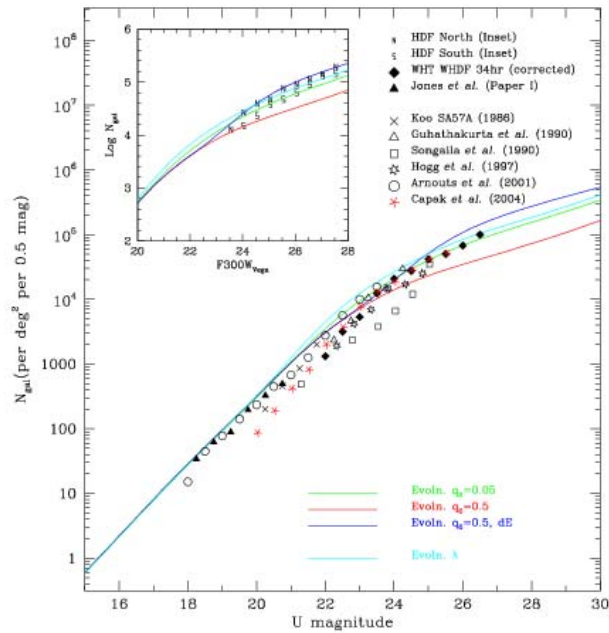
Densité de luminosité des galaxies

$$\begin{aligned}\rho_L(L > L_{min}) &= \int_0^\infty n(L) L dL \\ &= L^* \Phi^* \int_{L_{min}}^\infty \frac{L}{L^*} \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{dL}{L^*} \\ &= L^* \Phi^* \int_{y_{min}}^\infty y^{(2+\alpha)} e^{-y} dy \\ &= L^* \Phi^* \Gamma\left(2 + \alpha; \frac{L}{L^*}\right) .\end{aligned}$$

Contribution des galaxies à la densité de luminosité de l'univers:

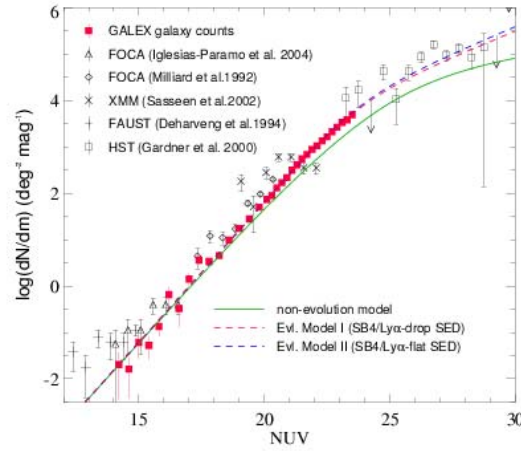
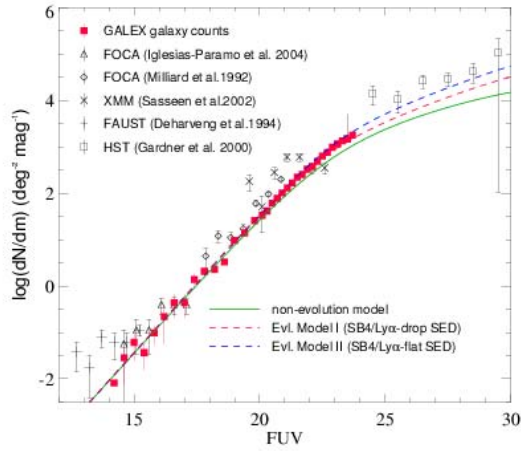
$$\rho_L = L^* \Phi^* \Gamma(2 + \alpha)$$

$$\rho_L = 2.0 \pm 0.5 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

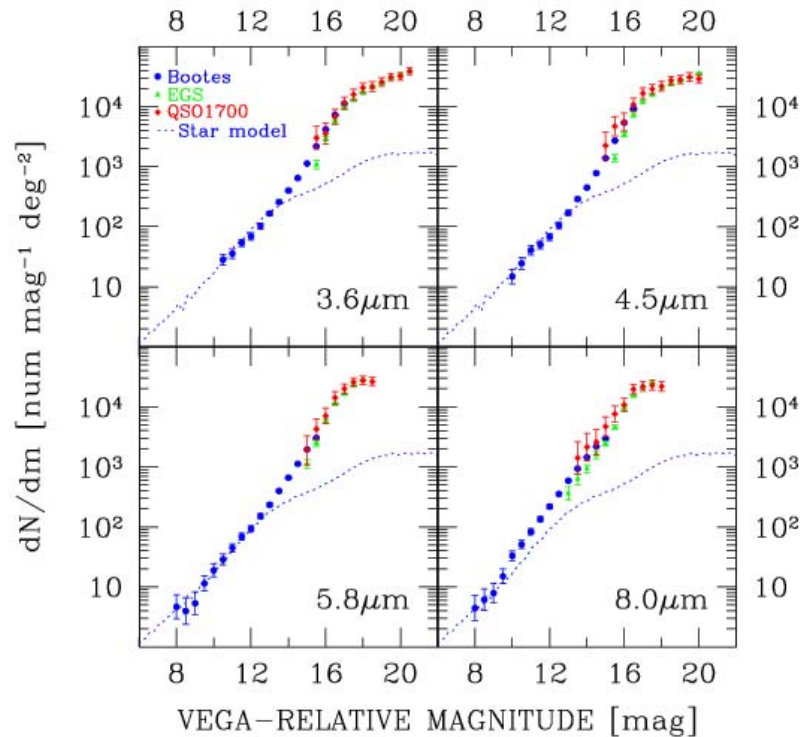


Comptage des galaxies optique et NIR

Galex

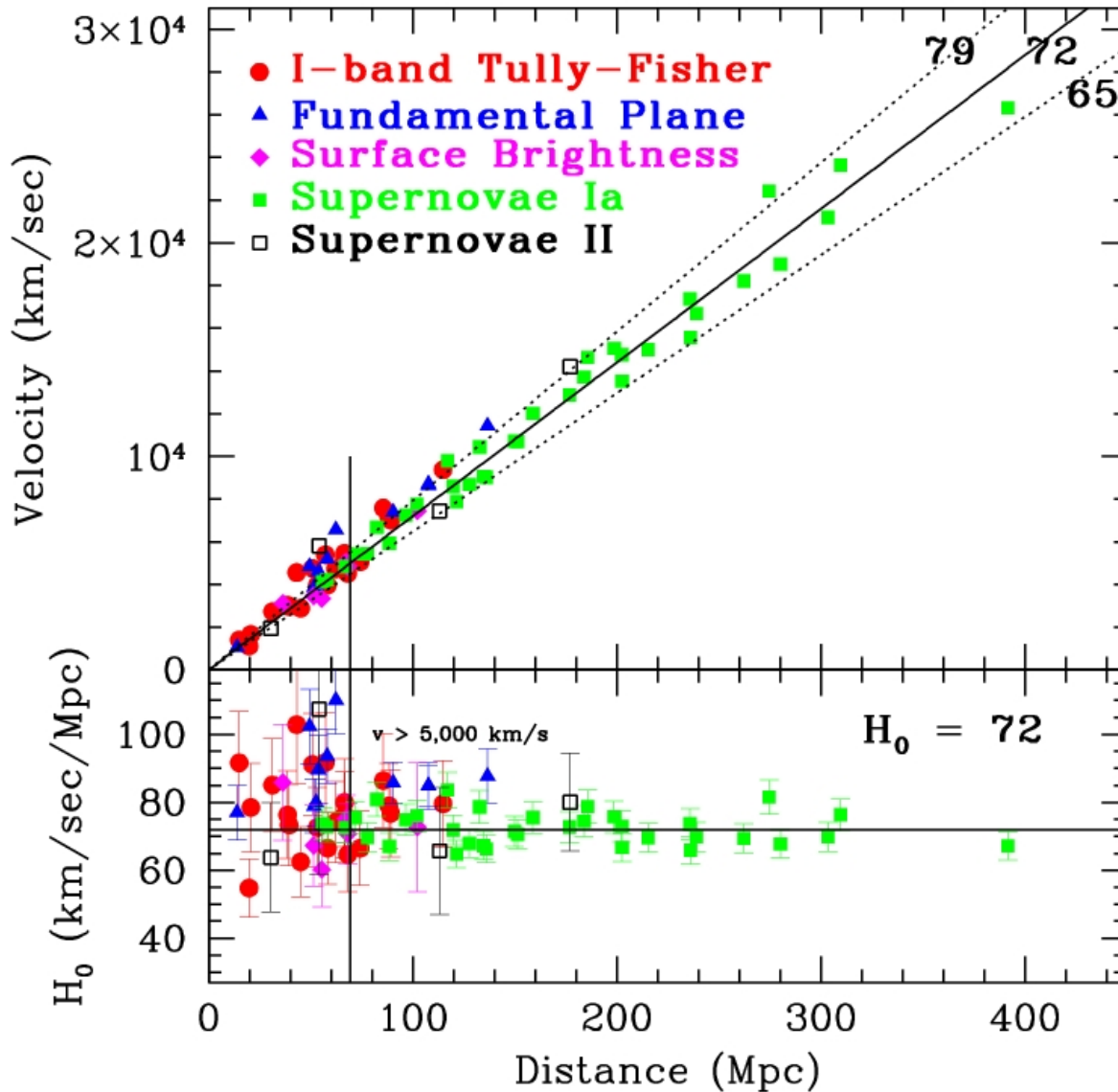


Comptage des galaxies FUV et FIR



Spitzer

Un univers en expansion



$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

Loi de Hubble:
 $v = H_0 \cdot D = c \cdot z$

Un univers en expansion

Relation Magnitude-Redshift:
Diagramme de Hubble

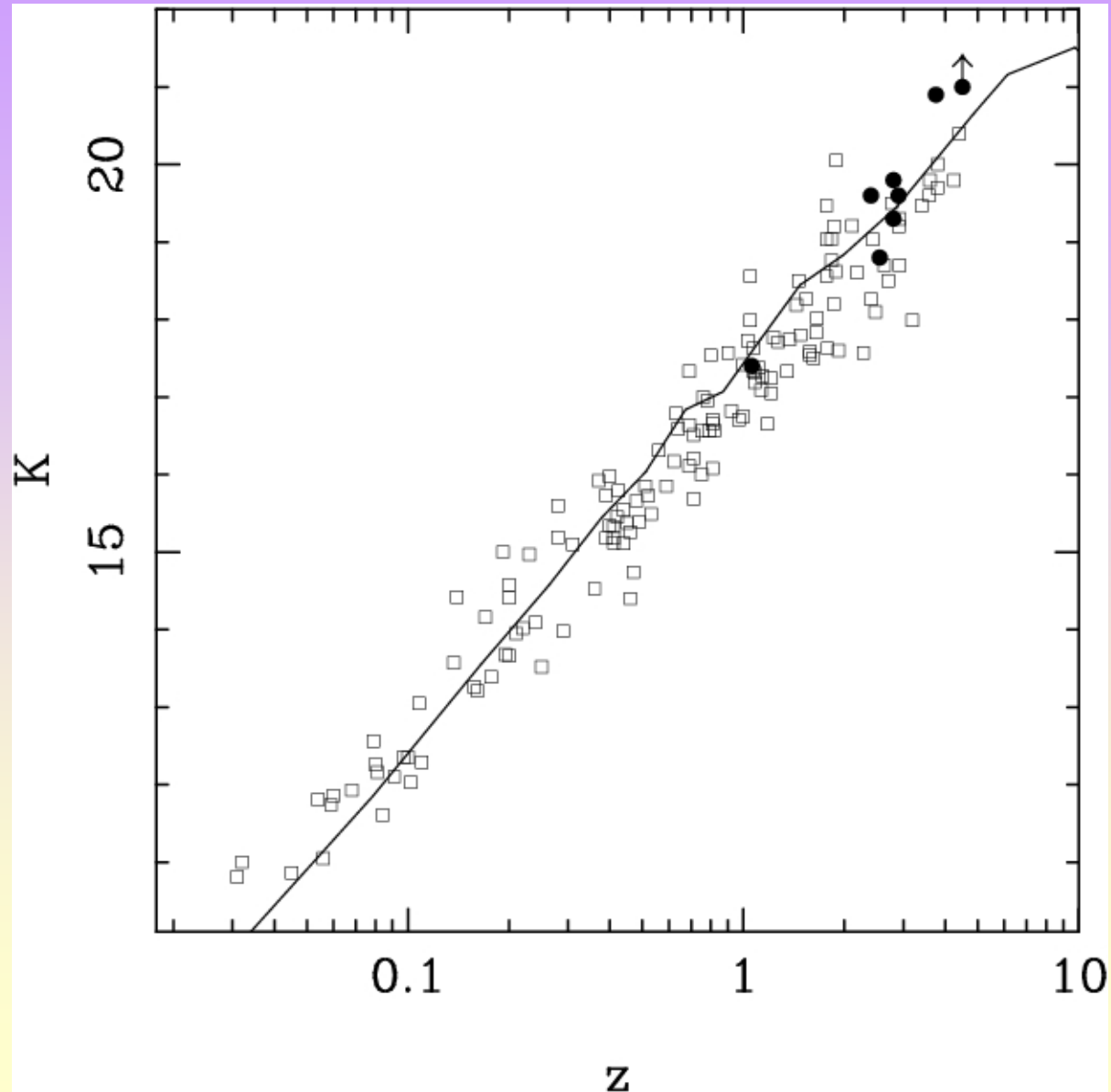
$$m = -2.5 \log(F) + C$$



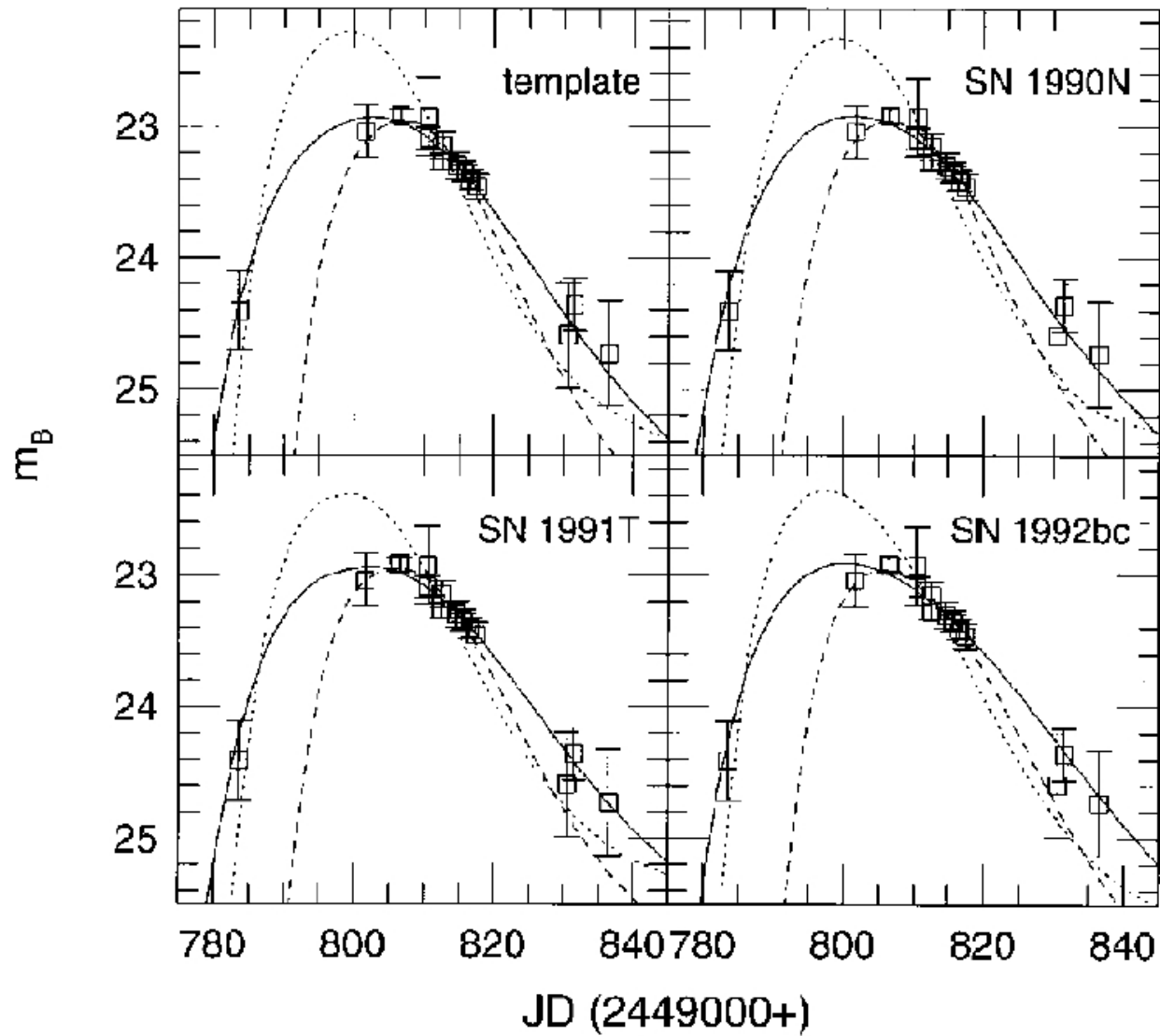
$$F = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L H_0^2}{4\pi c^2 z^2}$$



$$m = 5 \times \log[z] + C'$$

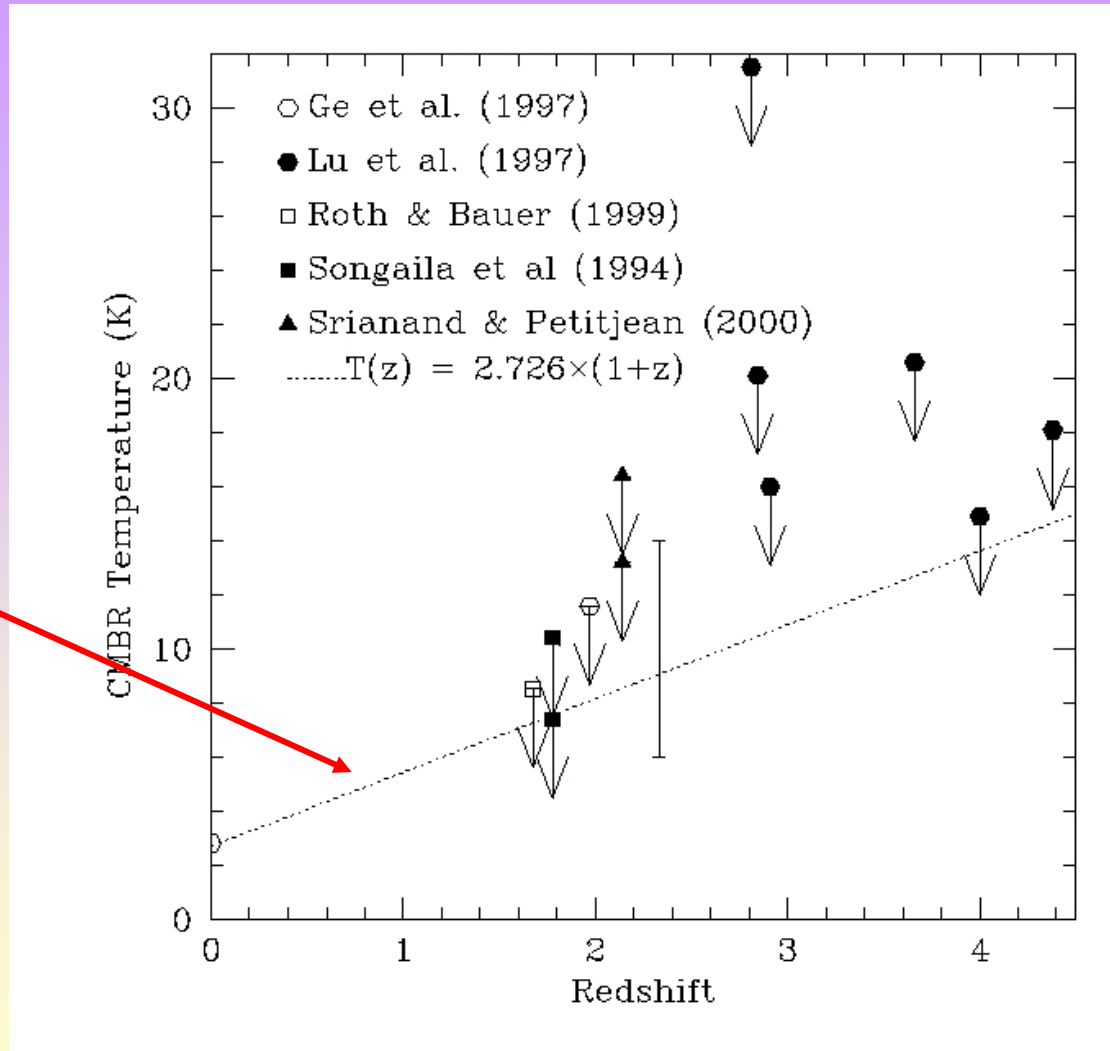


Un univers en expansion



Un univers en expansion

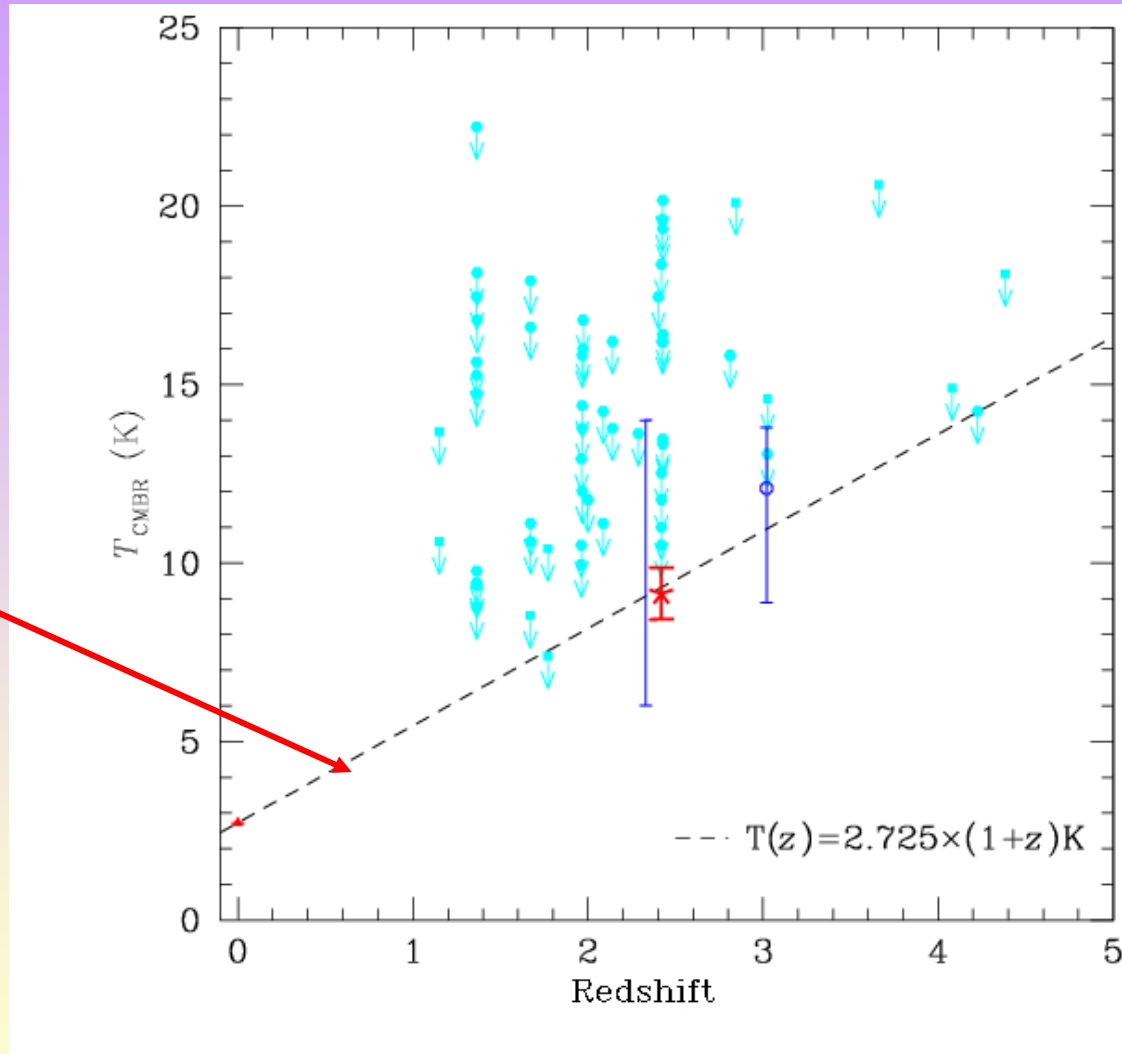
Prédiction si
expansion



Température du CMB en fonction de z (2000)

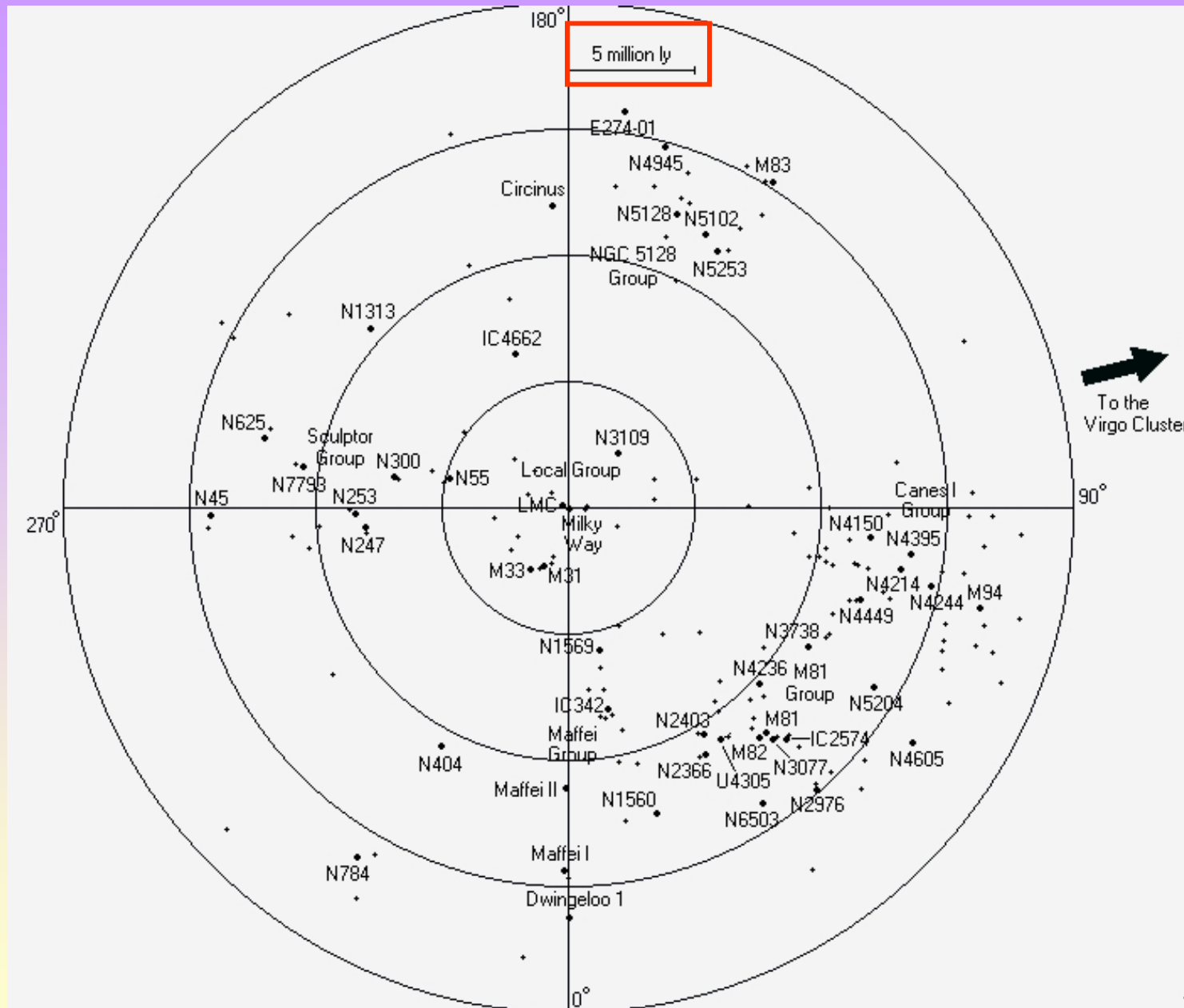
Un univers en expansion

Prédiction si
expansion



Température du CMB en fonction de z (2008)

Distribution et structuration des galaxies

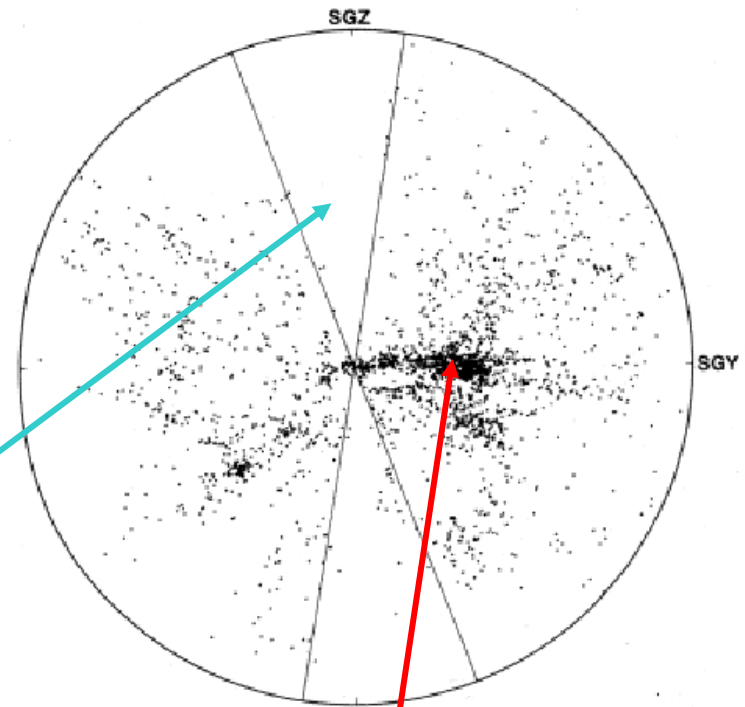
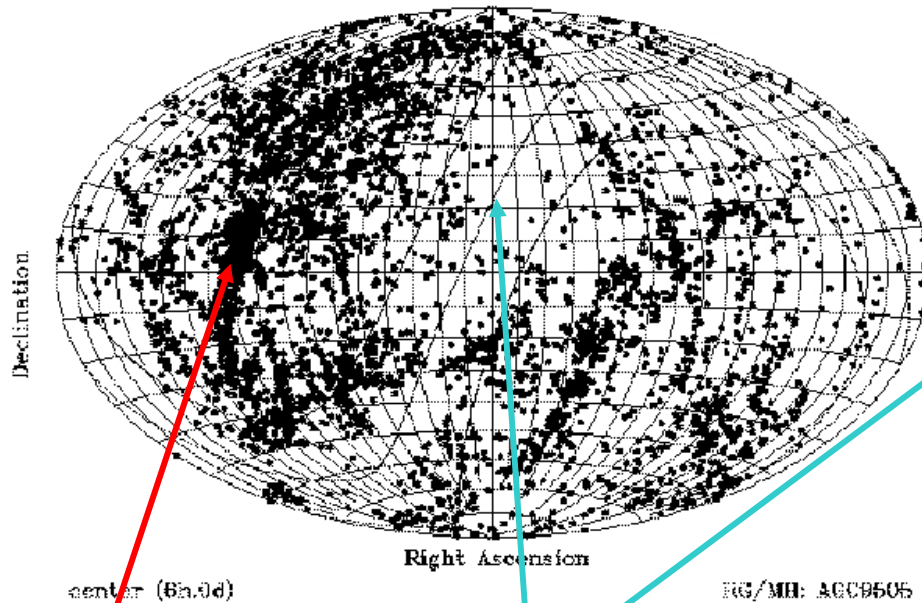


Distribution et structuration des galaxies

Le Superamas Local: environ 50 000 galaxies , $D \sim 50$ Mpc

Projection sur le ciel

V: -500,3000

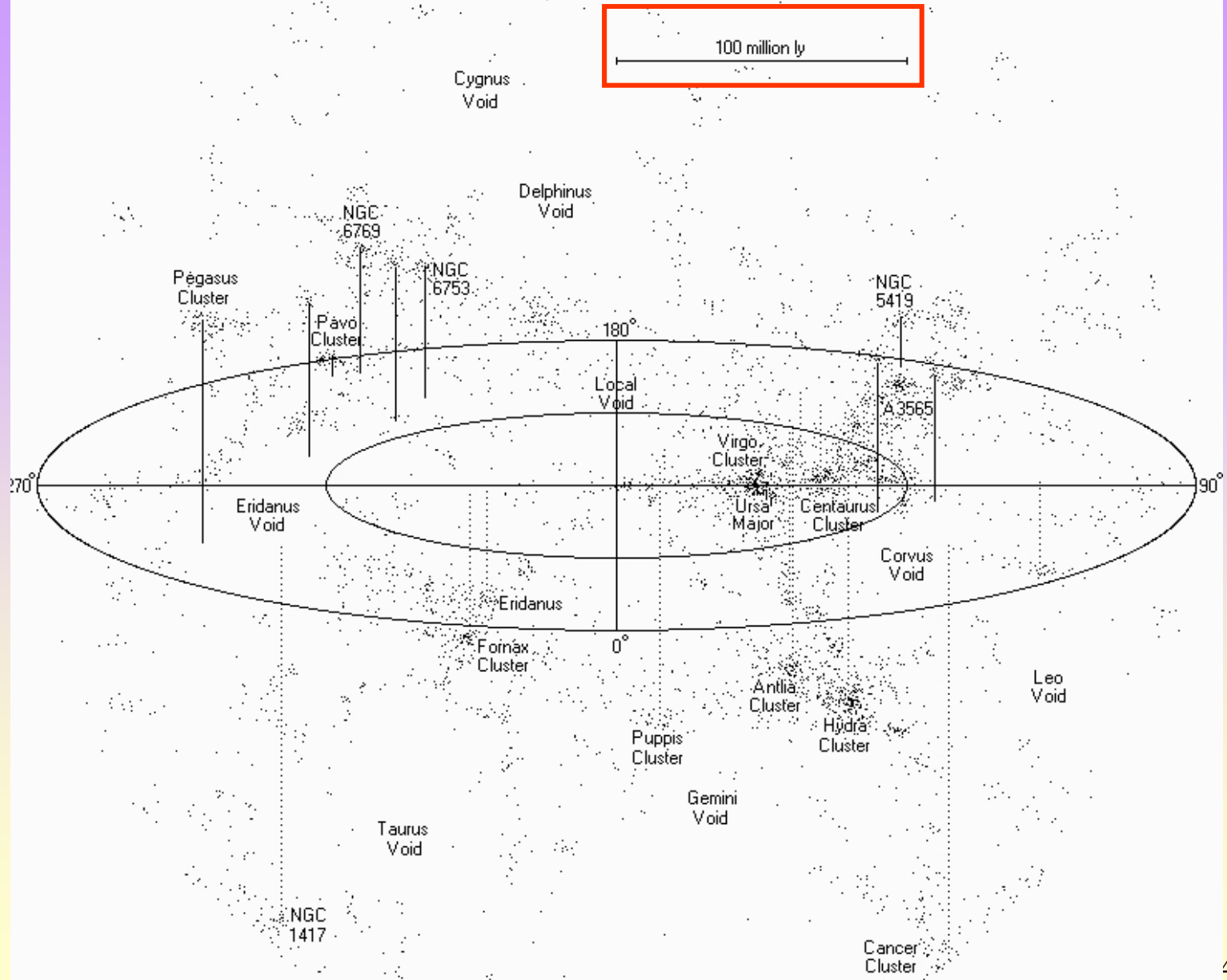


Plan de la Galaxie

Centre du Superamas Local

Plan Supergalactique

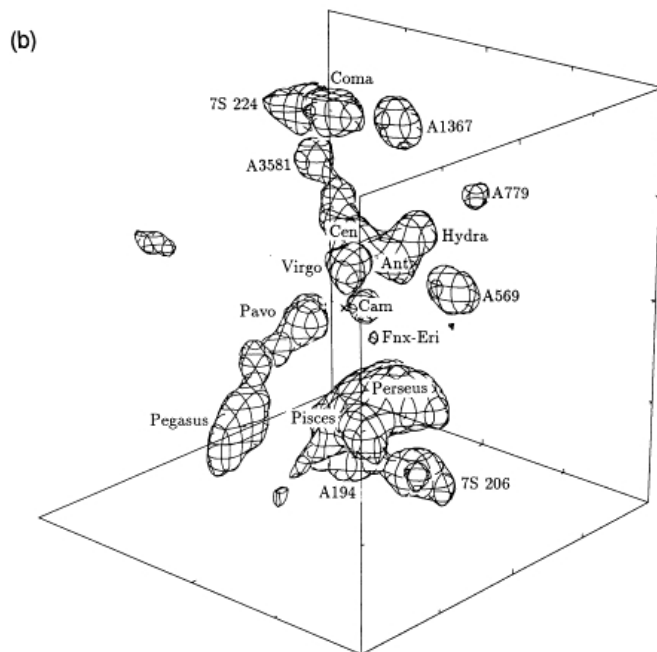
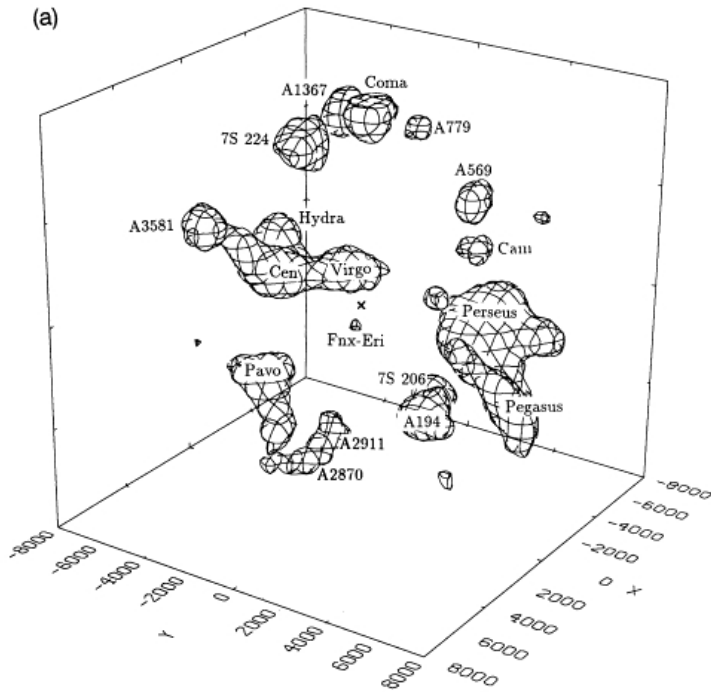
Distribution et structuration des galaxies



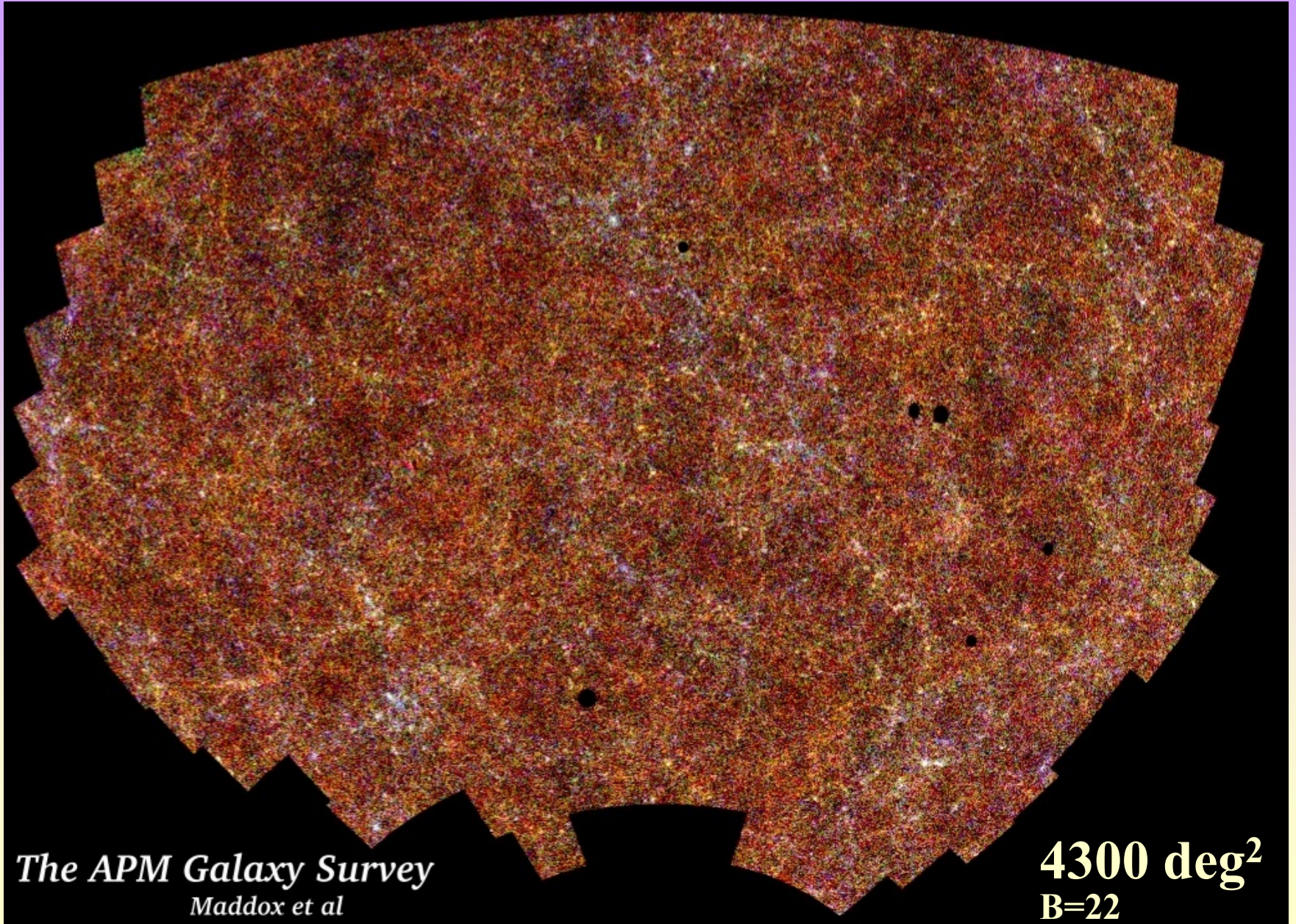
Structure 3D du Superamas Local

Distribution et structuration des galaxies

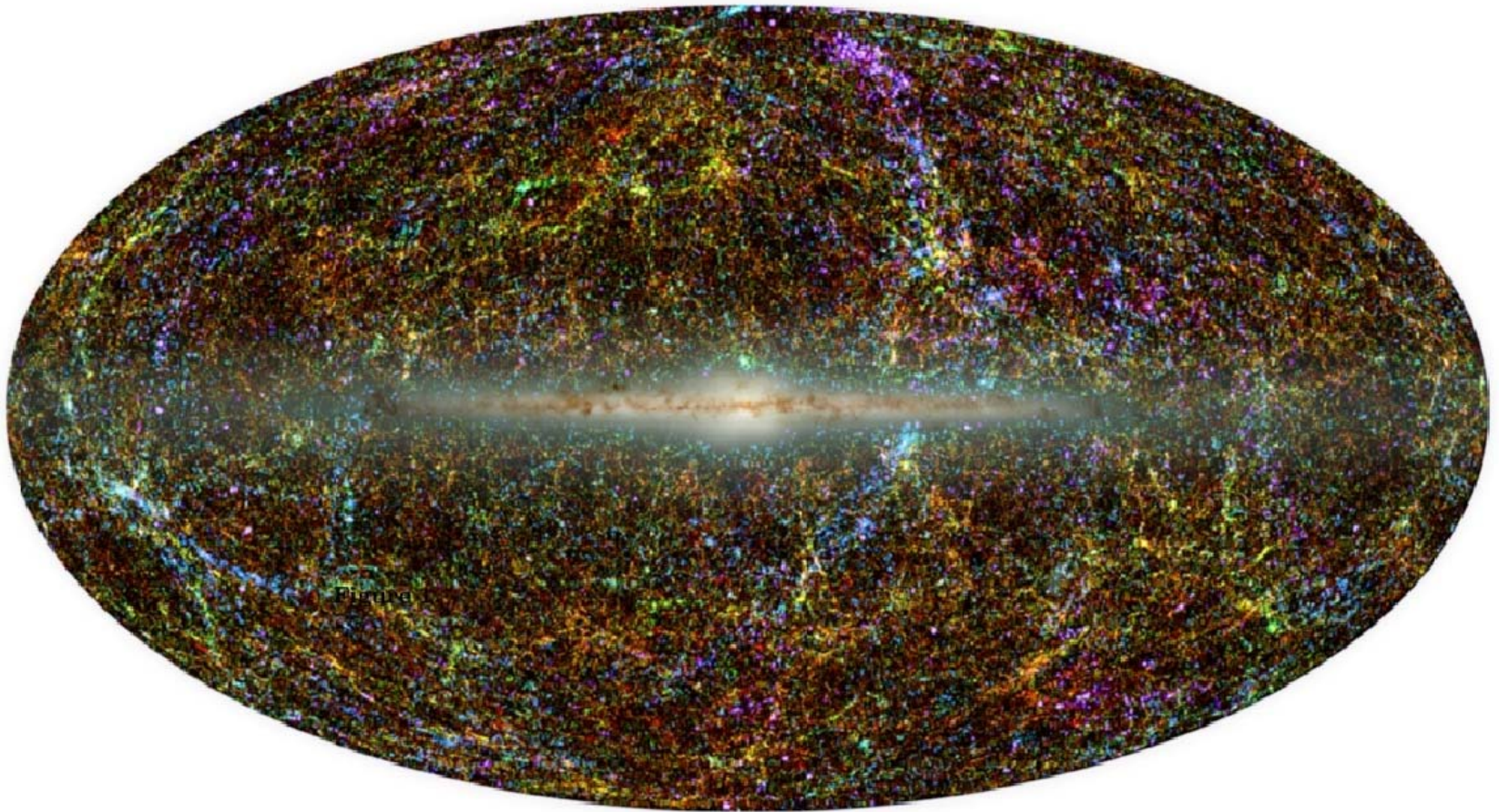
Structure 3D du Superamas Local



Distribution et structuration des galaxies

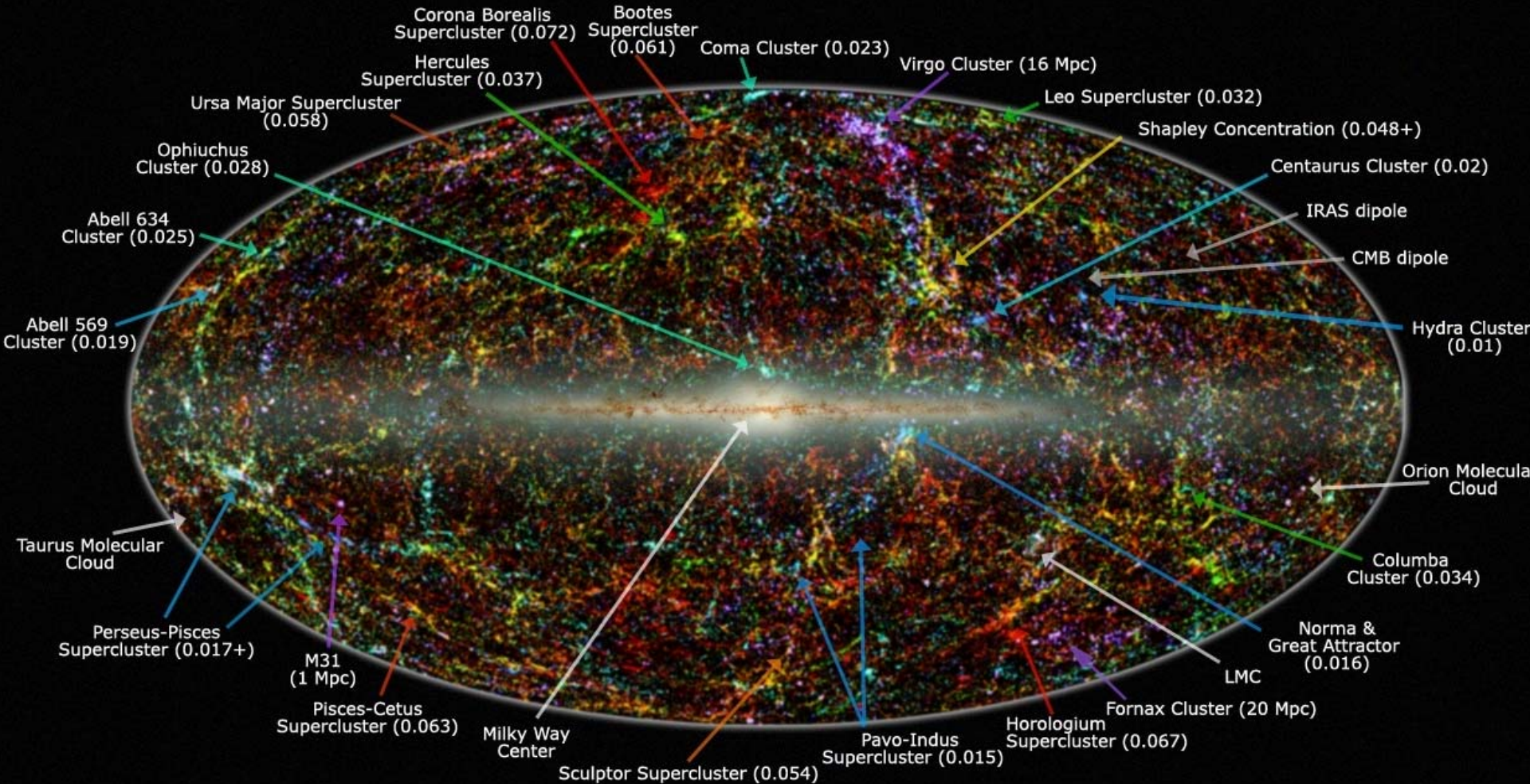


Distribution et structuration des galaxies



Relevé infrarouge proche (J,H,K) 2MASS

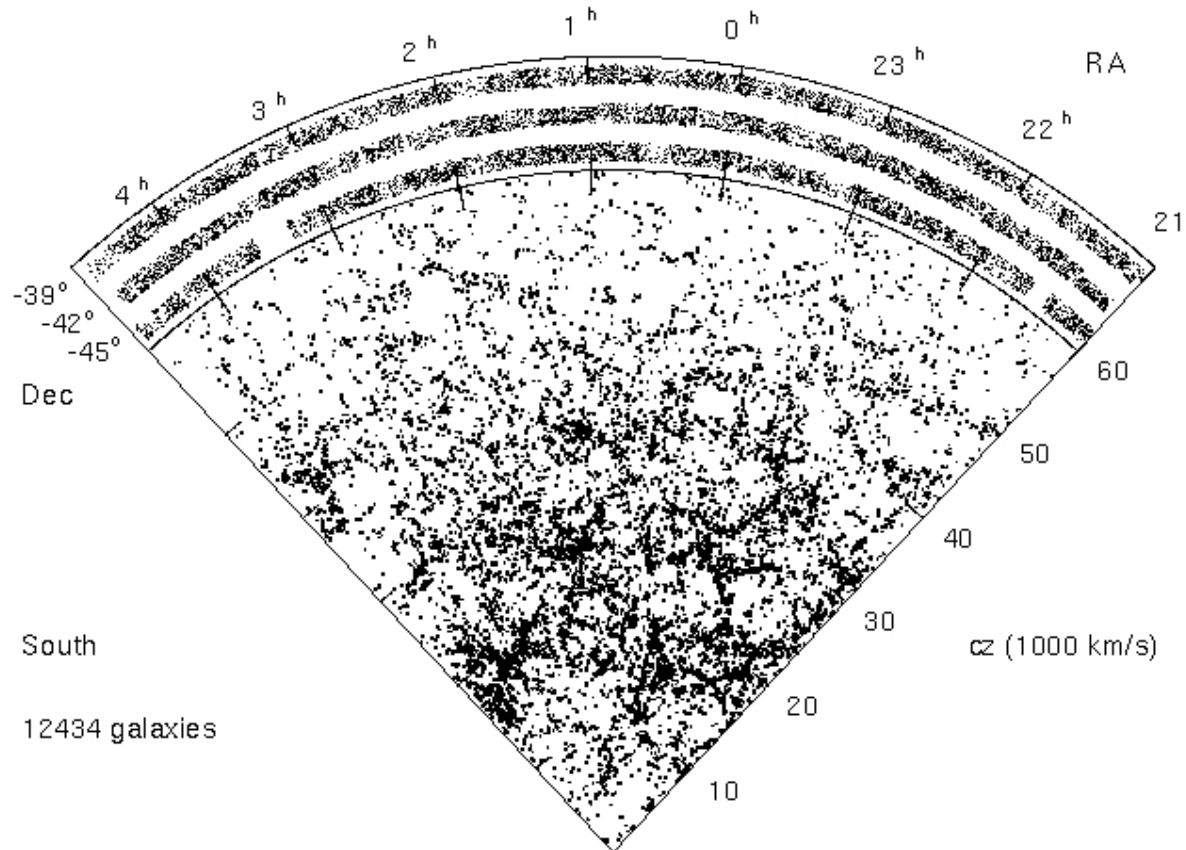
Large Scale Structure in the Local Universe



Legend: image shows 2MASS galaxies color coded by redshift (Jarrett 2004); familiar galaxy clusters/superclusters are labeled (numbers in parenthesis represent redshift).
Graphic created by T. Jarrett (IPAC/Caltech)

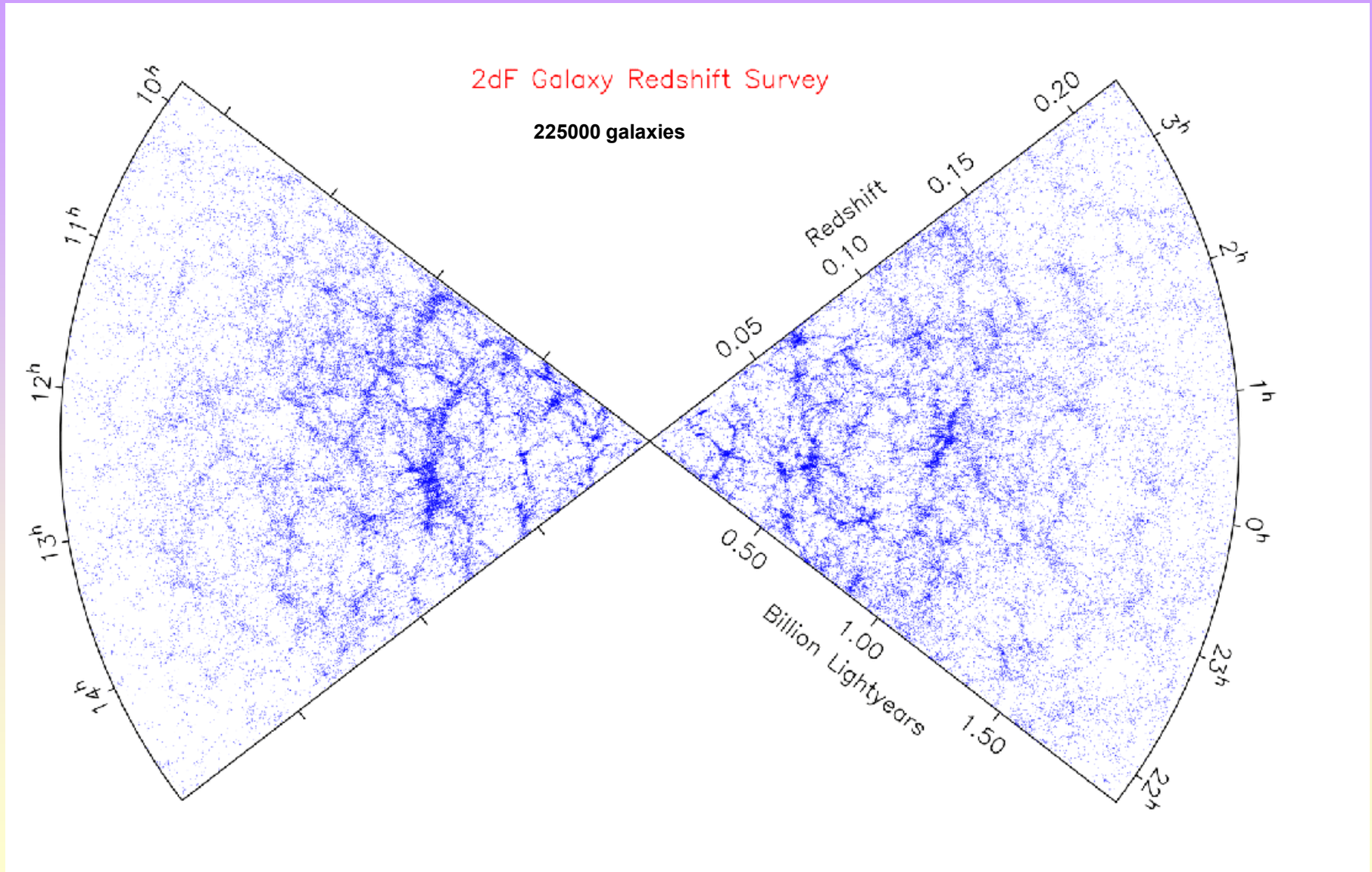
Distribution et structuration des galaxies

Las Campanas Redshift Survey (LCRS)

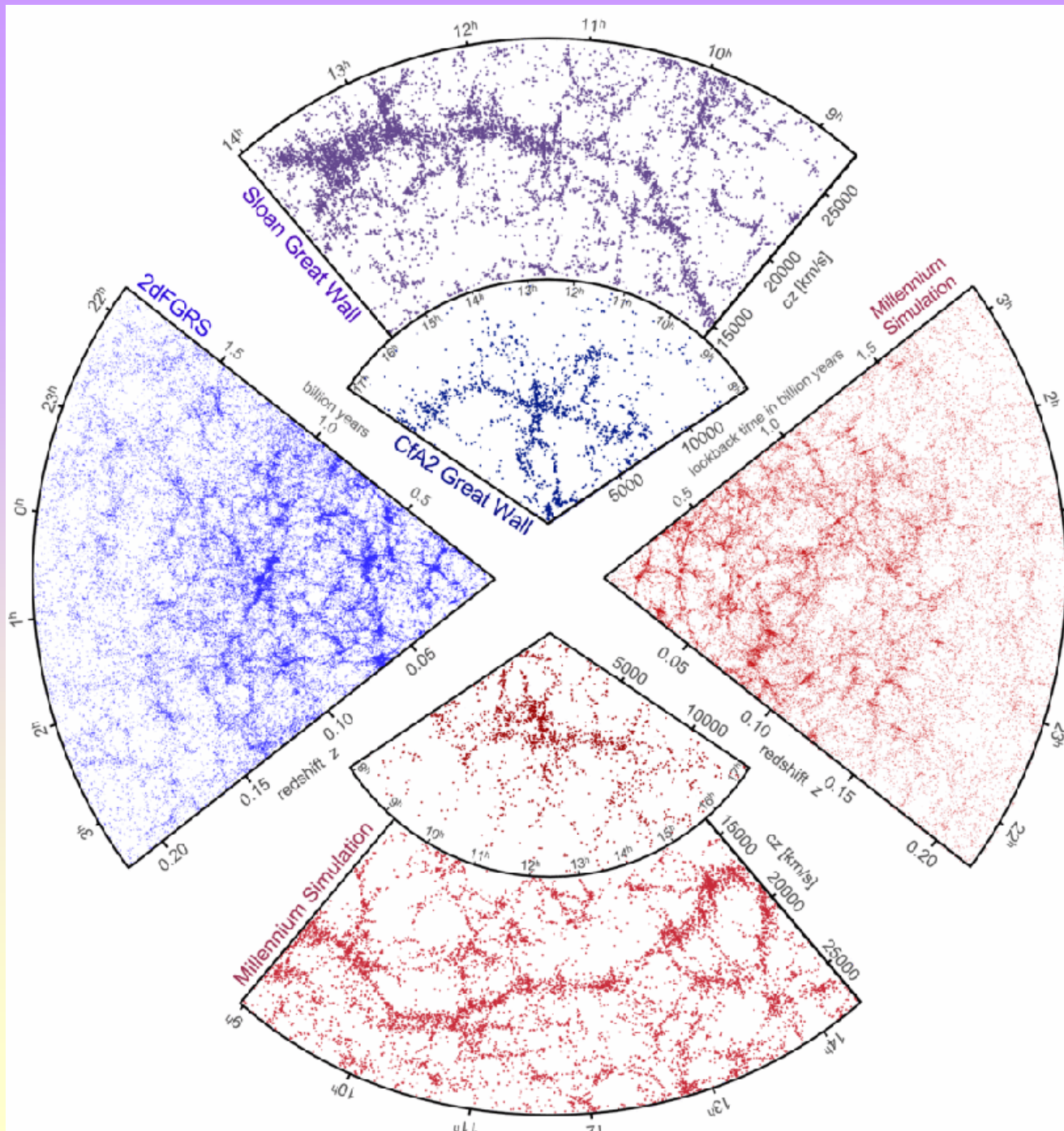


Structure 3D de l'Univers à moyenne distance

Distribution et structuration des galaxies



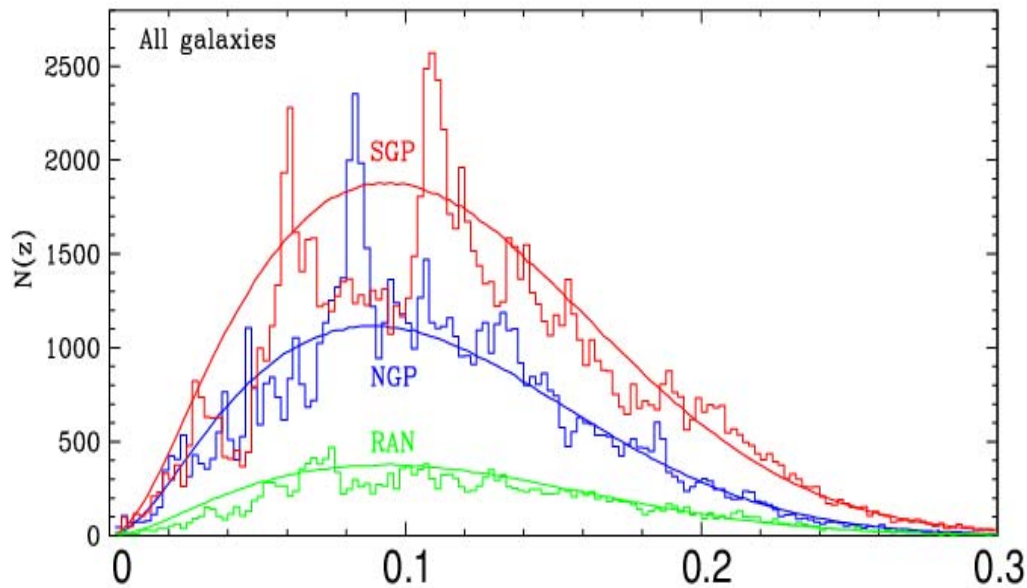
Structure 3D de l'Univers à grande distance



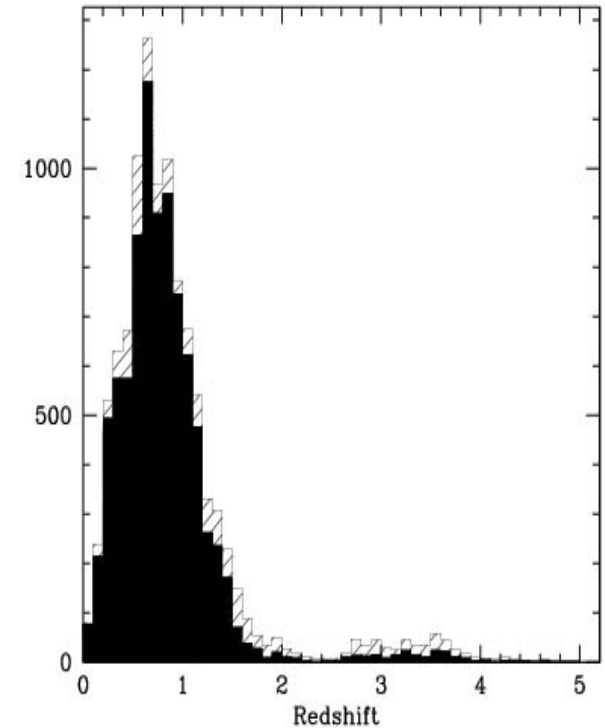
Une structuration conforme aux prédictions d'un univers CDM dont les structures se forment par effondrement gravitationnel

Distribution et structuration des galaxies

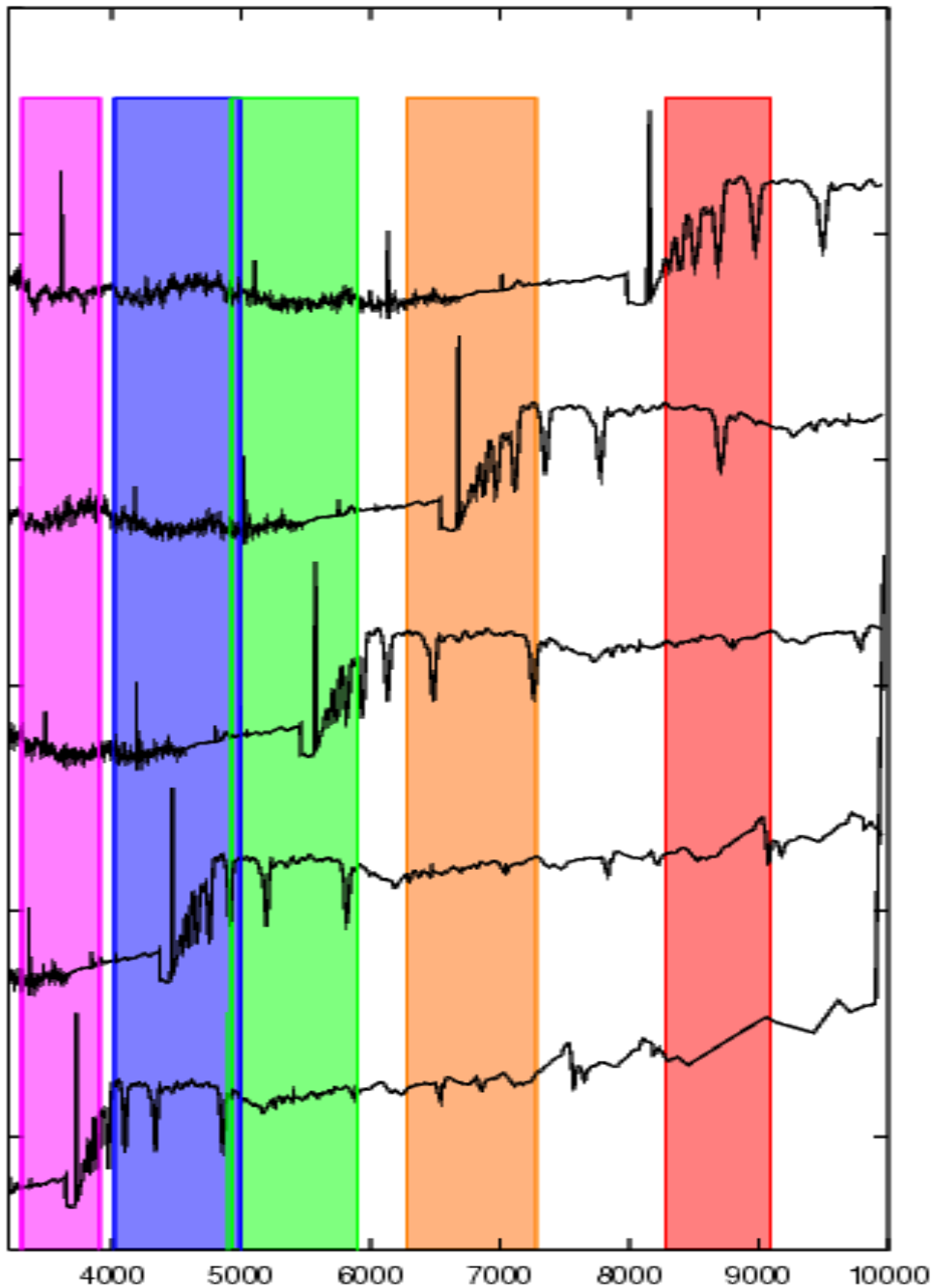
2dF



VVDS



Structure 3D de l'Univers à grande distance

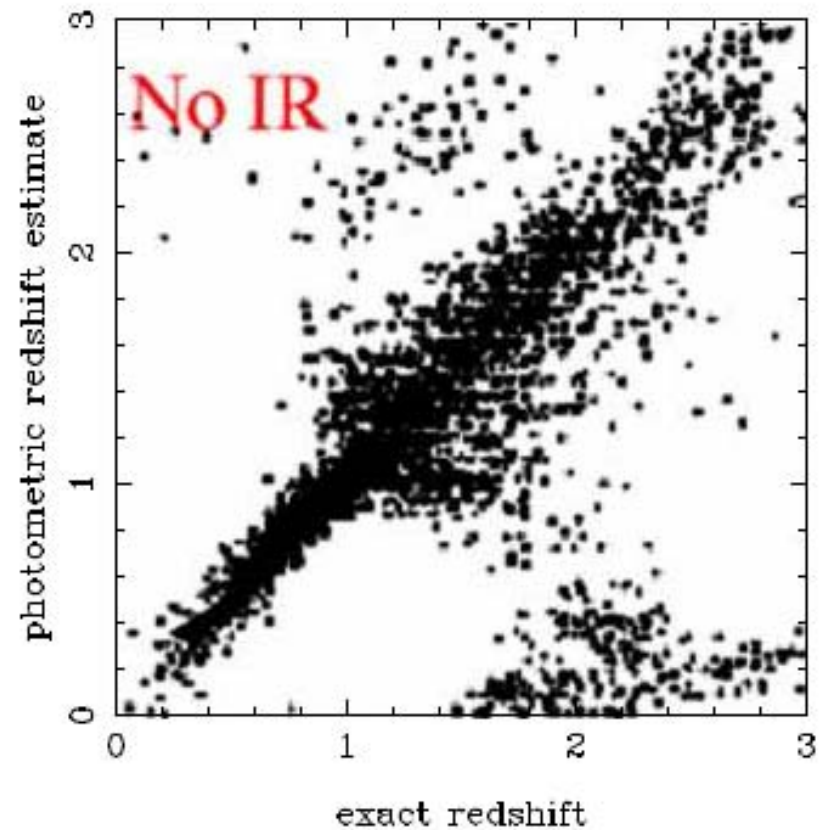
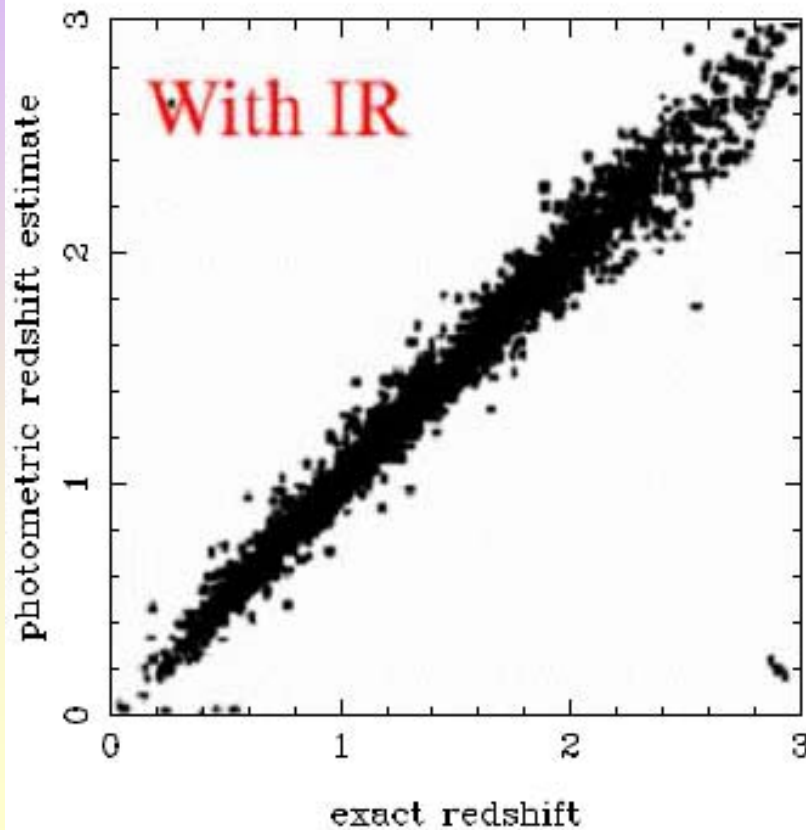


Au-delà des
performances de
la
spectroscopie:

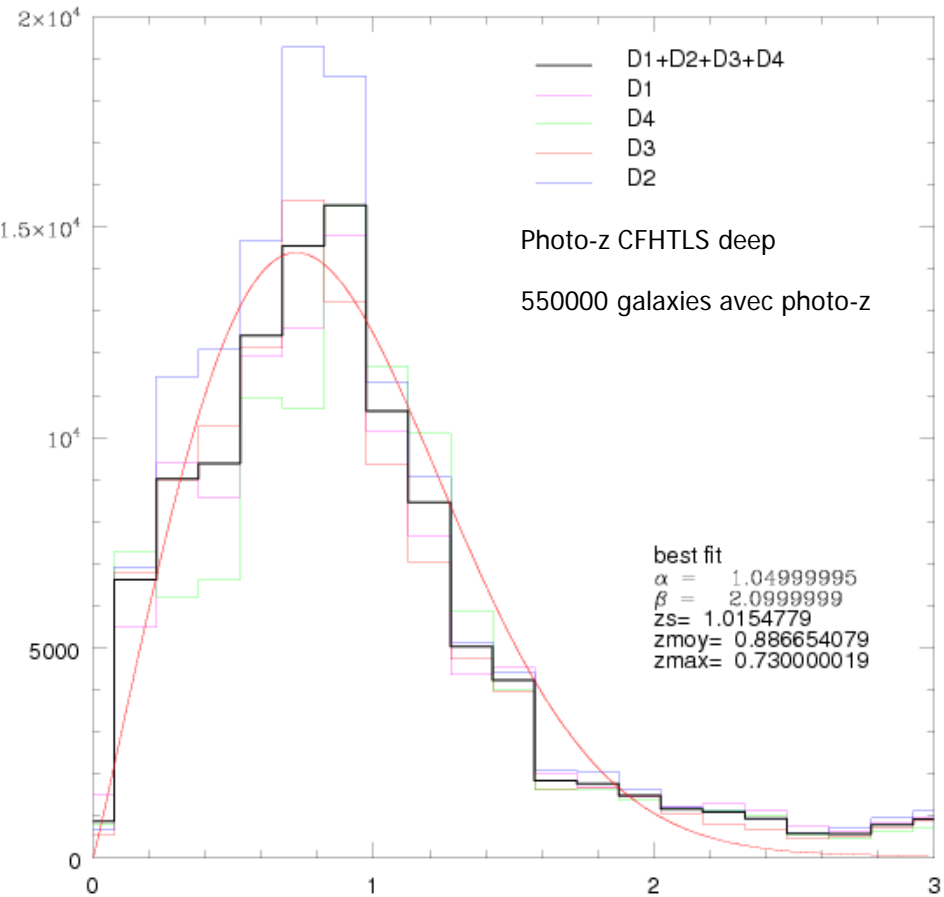
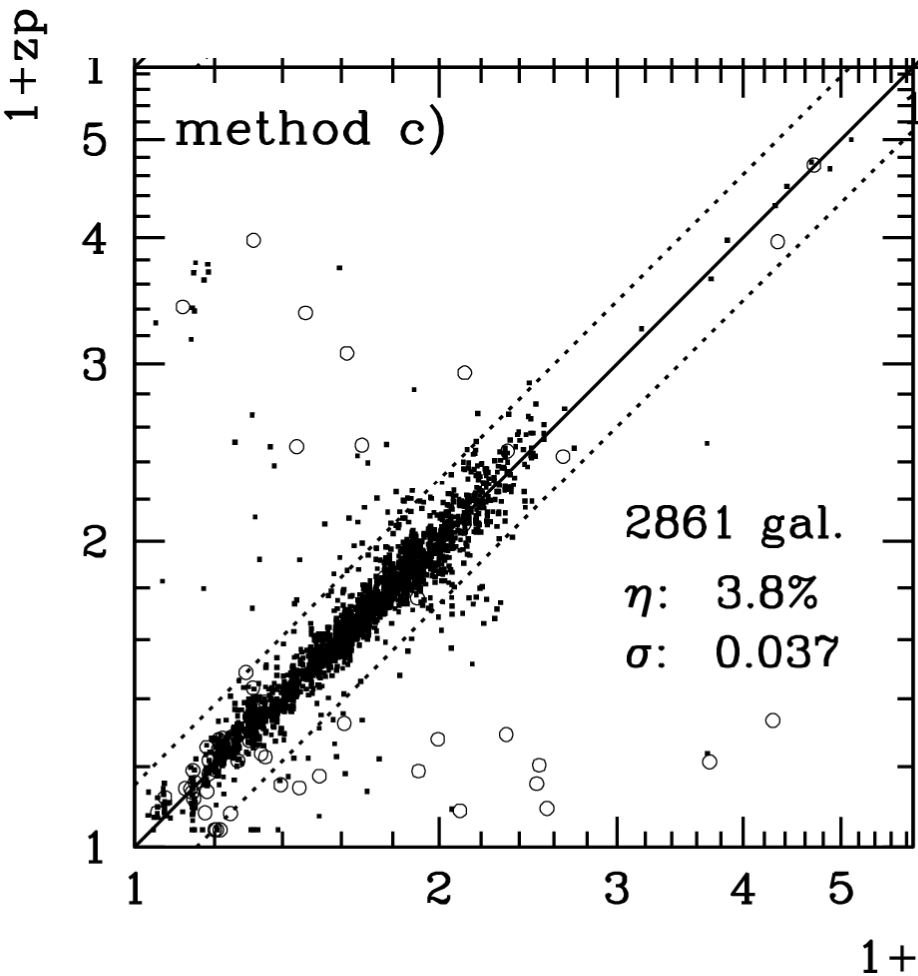
les redshifts
photométriques

Redshifts photométriques

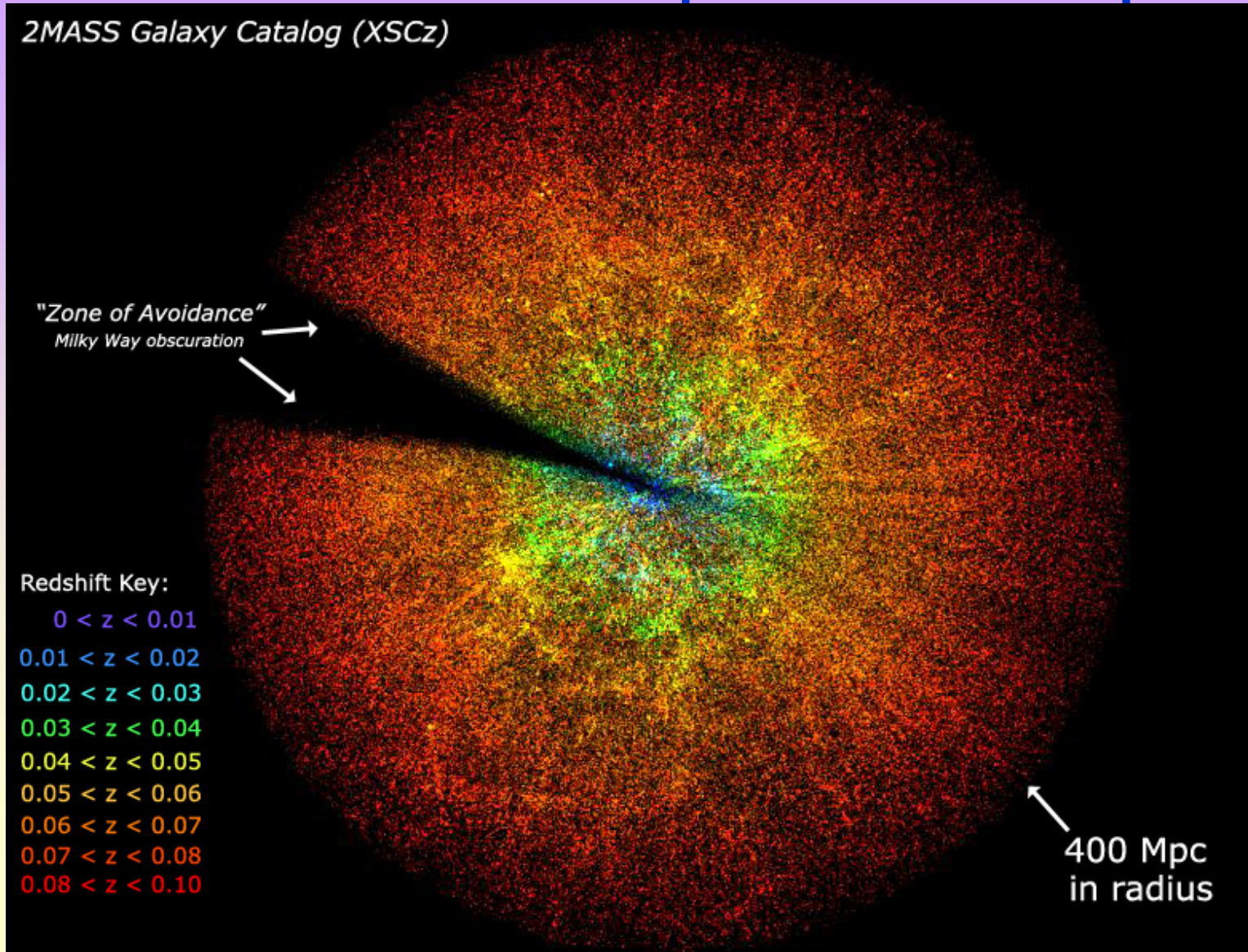
Difficultés techniques: calibrations et dégénérescences



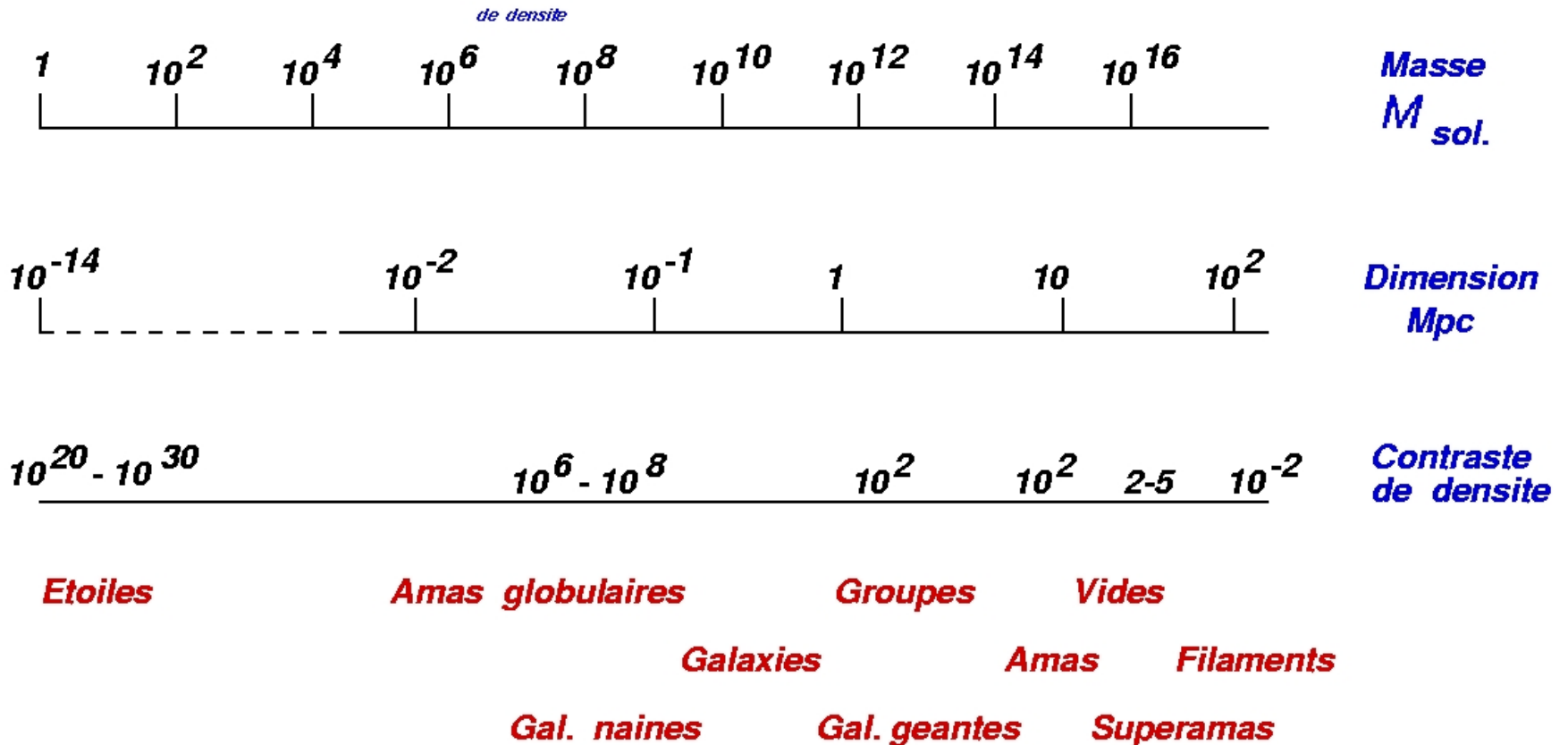
$n(z)$ avec les « photo-z »



La distribution 3D de 2MASS avec les redshifts photométriques



Propriétés générales des structures



Caractérisation de la structuration

- Densité moyenne
- Distance interparticulaire moyenne
- Fonctions de corrélation à 2, 3, N points
- Fonction de probabilité de vides
- Description Gaussienne du champ
- Ecart à la gaussianité du champ de densité (skewness)
- Propriétés fractales
- Longueur de percolation
- Description topologique

Fonction de corrélation à 2 points

Probabilité de trouver simultanément une galaxie dans un élément de volume dV_1 et une autre dans dV_2 , séparée d'une distance r de dV_1 ($n =$ densité moyenne).

Distribution de Poisson:

$$dP = \bar{n}^2 dV_1 dV_2$$

Distribution corrélée:

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2$$

Fonction de corrélation à 2 points

Cas d'un univers homogène:

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Cas d'un univers homogène et isotrope:

$$\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \xi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \xi(r).$$

Relation entre les fonctions de corrélation à 2 points des galaxies et de la matière

$$\xi(r) = \frac{\langle (\rho(\mathbf{u}) - \bar{\rho}) (\rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) - \bar{\rho}) \rangle}{\bar{\rho}^2}$$

Si toutes les galaxies ont la même masse $\langle M_g \rangle$:

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2 = \frac{\langle \rho(\mathbf{x}_1) dV_1 \rho(\mathbf{x}_2) dV_2 \rangle}{\langle M_g \rangle^2}$$

- • La fonction de corrélation des galaxies doit donc être liée au spectre de puissance du champ de matière.
- La relation pourrait cependant être complexe et dépendre d'un grand nombre de facteurs

Fonction de corrélation à 2 points des galaxies et spectre de puissance de fluctuation du champ de densité de matière

Contraste de densité:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$$

Décomposition du champ dans l'espace de Fourier:

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int \delta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$

Donc:

$$\xi(\mathbf{x}) = \int |\delta_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k$$

La fonction de corrélation est la Transformée de Fourier du spectre de puissance de fluctuation du champ de matière. ⁶⁰

Fonction de corrélation à deux points

Fonction de corrélation:

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Transformée de Fourier:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(\mathbf{k}) = \int \delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \end{cases}$$

Comme δ est réel, $\delta^* = \delta$ et la fonction de corrélation s'écrit:

$$\xi_{\delta}(\mathbf{r}) = \langle \delta^*(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

$$\xi_{\delta}(\mathbf{r}) = \left\langle \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}') e^{-\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} d^3\mathbf{k}' \right) \right\rangle$$

$$\xi_{\delta}(\mathbf{r}) = \langle (2\pi)^{-6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' e^{-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \langle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \hat{\delta}^*(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \rangle$$

Or

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k}) \hat{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^2 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{\delta}(\mathbf{k})$$

et donc

$$\xi_{\delta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} P_{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

par conséquent $\xi_\delta(\mathbf{r})$ est la T.F. inverse de $P_\delta(\mathbf{k})$:

$$P_\delta(\mathbf{k}) = \int \xi_\delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$$

Exemple: cas d'un univers isotrope:

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \xi_\delta(r)$$

$$P_\delta(\mathbf{k}) = P_\delta(k)$$

$$\xi_\delta(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 P_\delta(k) dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta e^{ik r \cos\theta} d\theta$$

Soit:

$$\begin{cases} \xi_\delta(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int k^2 P_\delta(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \\ P_\delta(k) = 4\pi \int k^2 \xi_\delta(r) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \end{cases}$$

Fonction
de
corrélacion
à deux
points et
spectre de
puissance

$$\langle N^2 \rangle = \xi(0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k)$$

Les comptages des galaxies dans des boites et la variance des comptages donnent accès au spectre de puissance de la distribution des galaxies

Mesure de la fonction de corrélation à 2 points des galaxies

Point de vue observationnel: fonction de corrélation= *excès local du nombre de paires de galaxies par rapport à une distribution aléatoire*

$$\xi(r) = \frac{N_{obs}(r)}{N_{alea}(r)} - 1$$

Loi de puissance observée:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}$$

Fonction de corrélation projetée:

$$dP = \bar{N}^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2$$

Mesure de la fonction de *corrélation angulaire* projetée à 2 points des galaxies

Si:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$$

Alors:

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^\gamma \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{1}{\left[\int_0^\infty u^2 \Phi(u) du\right]^2} \right] \int_0^\infty u^{5-\gamma} \Phi^2(u) du$$
$$u = \frac{r}{D},$$

Mesure de la fonction de *corrélation angulaire* projetée à 2 points des galaxies

Supposons que la fonction de corrélation à deux points ait la forme usuelle:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} . \quad (422)$$

On se propose de calculer la projection $\omega(\theta)$ et d'analyser son comportement pour des petits angles.

On rappelle que

$$dP_{2D} = N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (423)$$

et

$$dP_{3D} = n^2 [1 + \xi(r_{12})] dV_1 dV_2 . \quad (424)$$

Si la fonction de sélection du relevé est $\Phi(r/D)$, la densité numérique par unité d'angle solide est¹³

$$N = \int_0^\infty r^2 n \Phi\left(\frac{r}{D}\right) dr \quad (425)$$

$$^{13}dS = r^2 d\Omega \quad dV = r^2 dr d\Omega$$

$$= nD^3 \int_0^\infty y^2 \Phi(y) dy \quad (426)$$

$$= nD^3 E \quad (427)$$

Mesure de la fonction de *corrélation angulaire* projetée à 2 points des galaxies

Supposons que la fonction de corrélation à deux points ait la forme usuelle:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} . \quad (422)$$

On se propose de calculer la projection $\omega(\theta)$ et d'analyser son comportement pour des petits angles. On rappelle que

$$dP_{2D} = N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (423)$$

et

$$dP_{3D} = n^2 [1 + \xi(r_{12})] dV_1 dV_2 . \quad (424)$$

Si la fonction de sélection du relevé est $\Phi(r/D)$, la densité numérique par unité d'angle solide est¹³

$$N = \int_0^\infty r^2 n \Phi\left(\frac{r}{D}\right) dr \quad (425)$$

$${}^{13}dS = r^2 d\Omega \quad dV = r^2 dr d\Omega$$

$$= nD^3 \int_0^\infty y^2 \Phi(y) dy \quad (426)$$

$$= nD^3 E \quad (427)$$

et la projection de dP_{3D} s'écrit:

$$dP_{2D} = n^2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) d\Omega_1 dr_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) [1 + \xi(r_{12})] d\Omega_2 dr_2 . \quad (428)$$

En utilisant (423), (425) et (428) on obtient:

$$n^2 D^6 E^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 = n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) [1 + \xi(r_{12})] dr_2 \quad (429)$$

et donc:

$$N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 = N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 + n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) dr_2 \quad (430)$$

Mesure de la fonction de corrélation angulaire projetée à 2 points des galaxies

soit:

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) dr_2 \quad (431)$$

Dans l'hypothèse où θ est petit, alors

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta \approx (r_1 - r_2)^2 + r_1 r_2 \theta^2 \quad (432)$$

et on peut définir une nouvelle variable u telle que

$$r_2 - r_1 = ur_0; \quad \text{et par ailleurs } r_2 = r_1 = yD, \quad (433)$$

on a donc

$$r_2 \approx ur_0 + yD, \quad (434)$$

et, pour r_1 fixe

$$dr_2 \approx r_0 du. \quad (435)$$

Dans ce cas, y est presque constant autour de $r_2 - r_1$ et donc:

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi\left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2}\right] r_0 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) r_2^2 \quad (436)$$

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int y^4 \Phi(y)^2 D^5 dy \int r_0 \xi\left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2}\right] du \quad (437)$$

Comme $N^2 = n^2 D^6 E^2$, on pose

$$x = \frac{ur_0}{yD\theta}, \quad (438)$$

d'où l'on déduit finalement

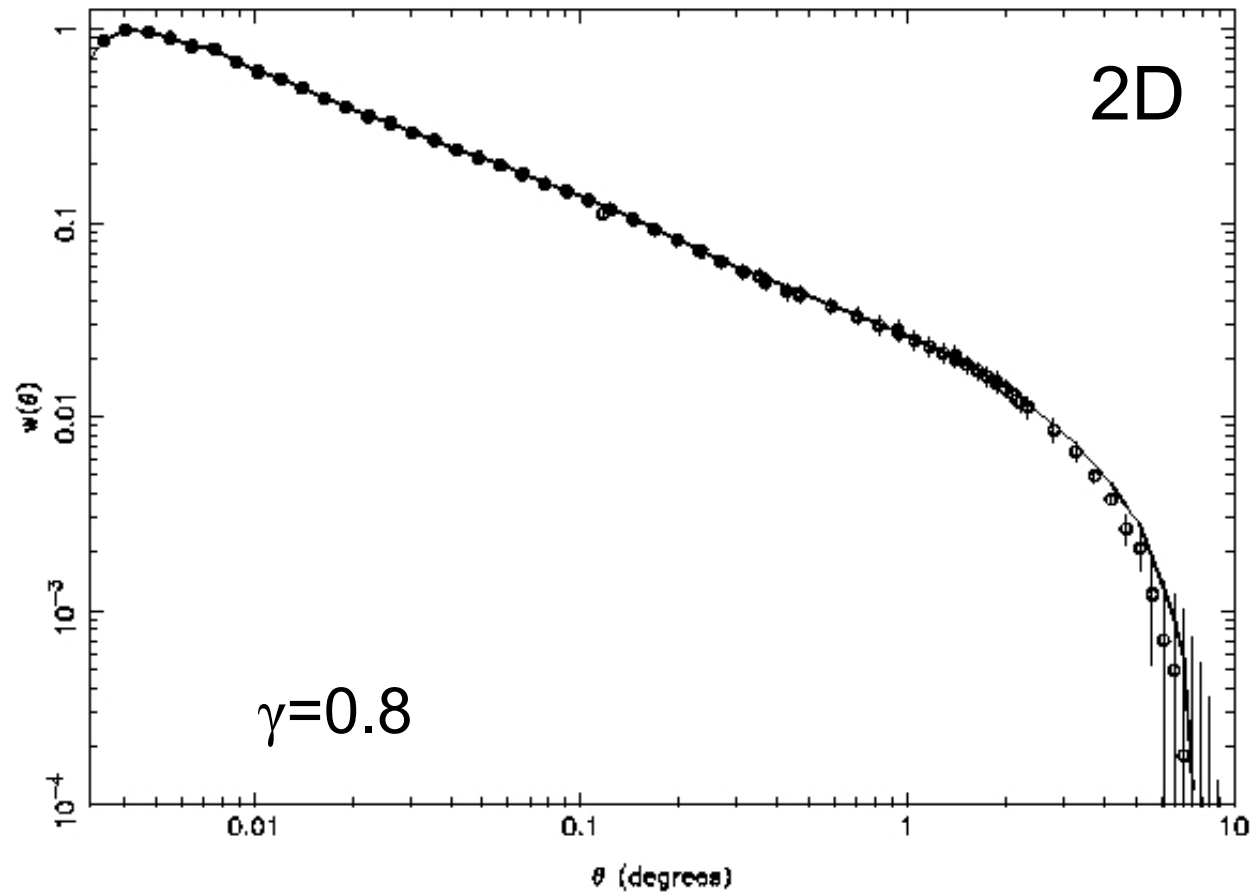
$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^\gamma \frac{1}{E^2} \int y^{5-\gamma} \Phi(y)^2 dy \int (1+x^2)^{-\gamma/2} dx \quad (CQFD). \quad (439)$$

Fonction de corrélation à 2 points des galaxies , 2D

APM: $2 \cdot 10^6$ galaxies

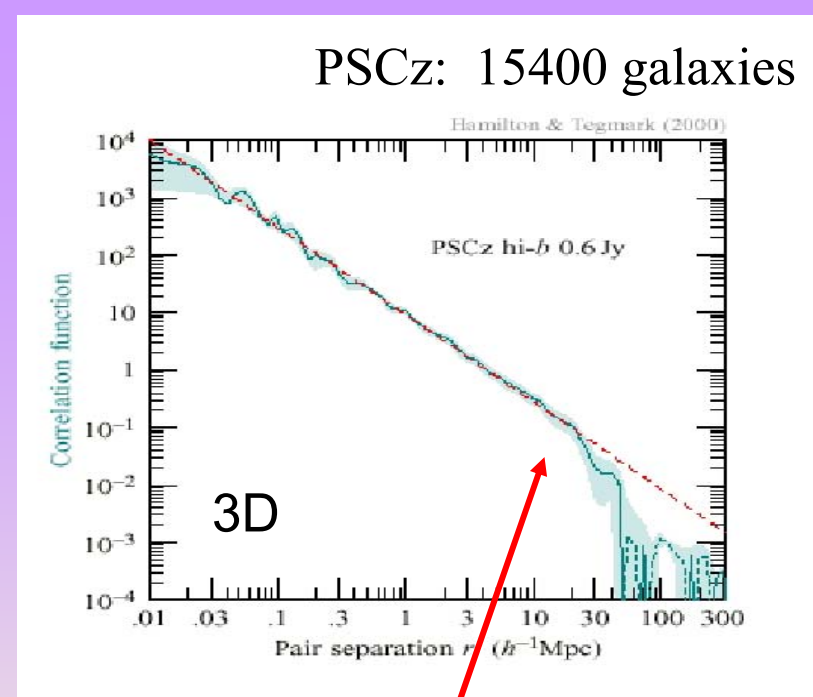
(d)

$17 < b_j < 20$

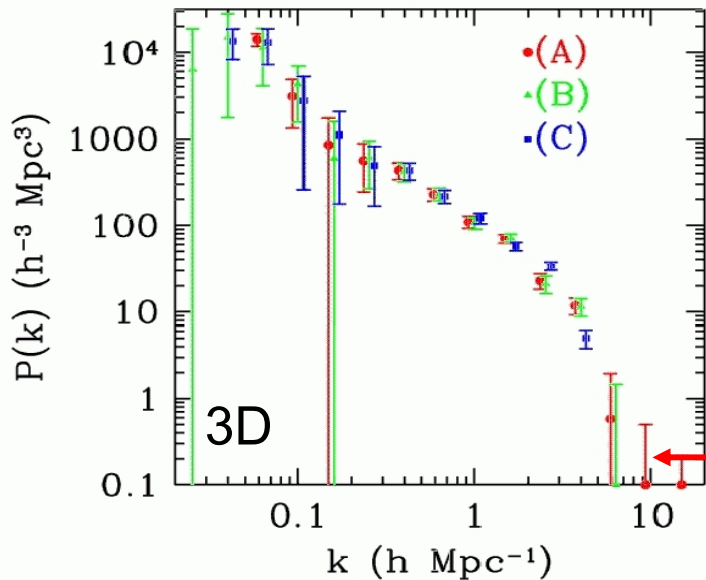


Fonction de corrélation à 2 points des galaxies, 3D

Fonction de corrélation
 $\gamma=1.8$ $r_0=5 h^{-1}$ Mpc



Redshifts spectroscopiques



Sloan Digital Sky Survey (SDSS)

Redshifts photométriques

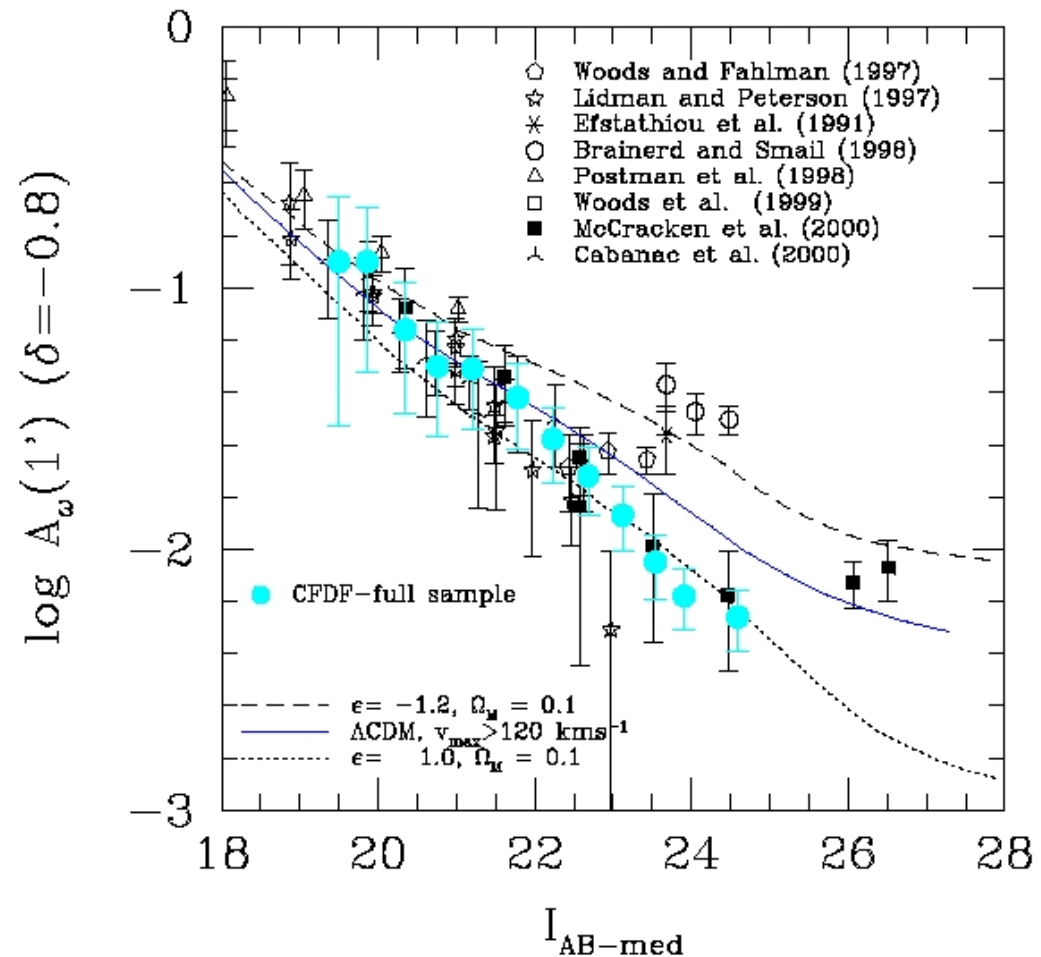
$1.5 \cdot 10^8$ galaxies

Evolution de la fonction de corrélation angulaire

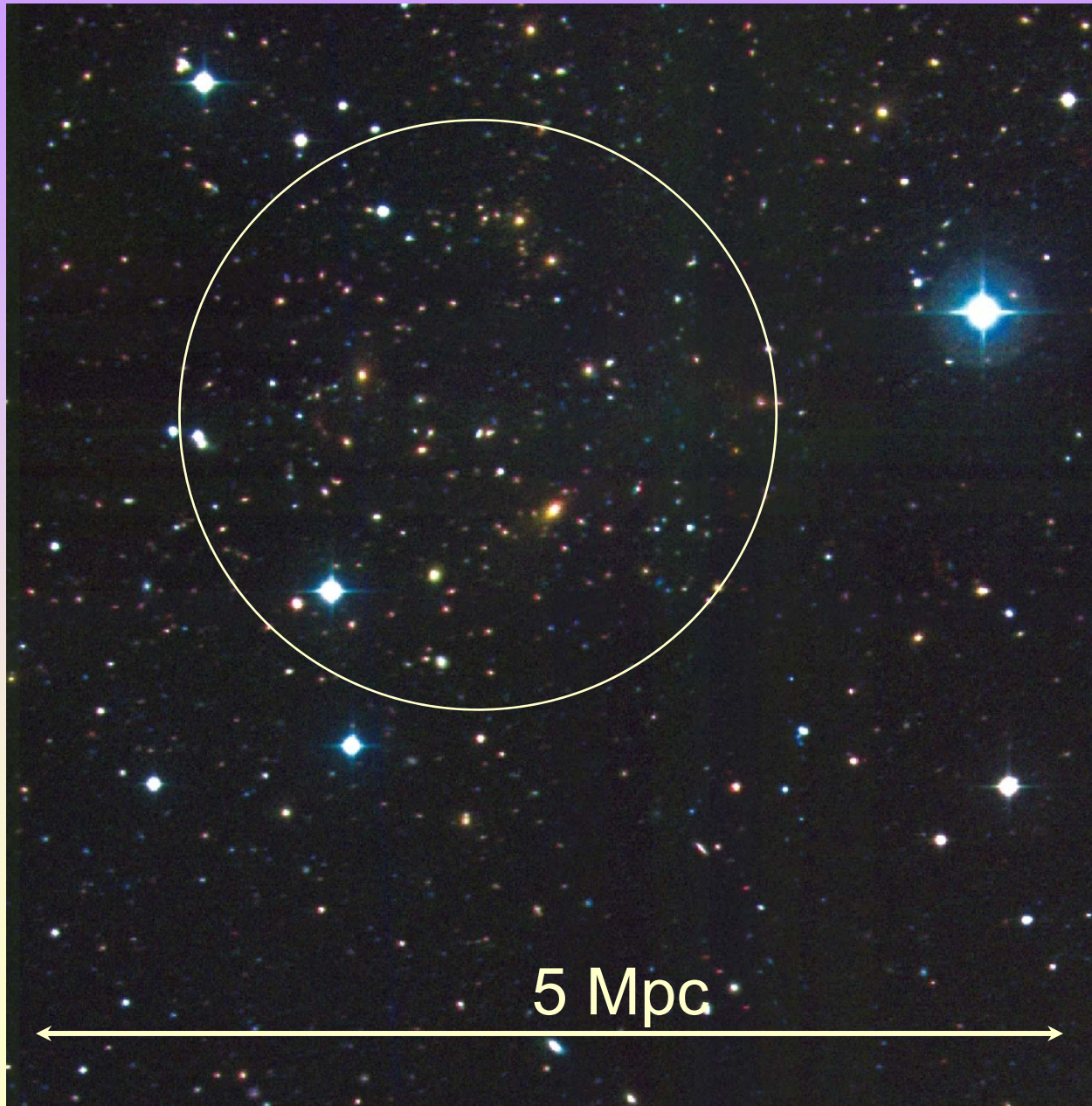
$$\xi(r, z) = h(z) \cdot (r/r_0)^\gamma$$

$$h(z) = (1+z)^{-(3+\epsilon)}$$

H. J. McCracken et al.: The Canada-France deep fields survey. I.

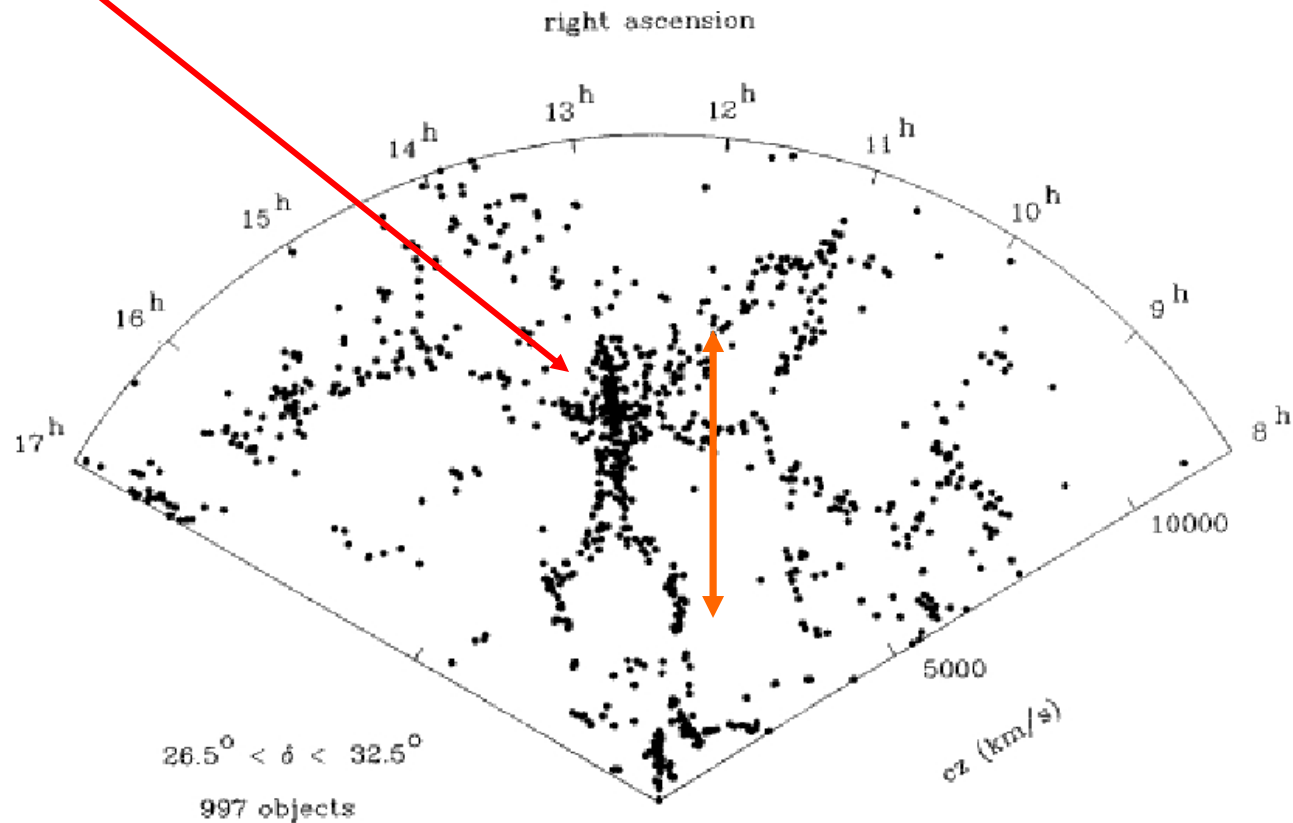


Amas de galaxias



Propriétés générales des amas de galaxies

Coma



Effet « *finger of God* »

Propriétés générales des amas de galaxies

Densité observée des amas:

- Jusqu'à $l=24$: 15 amas deg^{-2}
- $l=24$: amas visible jusqu'à $z=1$

Dimension angulaire du ciel: 40000 deg^2

- Soit: $\sim 5 \times 10^5 - 1 \times 10^6$ amas de galaxies
- $= 10^{-5} h^3 \text{ amas.Mpc}^{-3}$

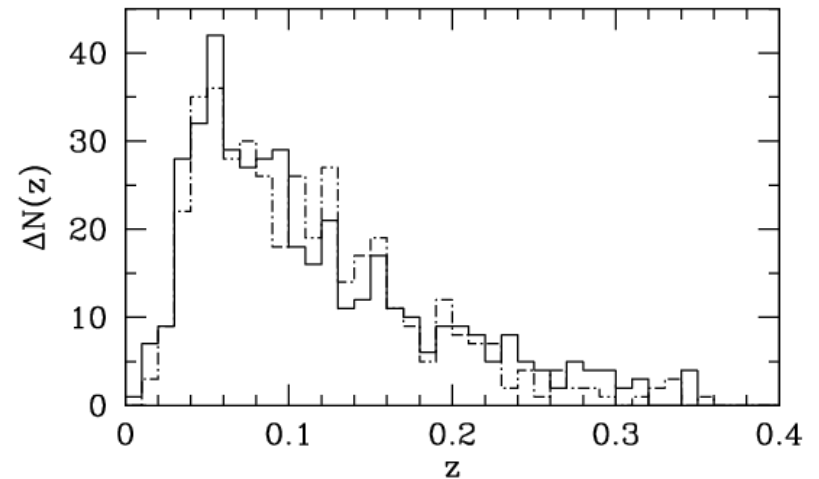
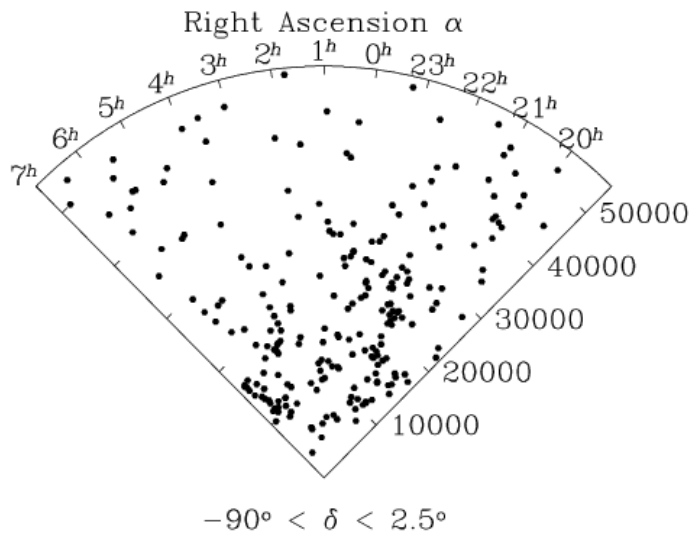
Galaxies versus amas...Densité observée de galaxies:

- Jusqu'à $l=24$: $\sim 1 \times 10^{10}$ galaxies
- Soit : $0.02 h^3 \text{ gal.Mpc}^{-3}$

Fonction de corrélation des amas de galaxies:

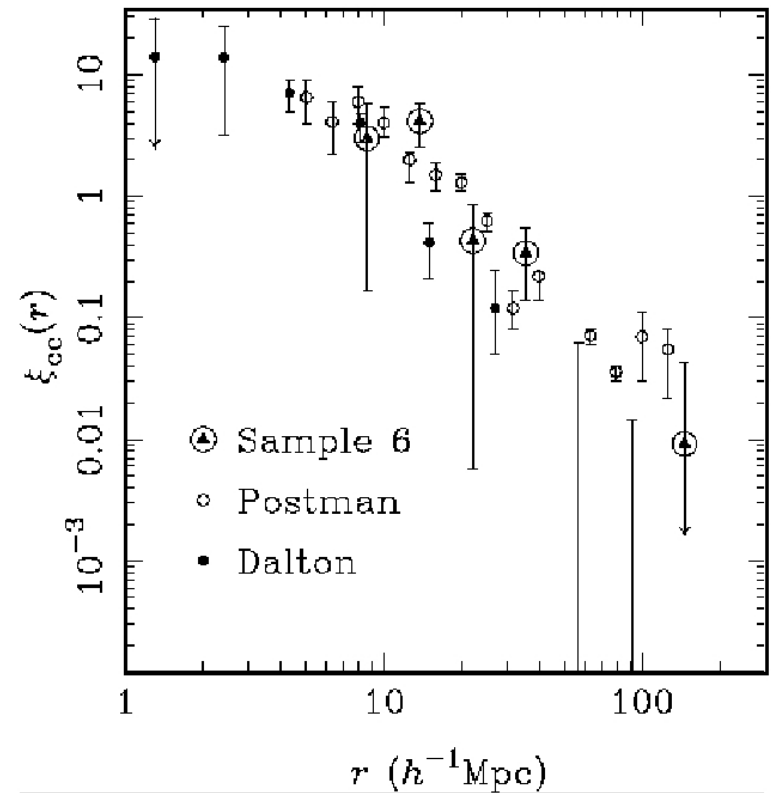
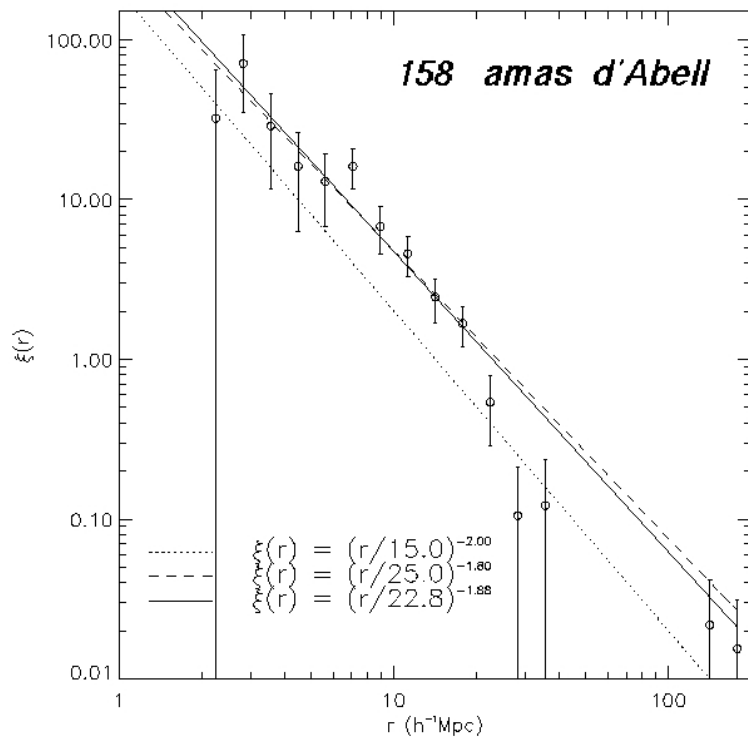
- Pente 1.8 ± 0.2 $r_0 = 20 \pm 5 \text{ Mpc}$

Propriétés générales des amas de galaxies



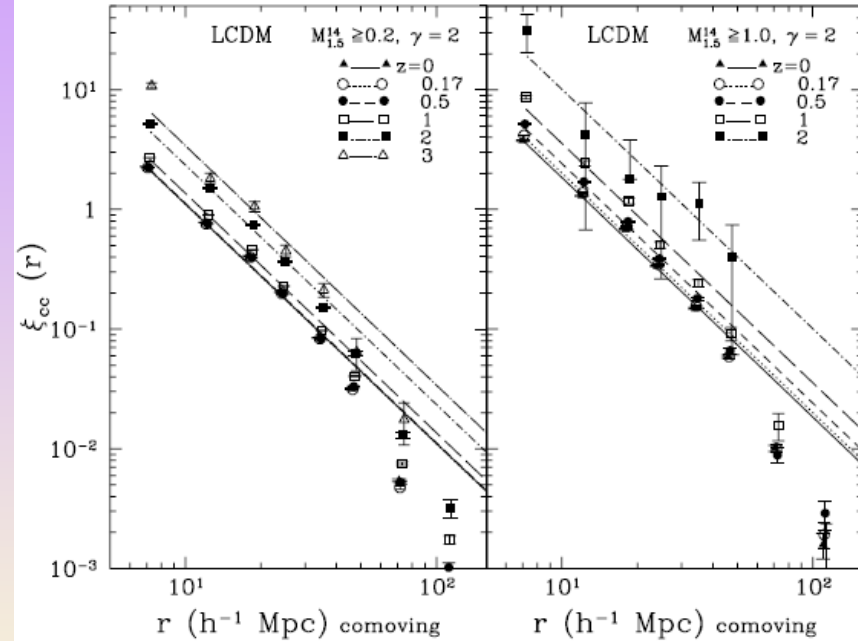
Distribution 3D

Fonction de corrélation à deux points des amas de galaxies , 3D

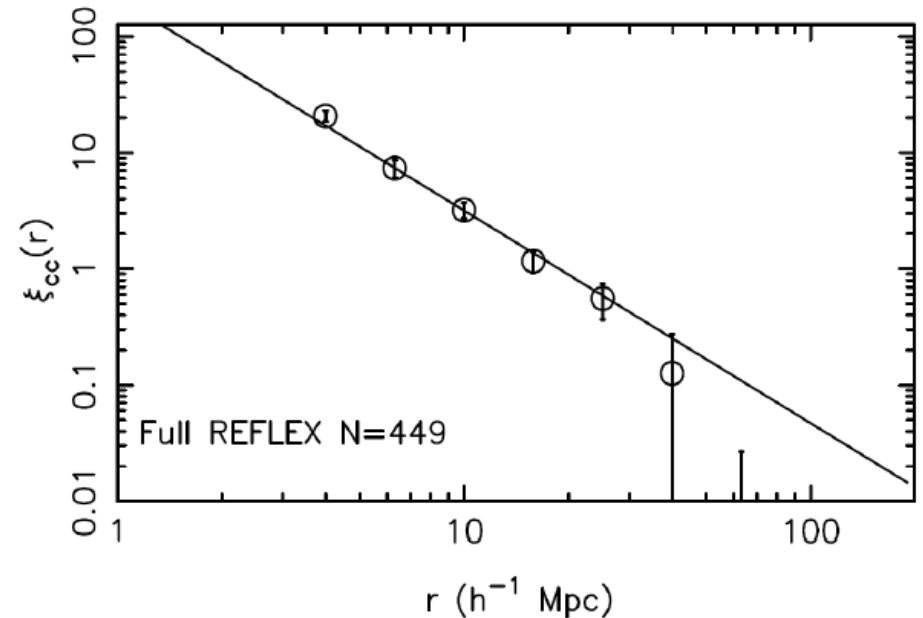


$$\gamma=1.8 \quad ; \quad r_0=24 h^{-1} \text{ Mpc}$$

Fonction de corrélation à deux points des amas de galaxies



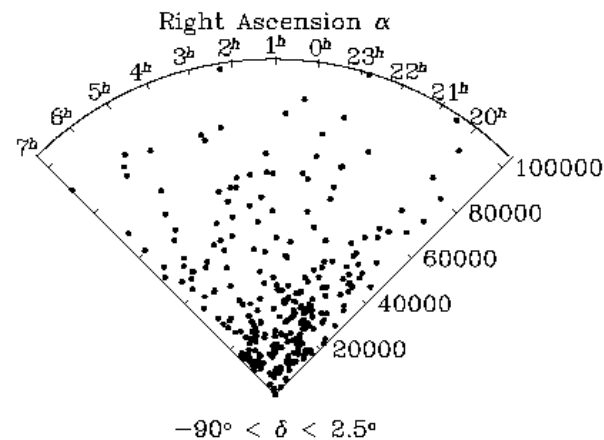
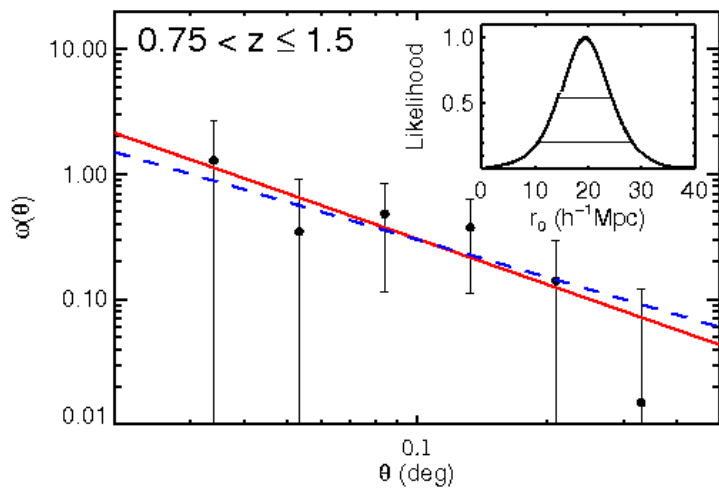
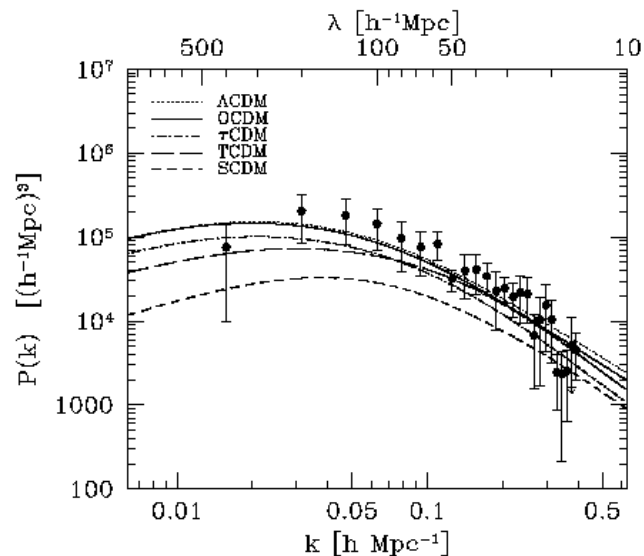
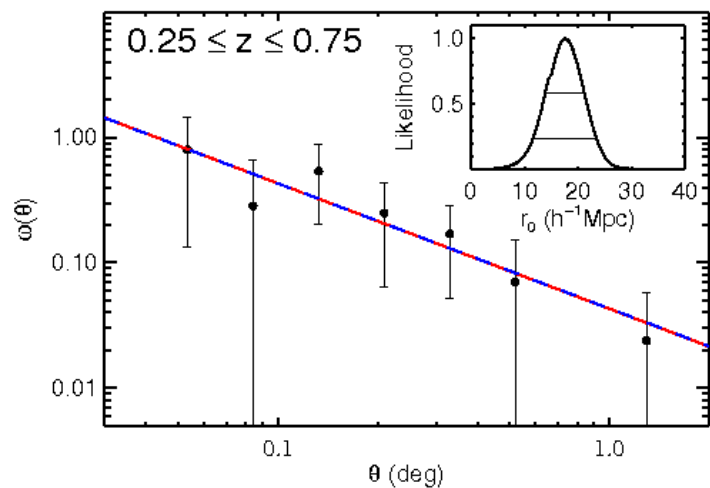
Amas optiques SDSS



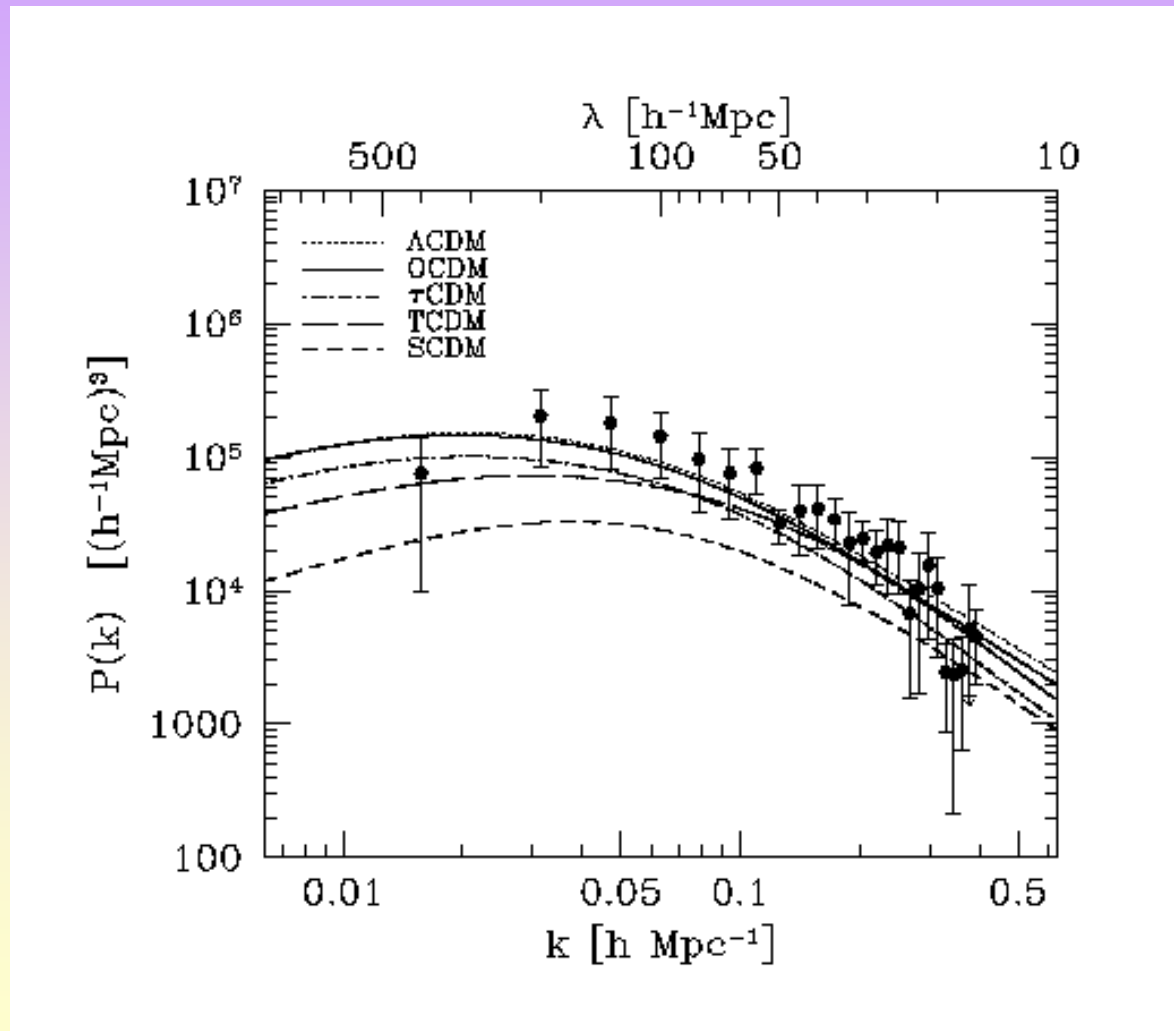
Amas X ROSAT

Figure 28: Fonctions de corrélation tri-dimensionnelles amas-amas: A gauche, l'échantillon optique d'amas de galaxies sur relevé SDSS. La forme est donnée pour deux seuils de masse limite dans la sélection des amas de galaxies ($\geq 0.2 \times 10^{14}$ and $1 \times 10^{14} h^{-1}$ masses solaires) et pour plusieurs intervalle de redshift. Les lignes continues sont les meilleurs ajustements pour un modèle cosmologique Λ CDM. Les pentes sont voisines de $\gamma = 2.0$. D'après Bachall et al 2004, ApJ 603, 1. A droite, l'échantillon en bande X du relevé REFLEX. La ligne continue montre le meilleur ajustement pour une pente $\gamma = 1.83$, $r_0 = 18.8$. D'après Collins et al 2000, MNRAS 319, 939.

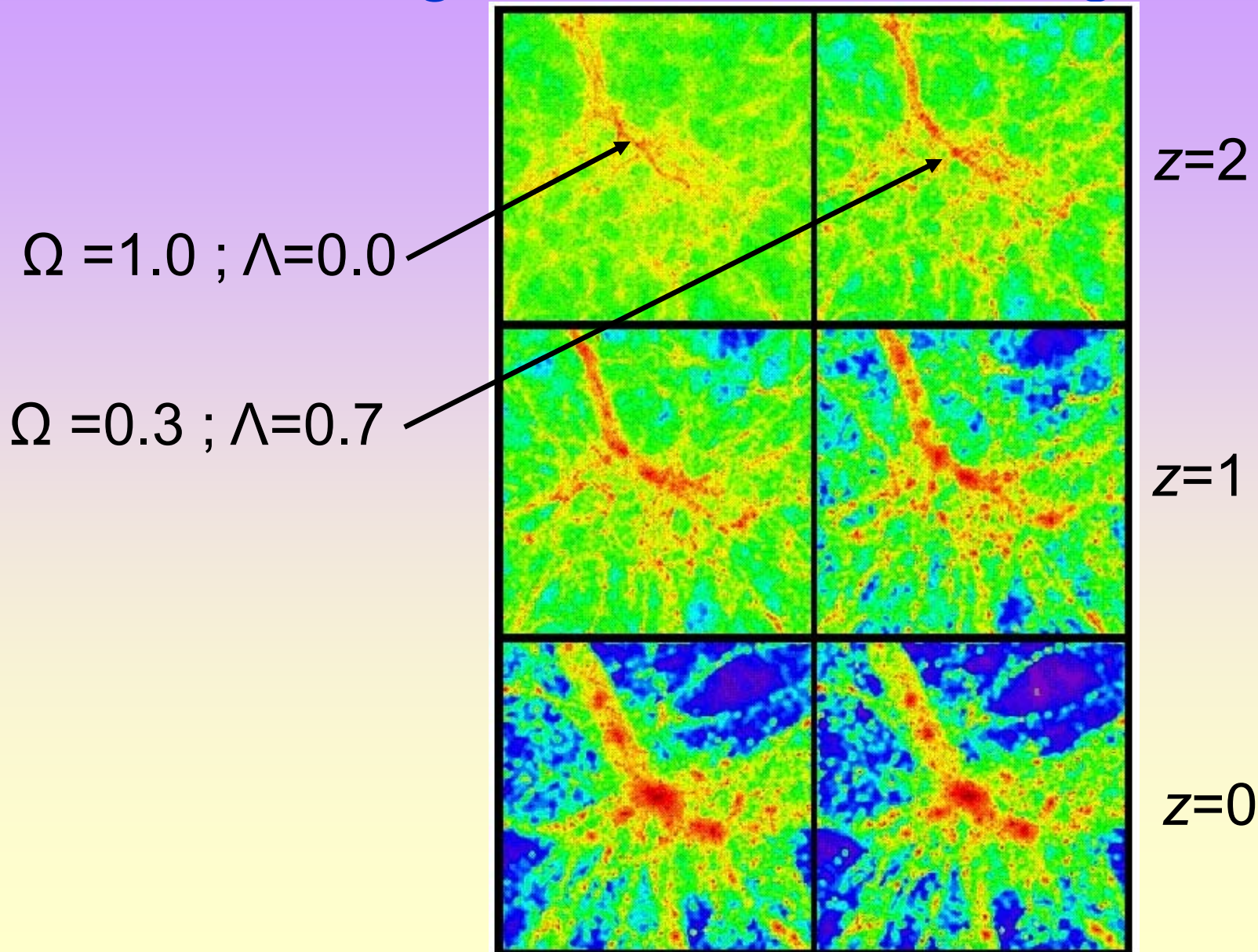
Fonction de corrélation des amas de galaxies et spectre de puissance



Spectre de puissance des amas de galaxies et scénarios cosmologiques



Formation/evolution des populations d'amas de galaxies et cosmologie



Morphologie et profil des amas dans un environnement cosmologique

31.25 Mpc/h

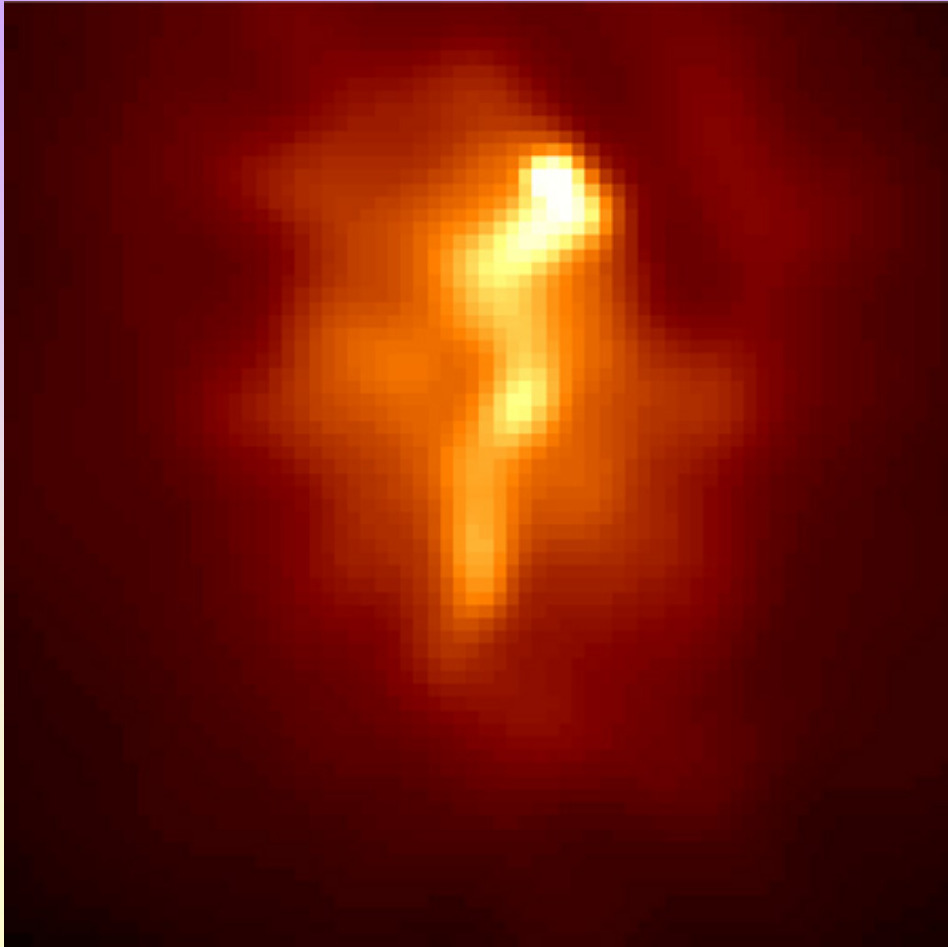


Gaz intergalactique

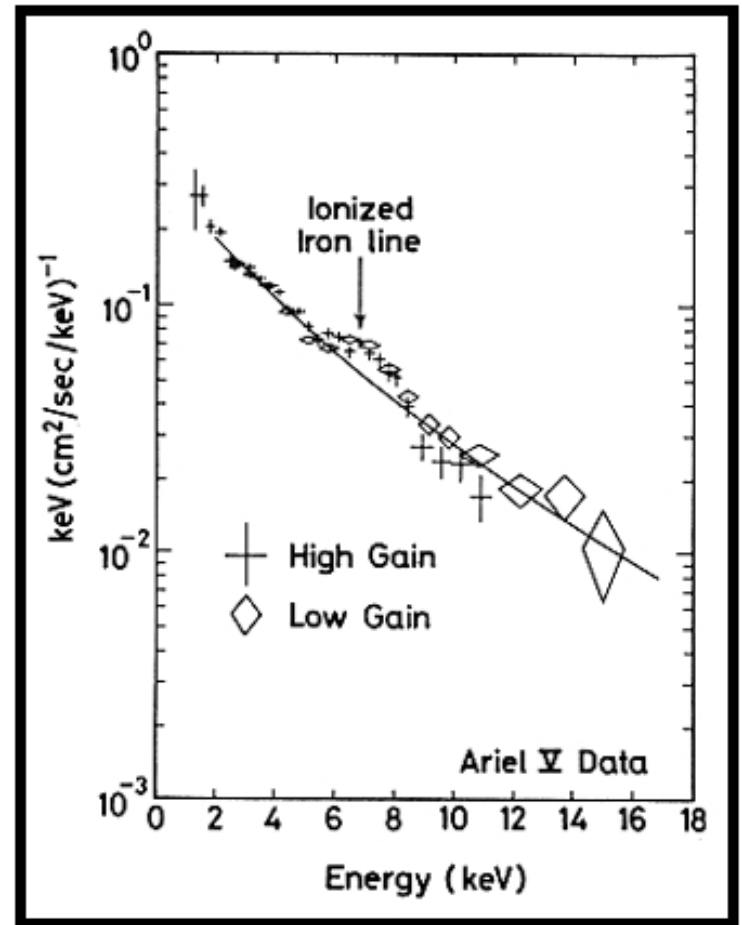
- **Gaz intra-amas:**
 - 10^8 K
 - abondance $\sim 1/2$ solaire; une fraction est primordiale

- **Gaz intergalactique:**
 - DLA
 - Gaz des halos de galaxies (riches en métaux)
 - Forêt Lyman-alpha

Gaz Intra-amas

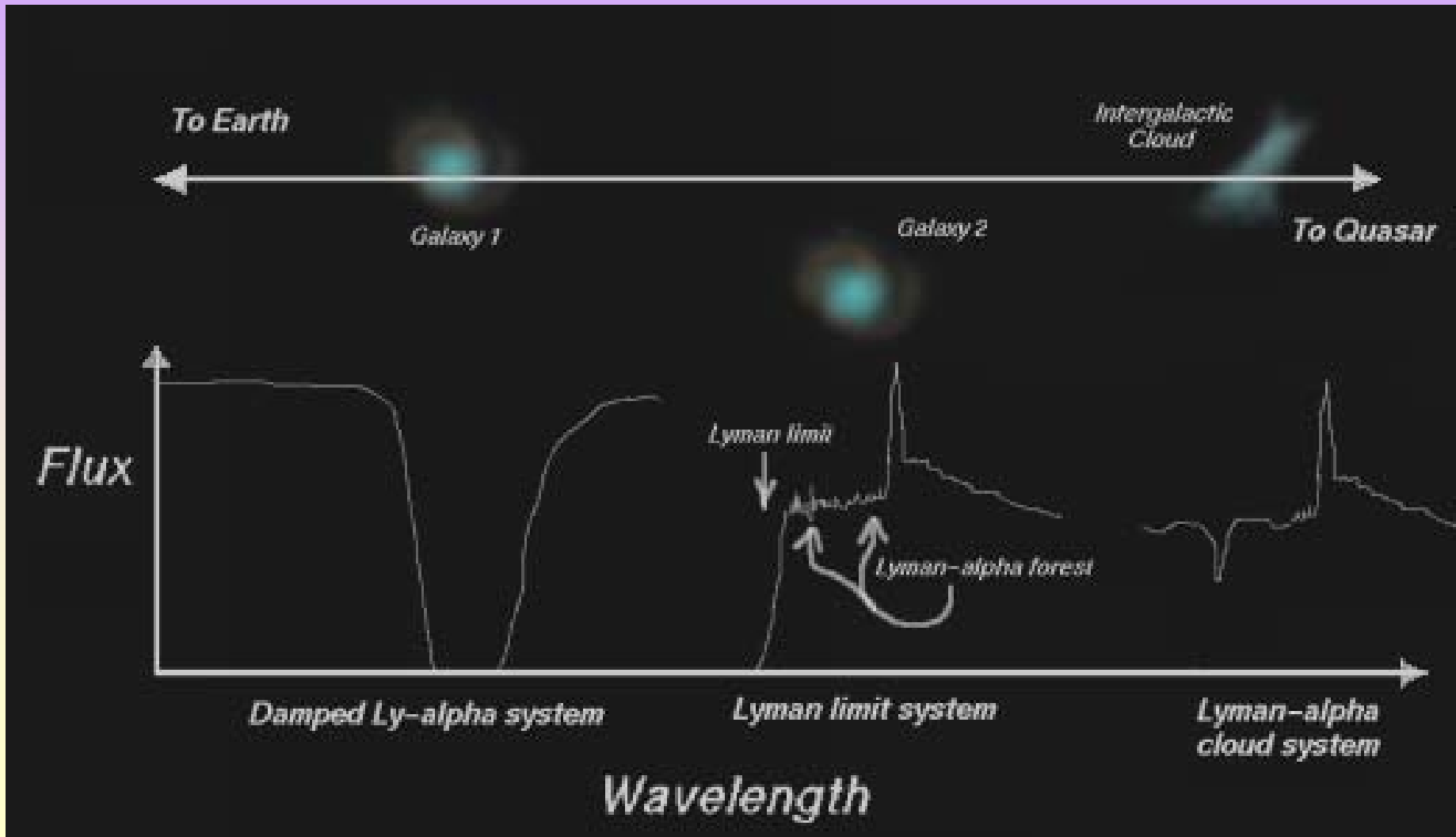


Abell 1795



Perseus

Gaz intergalactique



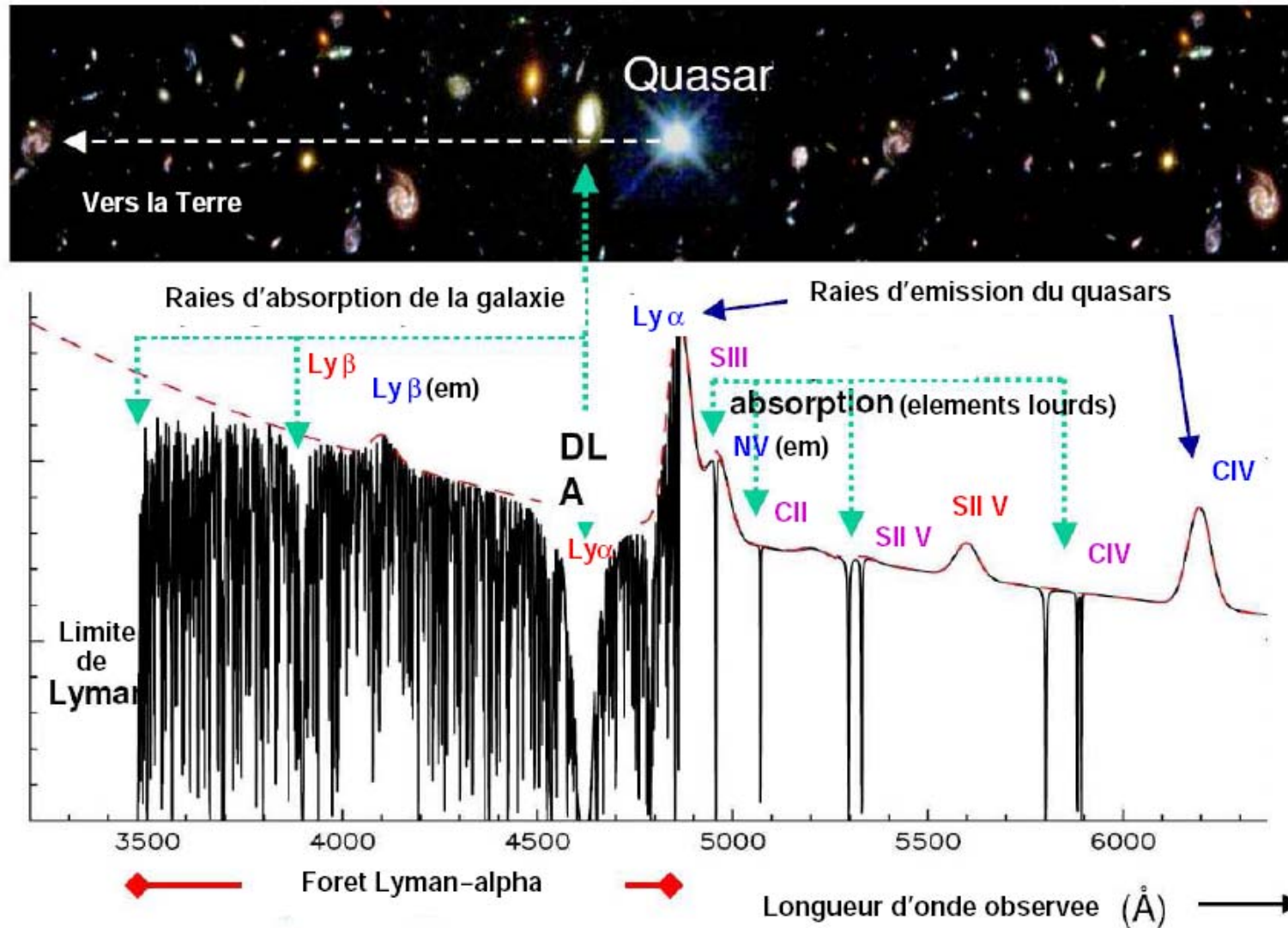
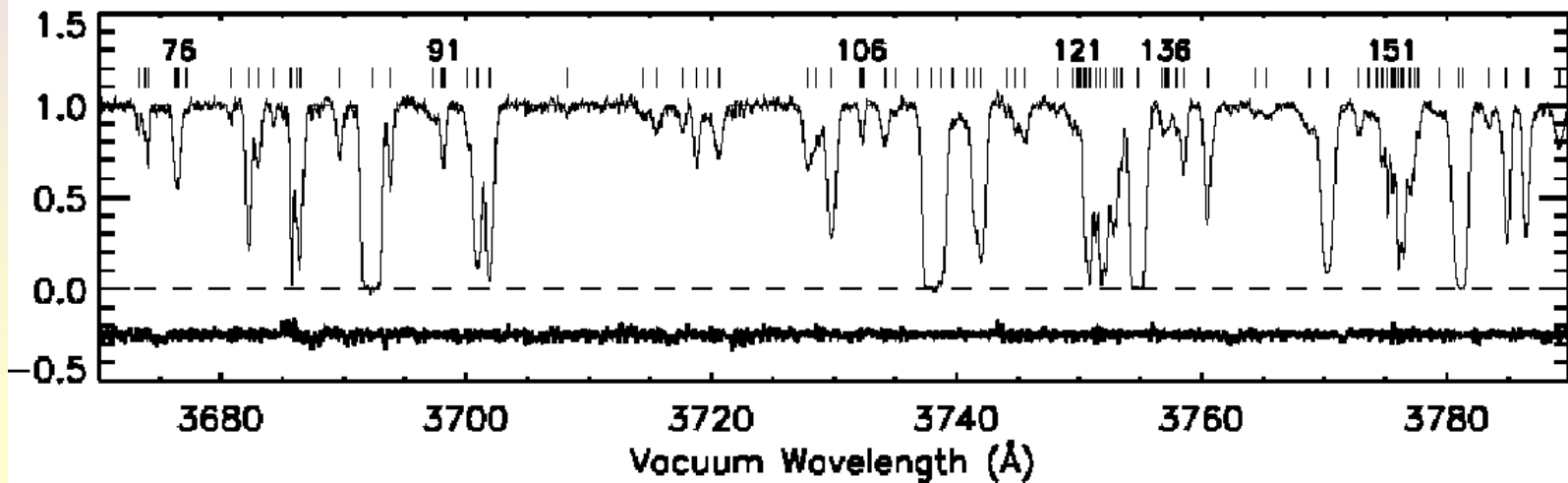
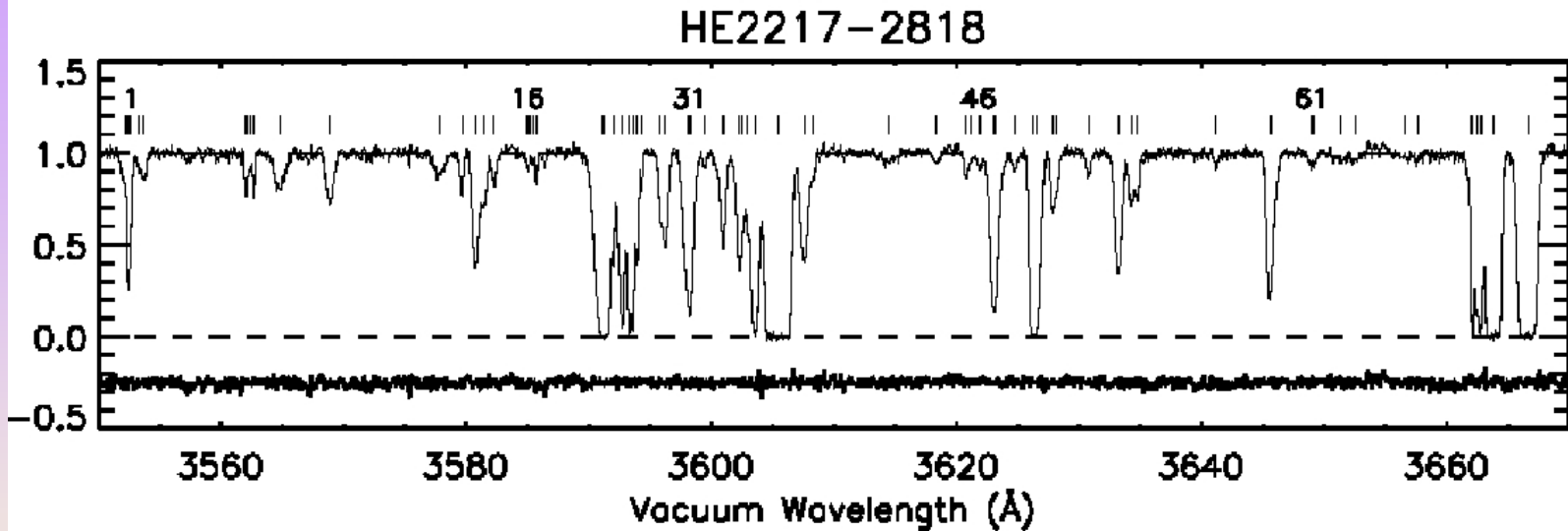


Figure 33: Une vue synthétique du milieu intergalactique autour et le long de la ligne de visée d'un quasar. La galaxie responsable des raies d'absorption est associée au système amorti (Damped Lyman Alpha, DLA).

Gaz intergalactique

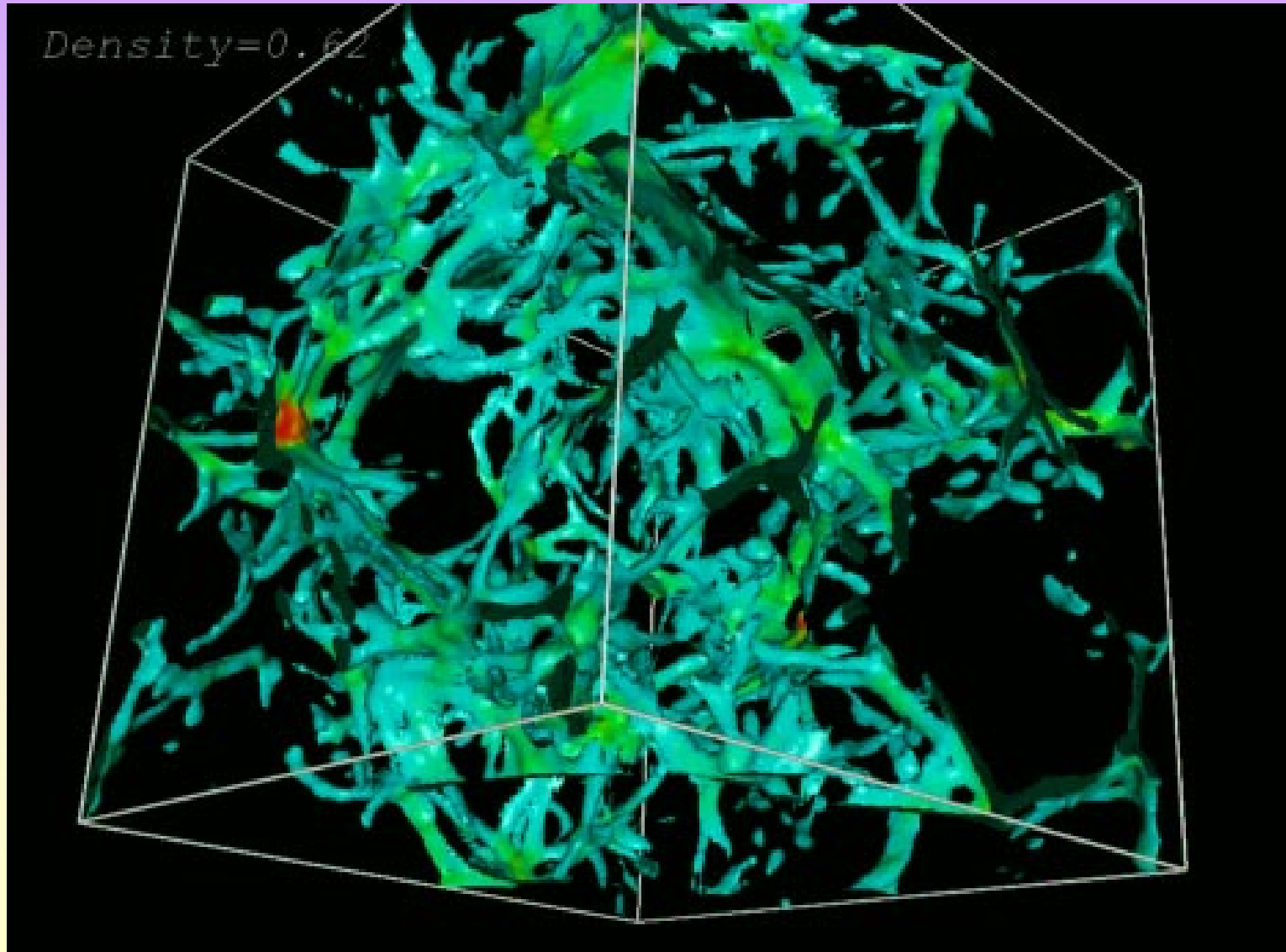


Forêt Lyman alpha

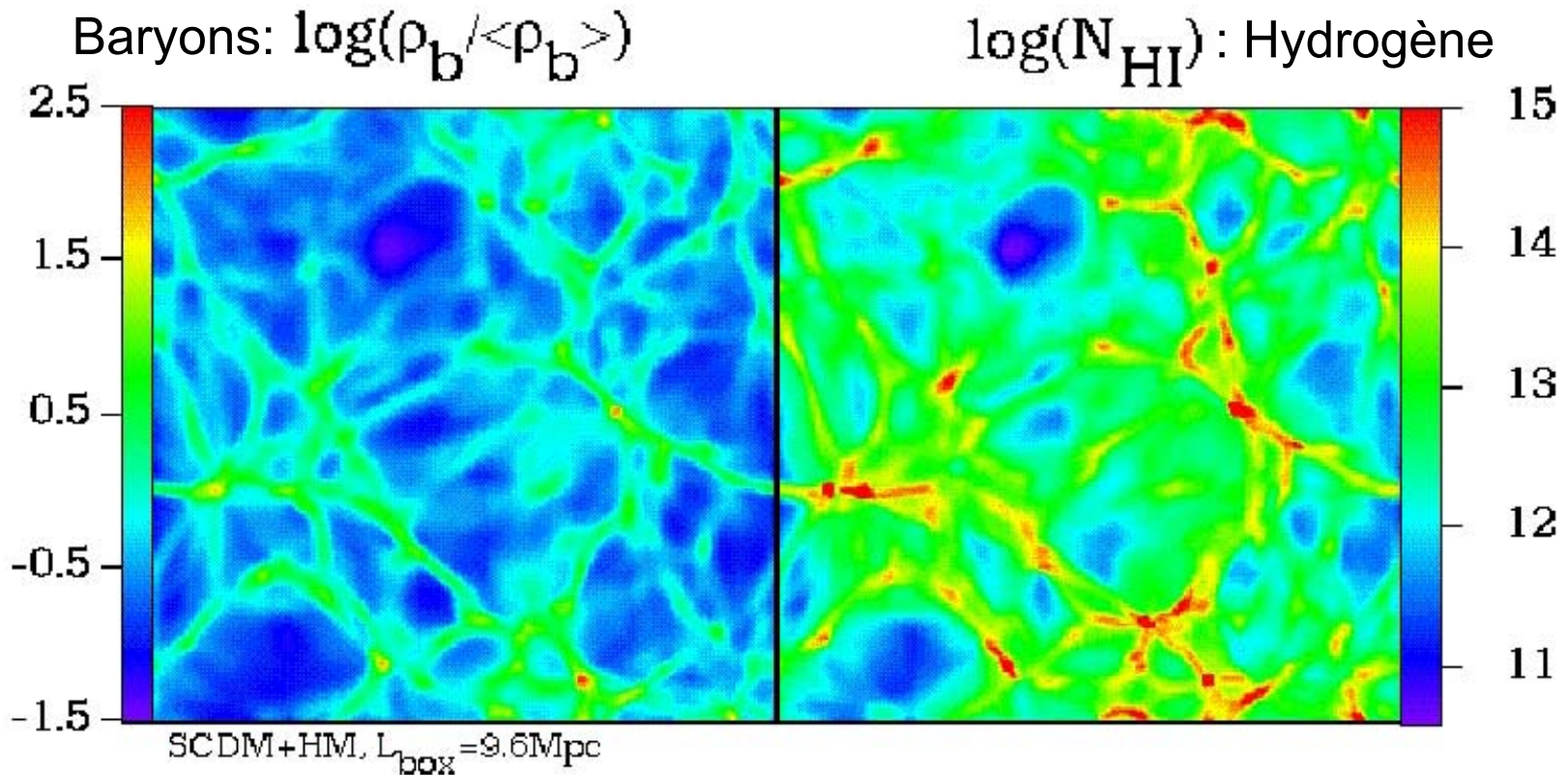
- Prédits par Bachall & Salpeter en 1965
- Non-effondrés
- Nuages de grande dimension ~ 100 kpc
- $N_{\text{HI}} < 10^{17} \text{ cm}^{-2}$
- Métallicité: $0.001 Z_{\text{sol}} < Z < 0.01 Z_{\text{sol}}$
- Hors état d'équilibre dynamique et thermodynamique
- Pas d'évolution en densité avant $z=1$; nette évolution au-delà
- Pas d'évolution morphologique avec le temps
- Forme un vaste réseau de filaments gazeux interconnectés
- Sont corrélés sur des échelles de 1 Mpc. Distance propre entre 2 nuages:

$$D_{LyF} = \frac{cdt}{dzdN} \approx 0.6 \Omega^{-1/2} h^{-1} \text{Mpc}$$

Structuration de la forêt Lyman-alpha sur des échelles cosmologiques



Gaz intergalactique: baryons et gaz HI dans la forêt Lyman alpha

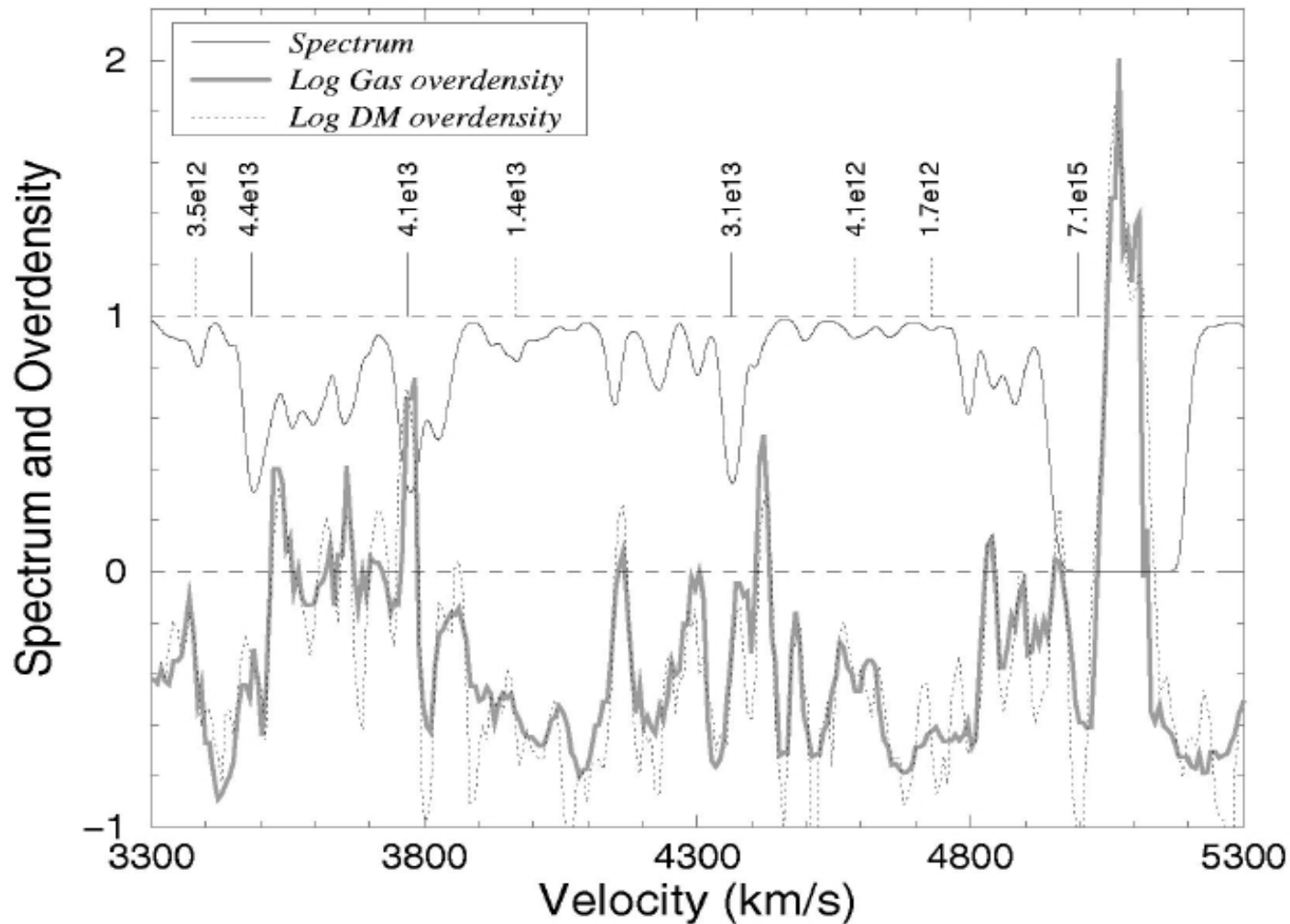


© Laboratory for Computational Astrophysics, NCSA

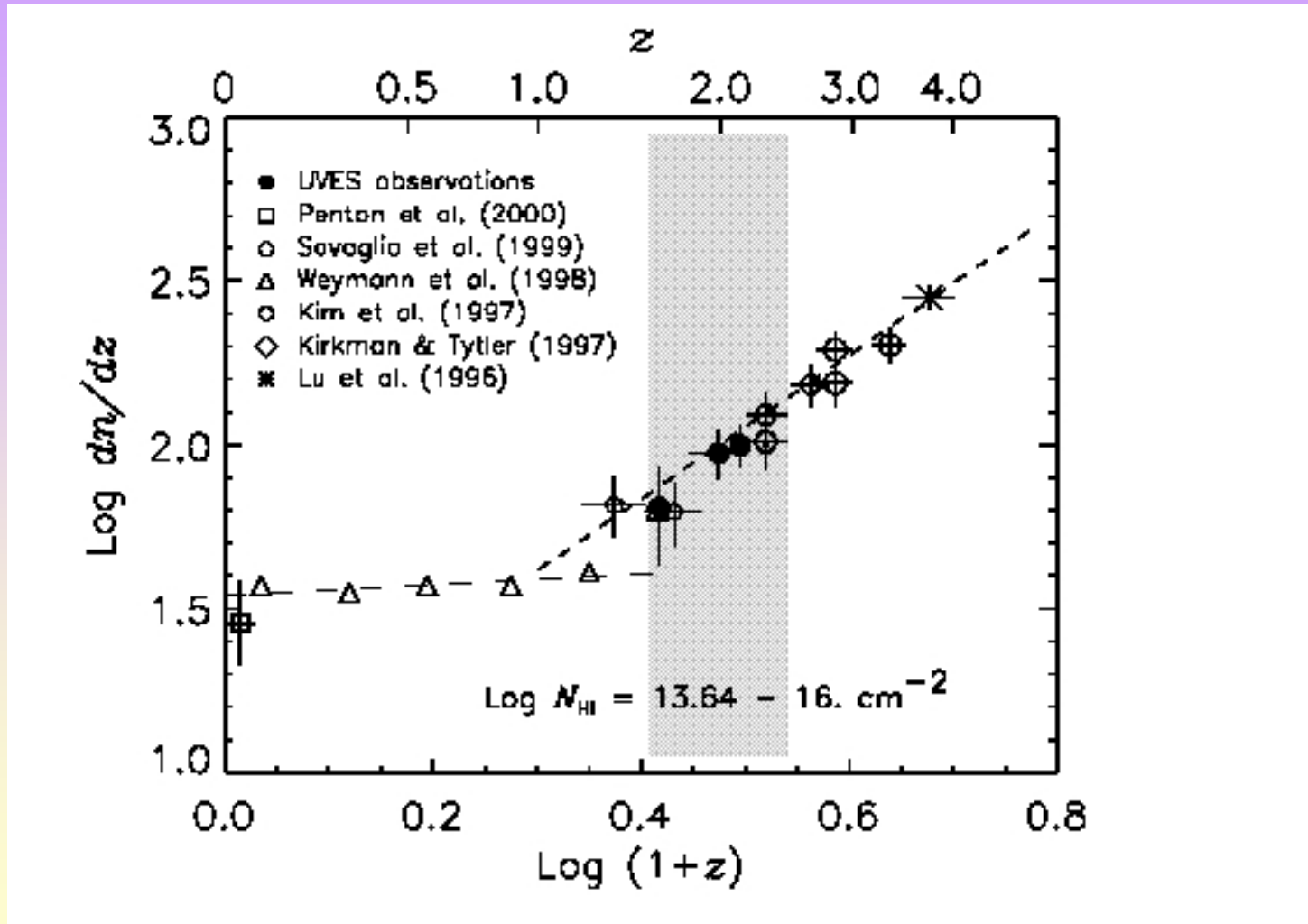
Zhang, Meiksin, Anninos & Norman (1997)

Corrélation entre l'excès de baryons dans les nuages et
la densité de colonne de HI

Gas intergalactique: corrélation gaz et matière (noire)



Gaz intergalactique: un réservoir de baryons à grand redshift?



Evolution numérique des nuages Ly_α en fonction du redshift

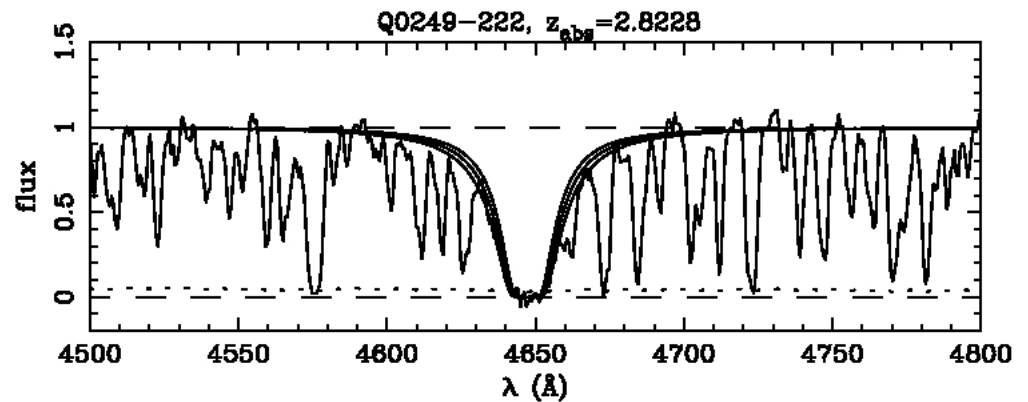
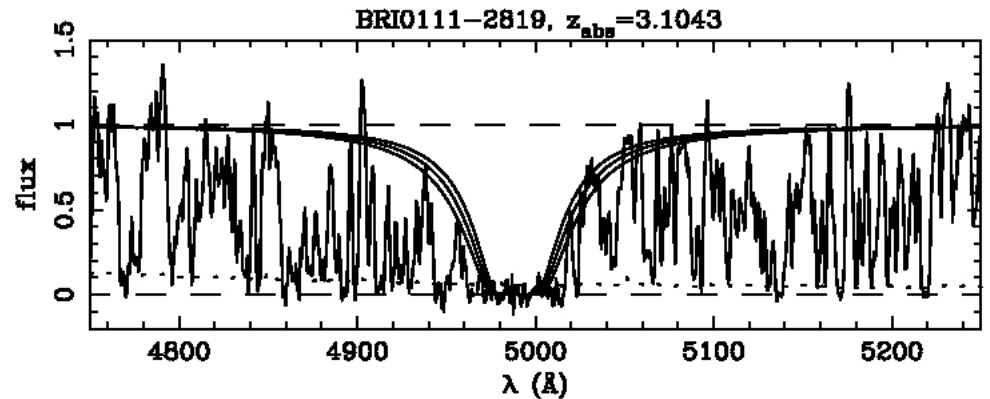
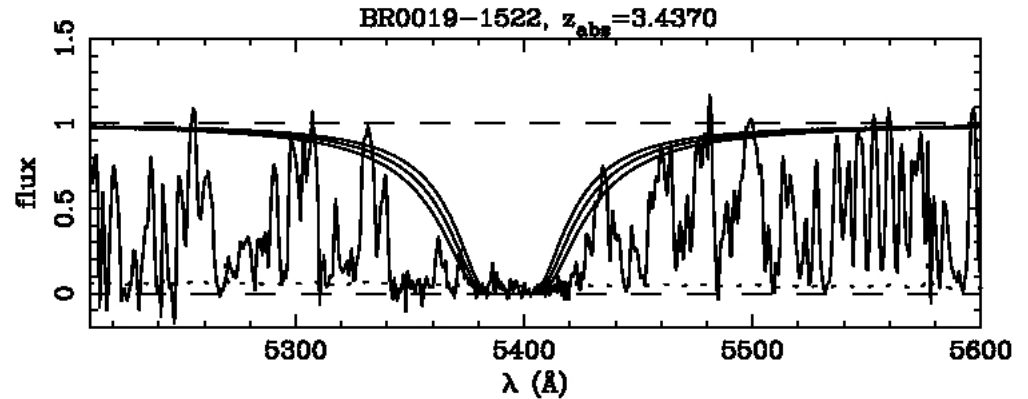
Systemes amortis

Systemes à grande densité de colonne

- $N_{\text{HI}} > 10^{22} \text{ cm}^{-2}$
- $0.01 Z_{\text{sol}} < Z < 1.0 Z_{\text{sol}}$

Distance propre inter-nuage:

$$D_{\text{DLA}} = 300 \Omega^{-1/2} h^{-1} \text{Mpc}$$



Masse typique des nuages Lyman-alpha et des DLA

$$M_{FLy} \approx 1.2 \times 10^3 \left(\frac{L}{10 \text{ kpc}} \right)^2 h^{-2} M_{\odot}$$

$$M_{DLA} \approx 10^{10} \left(\frac{L}{300 \text{ kpc}} \right) h^{-2} M_{\odot} ,$$

Gaz intergalactique

- Forêt Lyman-alpha
 - $10^{12} < N(\text{HI}) < 10^{17} \text{ cm}^{-2}$
 - Raies non saturées
 - Primordial < Métallicité < solaire
 - Taille > galaxies
- Systèmes à Limite de Lyman
 - $N(\text{HI}) > 10^{18} \text{ cm}^{-2}$
 - Raie Lyman-alpha saturée
 - N_{HI} suffisant pour absorber tous les photons ionisants
- Système Lyman-alpha amortis
 - $N(\text{HI}) > 10^{22} \text{ cm}^{-2}$
 - Raie hautement saturée
 - Profil dominé par des ailes Lorentziennes

Gaz intergalactique

| Type | Paramètres des raies | | Caractéristiques physiques | | | $\frac{dN}{dz} = N_0(1+z)^\gamma$ | |
|----------------------------|---|----------------------------|----------------------------|--------------------|-------------|-----------------------------------|------------|
| | N_{HI} (cm^{-2}) | n (m^{-3}) | T (K) | Dimension (kpc) | $[M/H]$ | N_0 | γ |
| Forêt $\text{Ly}\alpha$ | $< 10^{17}$ | $10^{-2} - 10^3$ | 5000 – 50000 | 15–1000 | -3.5 – -2 | 6.1 | 2.47 |
| LLS | $10^{17} - 10^{19}$ | $\sim 10^3 - 10^4$ | ~ 30000 K | – | -3 – -2 | 0.3 | 1.50 |
| Super LSS | $10^{19} - 2 \times 10^{20}$ | $\sim 10^4$ | ~ 10000 K | – | -1 – +0.6 | 0.03 | 1.50 |
| DLA | $> 2 \times 10^{20}$ | $\sim 10^7$ | ~ 100 K | $\sim 10 - 20$ | -1.5 – -0.8 | ~ 0.03 | ~ 1.5 |
| DLA | $> 2 \times 10^{20}$ | $\sim 10^4$ | ~ 10000 K | $\sim 10 - 20$ | -1.5 – -0.8 | ~ 0.03 | ~ 1.5 |

LLS = Lyman Limit System (systèmes absorbeurs optiquement épais au continuum Lyman)

Effet Gunn-Peterson

Position du problème:

- Après la recombinaison, l'Univers
 - est neutre,
 - est composé principalement de gaz HI
- -> Profondeur optique du HI aux photon Ly-alpha?

Effet Gunn Peterson

Position du problème:

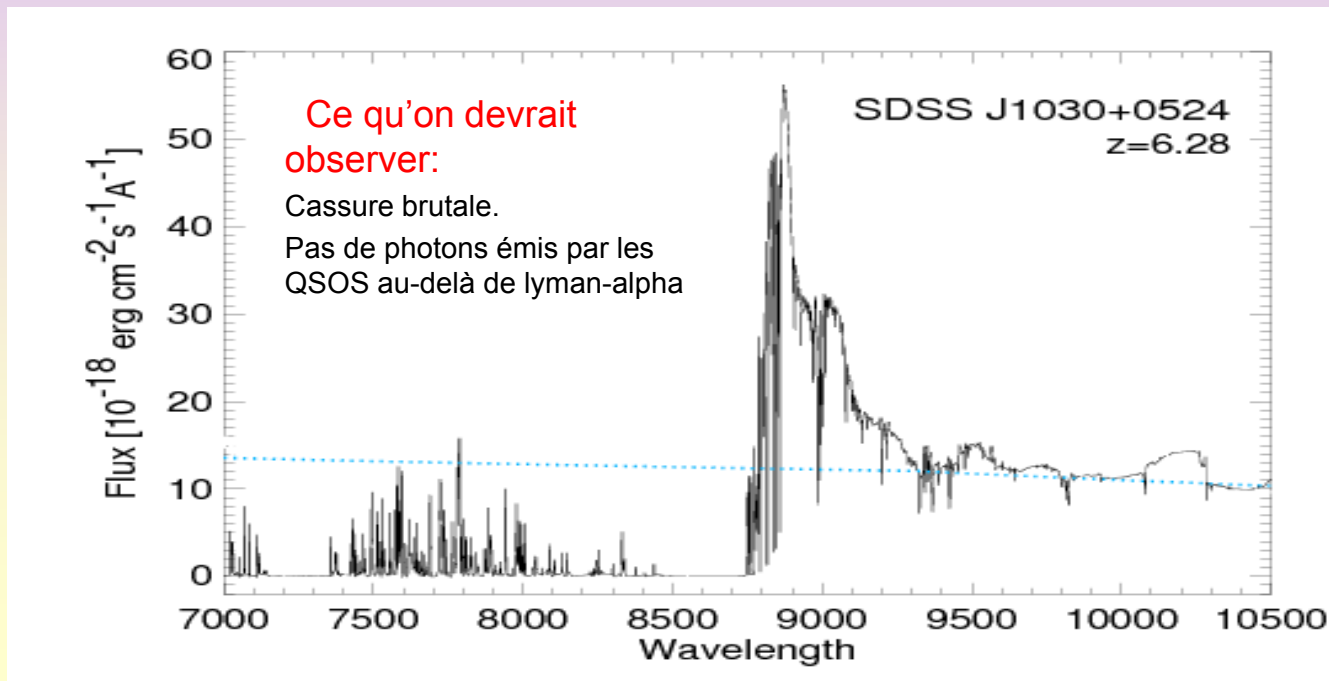
- Après la recombinaison, l'Univers
 - est neutre,
 - est composé principalement de gaz HI
- La profondeur optique du HI aux photon Ly-alpha est très élevée... c'est l'effet Gunn-Peterson

$$\begin{aligned}\tau_s &= \frac{\pi e^2 f_\alpha \lambda_\alpha n_{\text{HI}}(z)}{m_e c H(z)} \\ &\approx 6.45 \times 10^5 x_{\text{HI}} \left(\frac{\Omega_b h}{0.0315} \right) \left(\frac{\Omega_m}{0.3} \right)^{-1/2} \left(\frac{1+z}{10} \right)^{3/2}\end{aligned}$$

x_{HI} = fraction d'hydrogène neutre

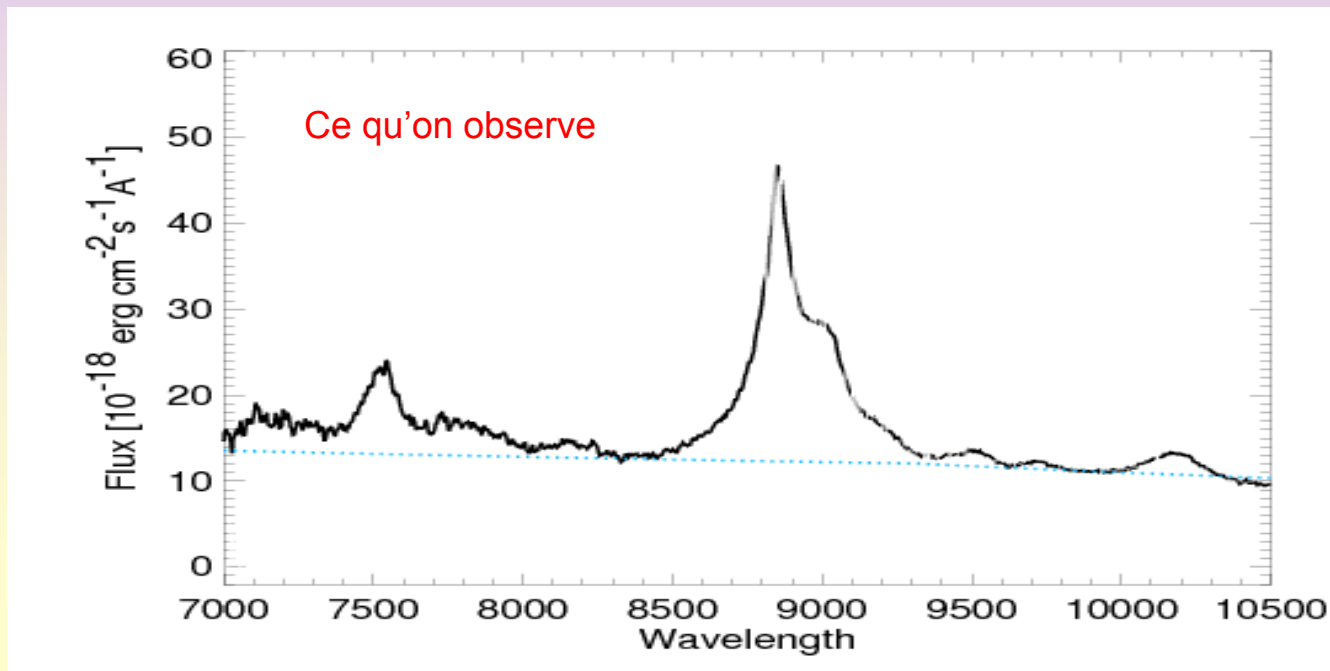
Effet Gunn Peterson: état du milieu intergalactique

... tous les photons Ly-alpha des QSOs devraient être absorbés par le gaz HI intergalactique



Le milieu intergalactique actuel est fortement ionisé

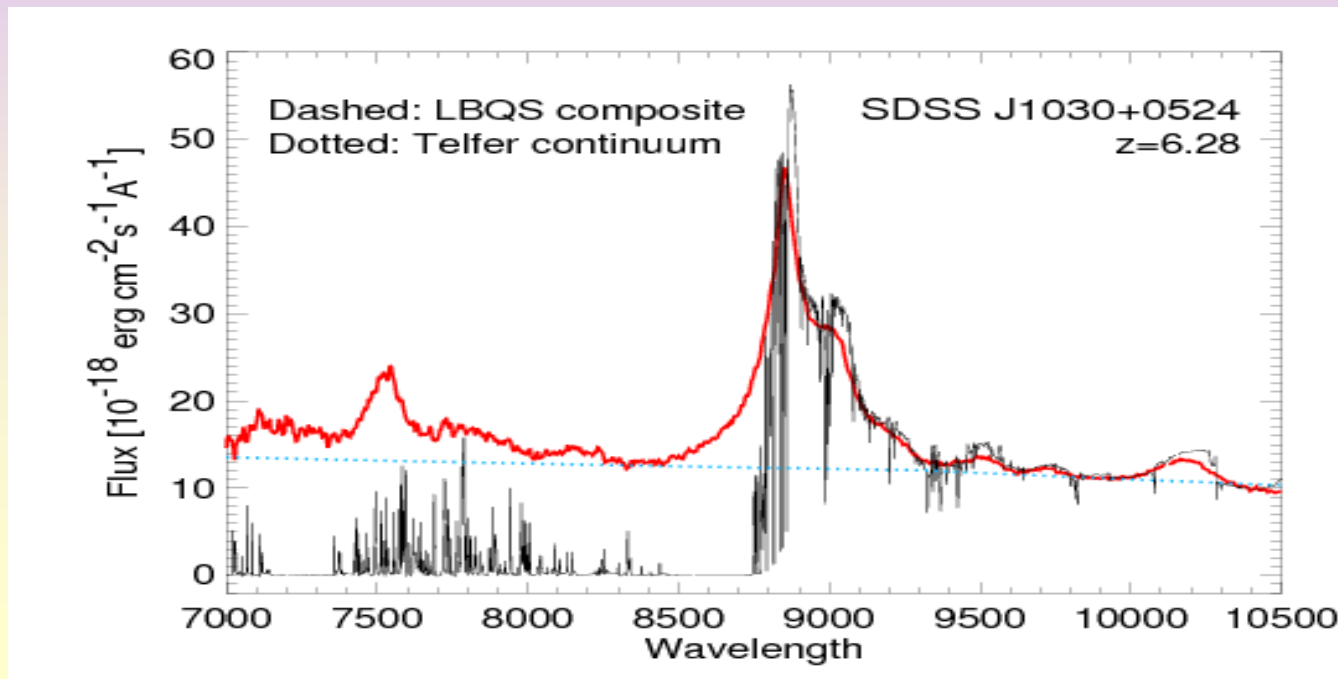
... tous les photons Ly-alpha des QSOs devraient être absorbés par le gaz HI intergalactique ... Mais ce n'est pas le cas



Le milieu intergalactique actuel est fortement ionisé

... Les photons Ly-alpha ne sont pas absorbés...

Donc la fraction d'hydrogène neutre est quasi-nulle...

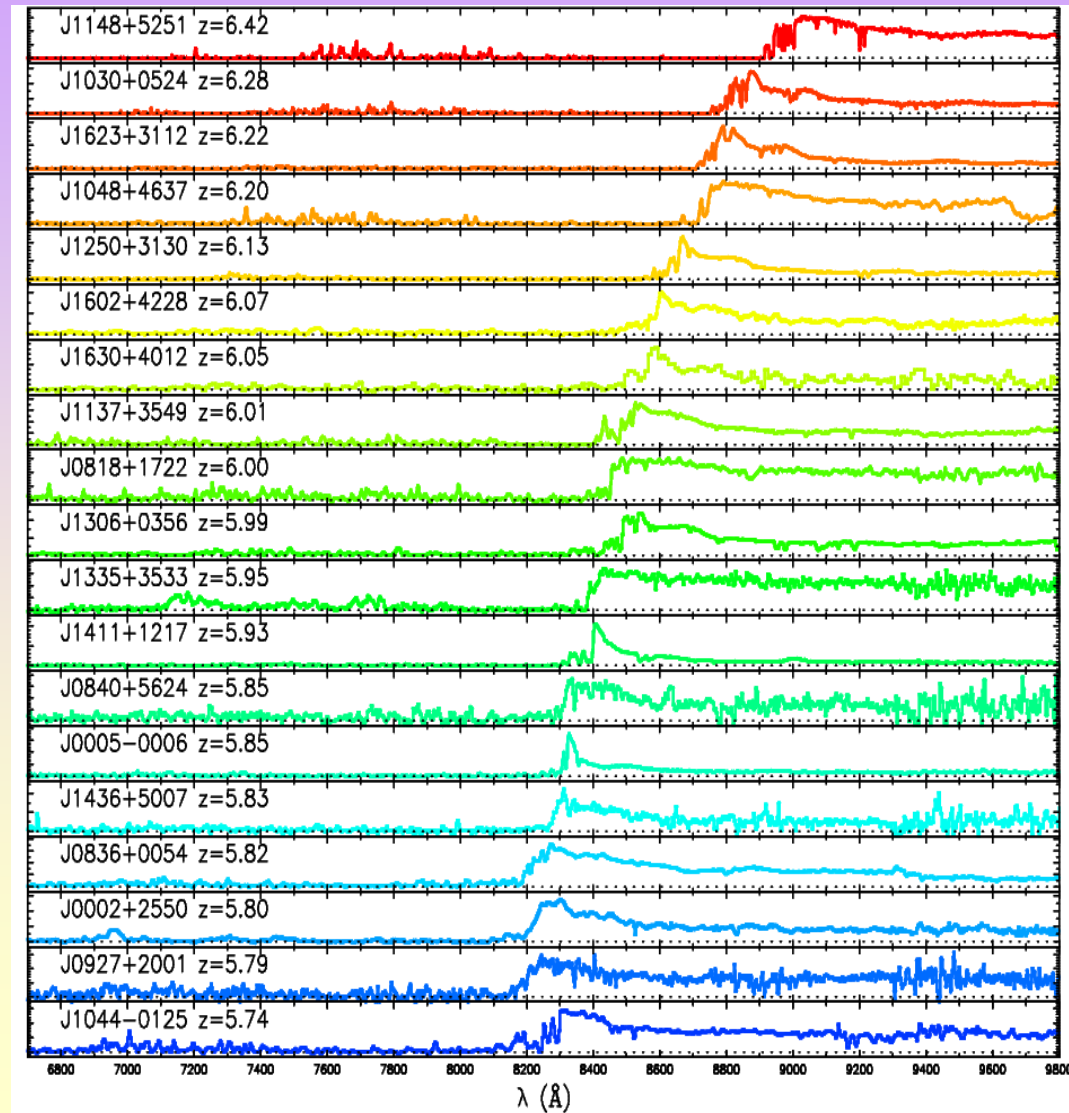


Quand le milieu s'est-il donc ré-ionisé?

Quand:

des premiers indices avec des quasars du SDSS dont le flux Ly-alpha semble être totalement absorbé

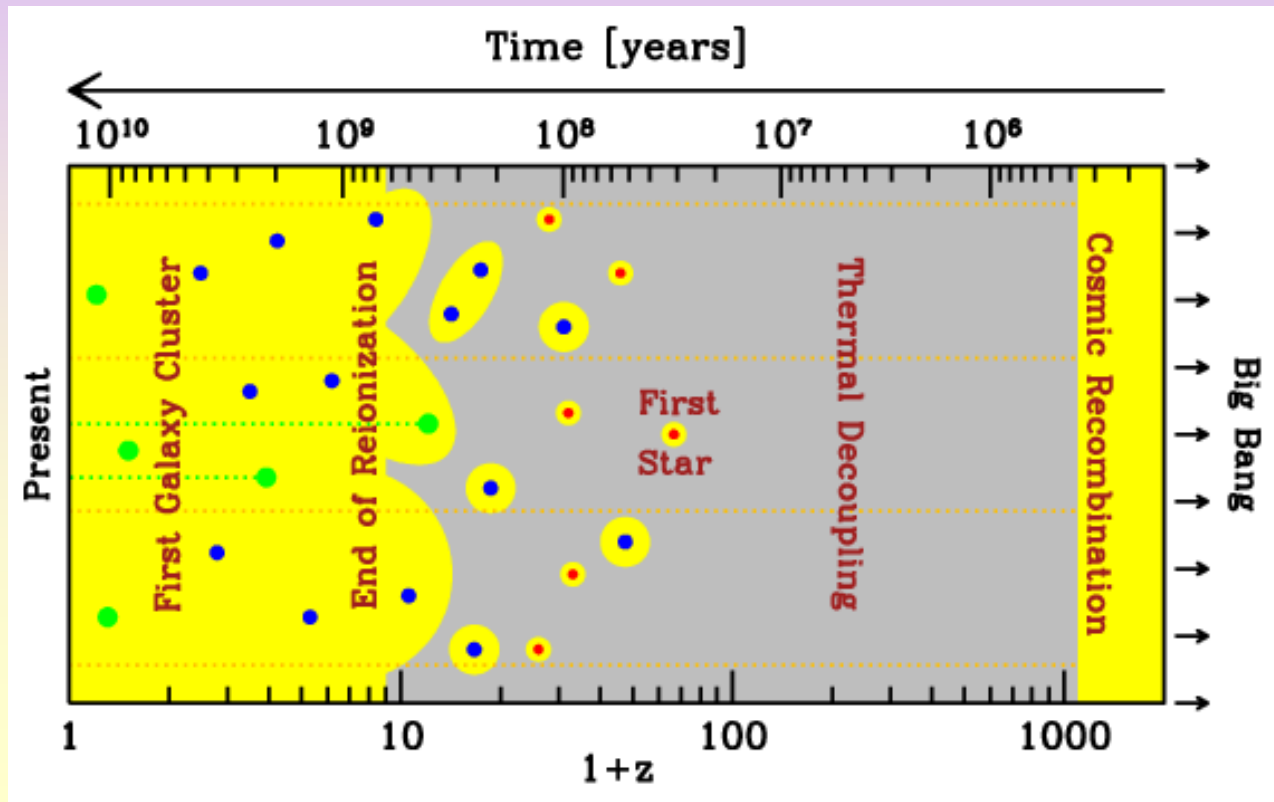
... le milieu serait neutre au-delà?
 $z \sim 6$



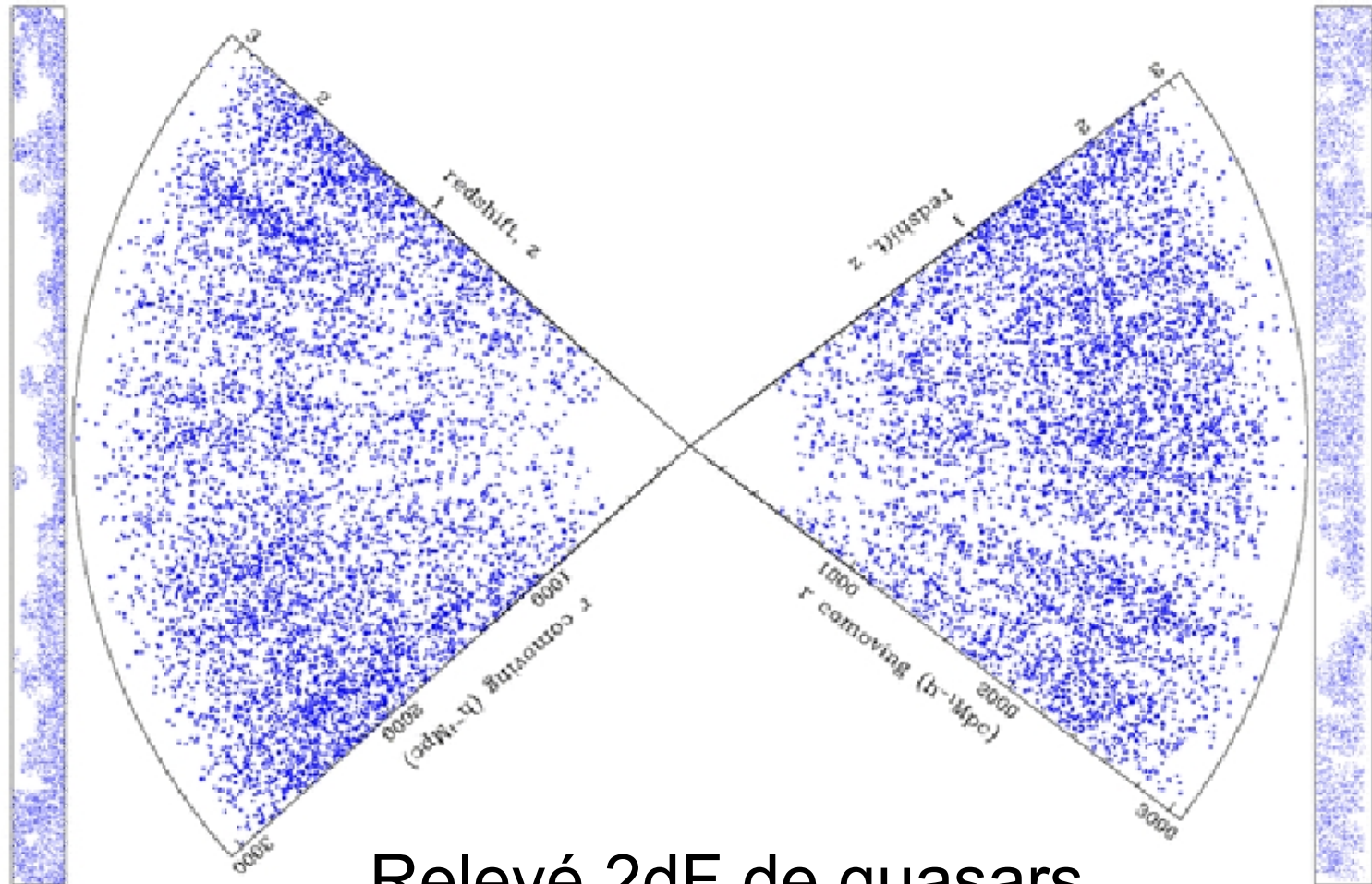
Pourquoi le milieu s'est ré-ionisé?

Pourquoi:

- énorme flux ionisants ... d'AGNs, des premières étoiles ? ...
- la ré-ionisation nous raconte la sortie de l'âge sombre et la naissance des premiers objets lumineux.

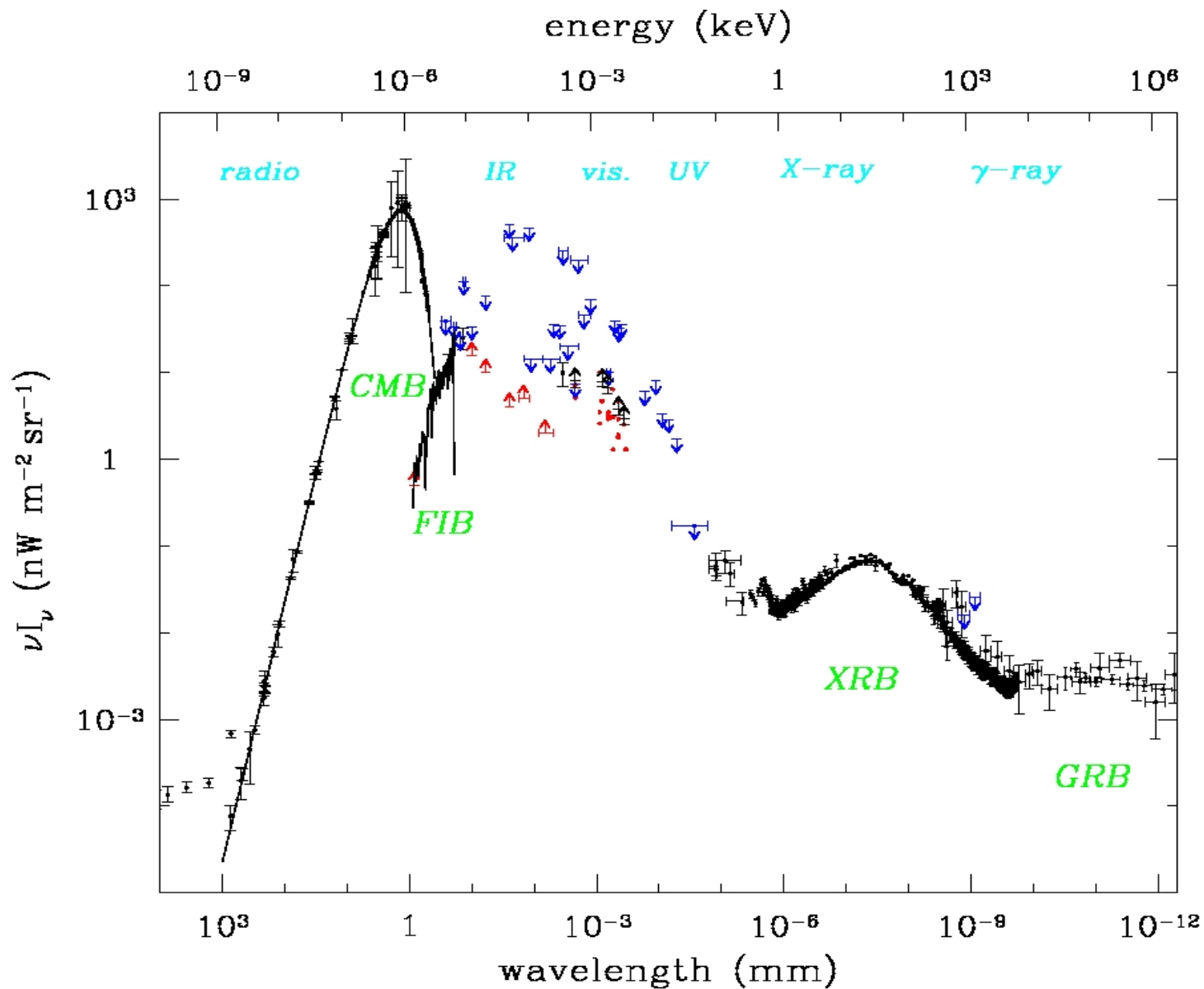


Quasars: distribution spatiale



Relevé 2dF de quasars

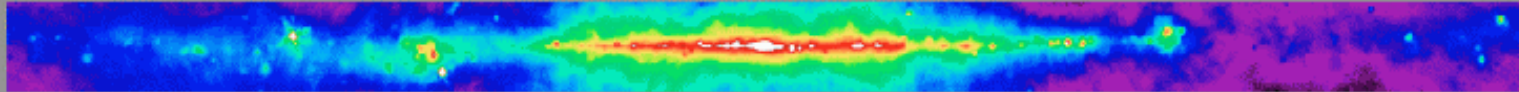
Les fonds de rayonnement



Rayonnement galactique

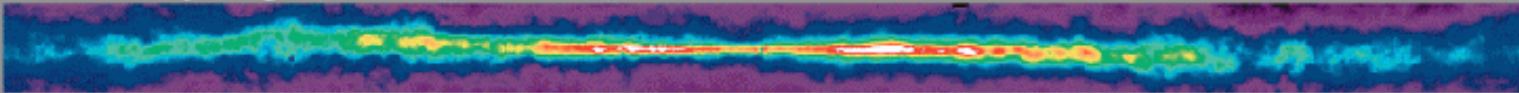
Radio Continuum

408 MHz Bonn, Jodrell Bank, & Parkes



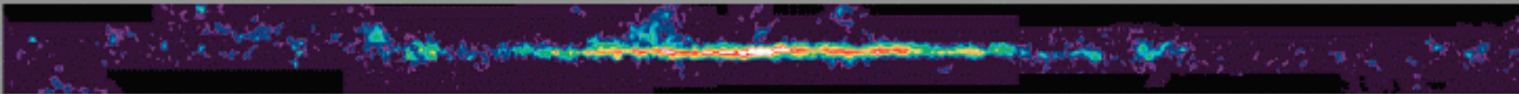
Atomic Hydrogen

21 cm Dickey-Lockman



Molecular Hydrogen

115 GHz Columbia-GISS



Infrared

12, 60, 100 μm IRAS



Near Infrared

1.25, 2.2, 3.5 μm COBE/DIRBE



Optical

Laustsen et al. Photomosaic



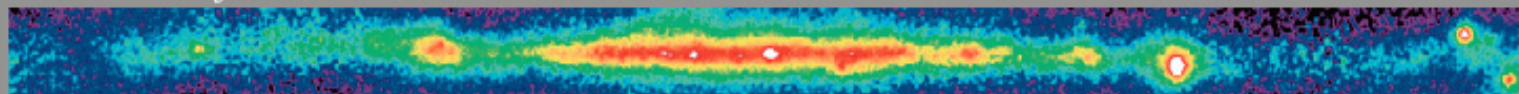
X-Ray

0.25, 0.75, 1.5 keV ROSAT/PSPC

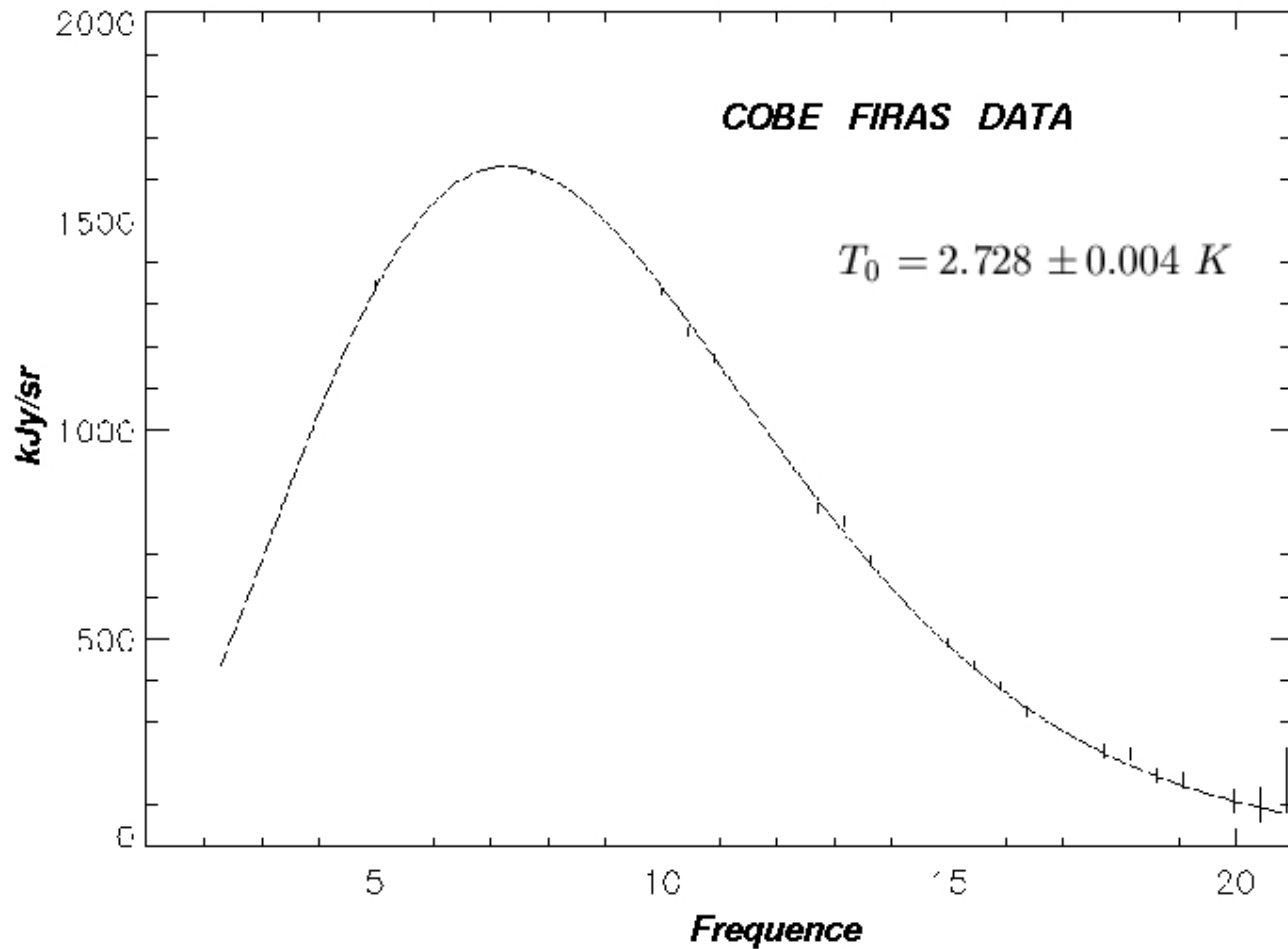


Gamma Ray

>100 MeV CGRO/EGRET



Le fond diffus cosmologique fossile



Le fond diffus cosmologique fossile

$$\rho_{CMB} = \rho_\gamma c^2 = c^2 \int_0^\infty \rho_\gamma(\nu) d\nu = c^2 \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T_\nu}\right) - 1} d\nu$$

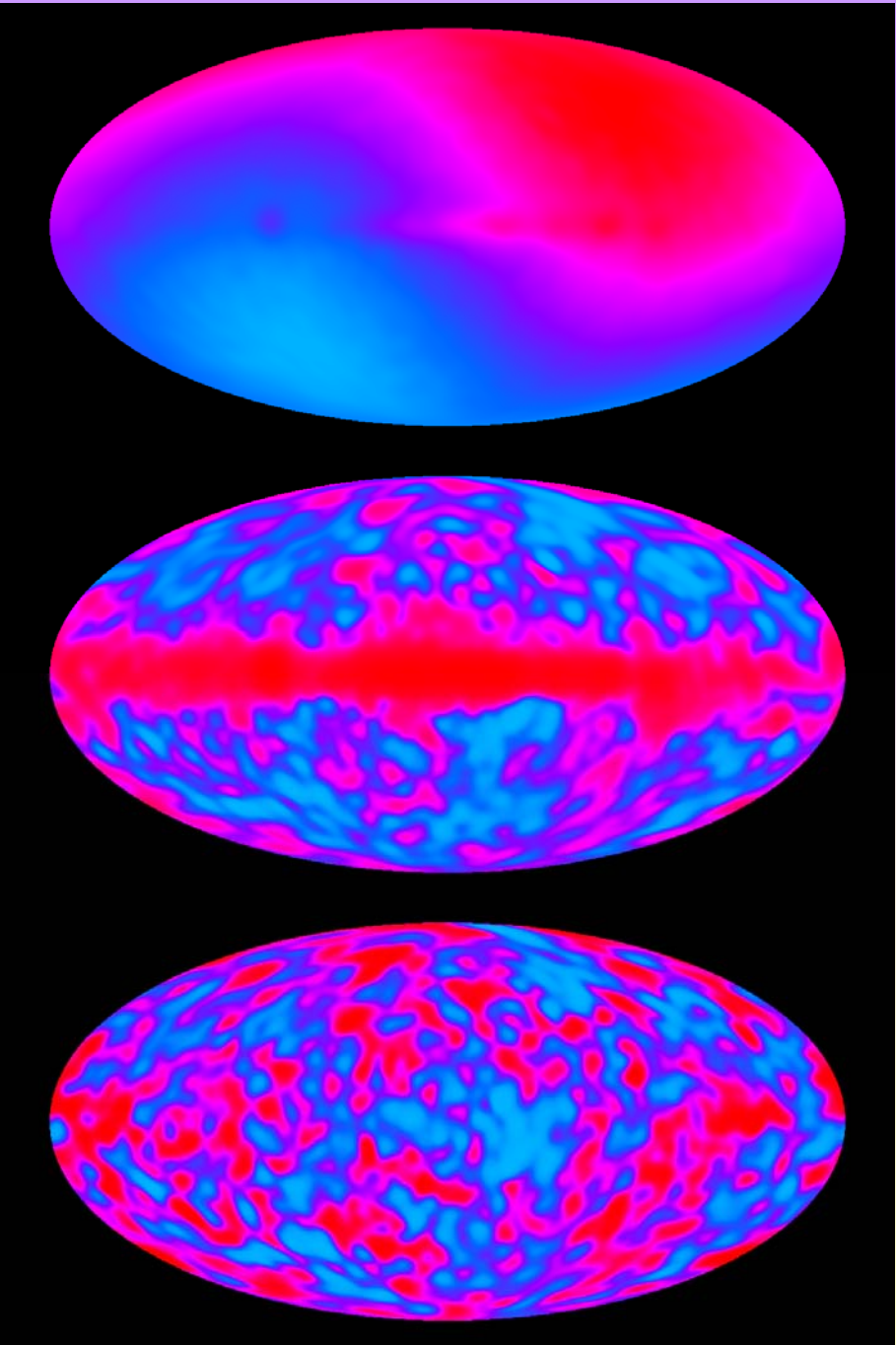
$$\rho_{CMB} = \frac{\sigma T_0^4}{c^2} = 4.8 \times 10^{-34} \text{ g.cm}^{-3},$$

où $\sigma = \pi^2 k_B^4 / (15c^3 \hbar^3) = 7.5 \times 10^{-15} \text{ erg.cm}^{-3}.\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan.

$$n_{CMB} = \int \frac{\rho_\gamma(\nu)}{h\nu} d\nu \approx 0.4 \frac{\sigma}{k_B} T^3 = 20.4 T^3$$

428 Photons cm^{-3}

Anisotropie du fond diffus cosmologique



Principe cosmologique :

l'univers est-il homogène et isotrope?

Homogénéité:

comptage des galaxies

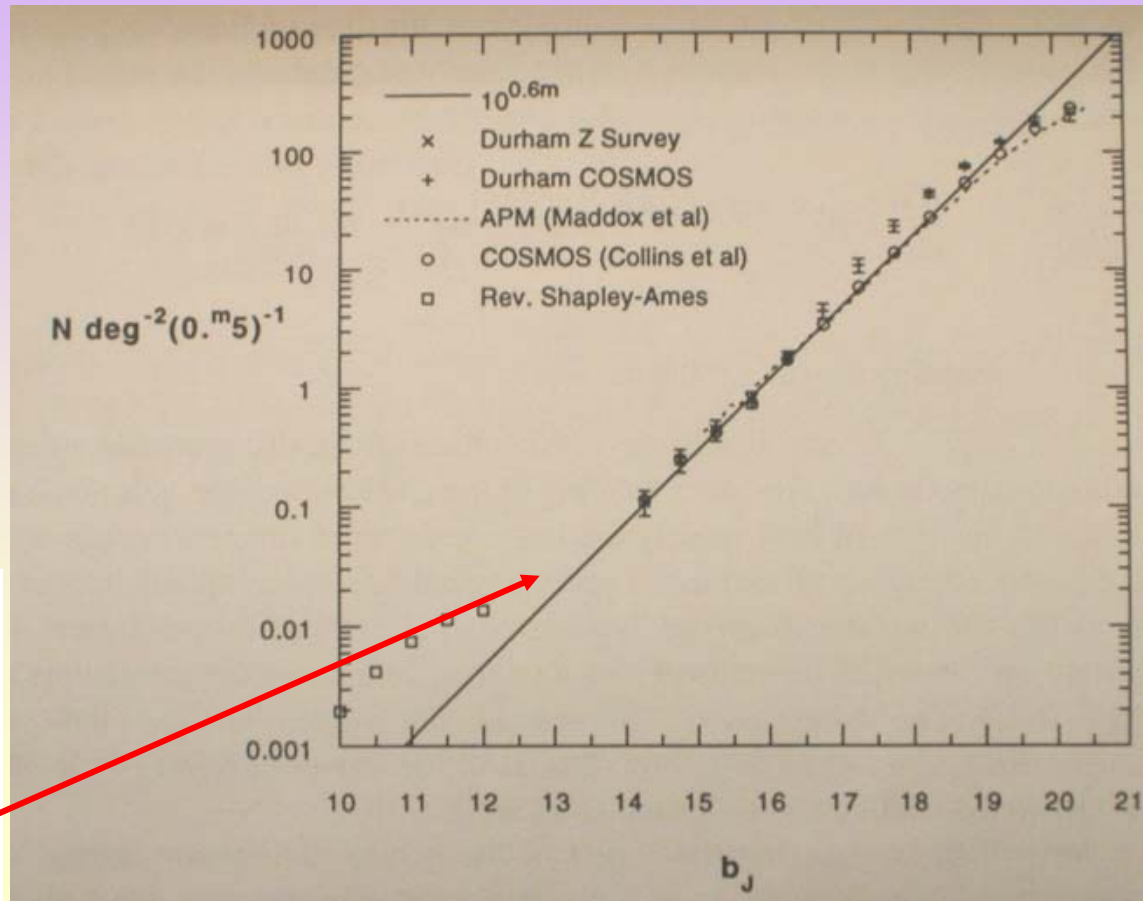
$$N(l) = \frac{4}{3}\pi n_0 d_L^3$$

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2}$$

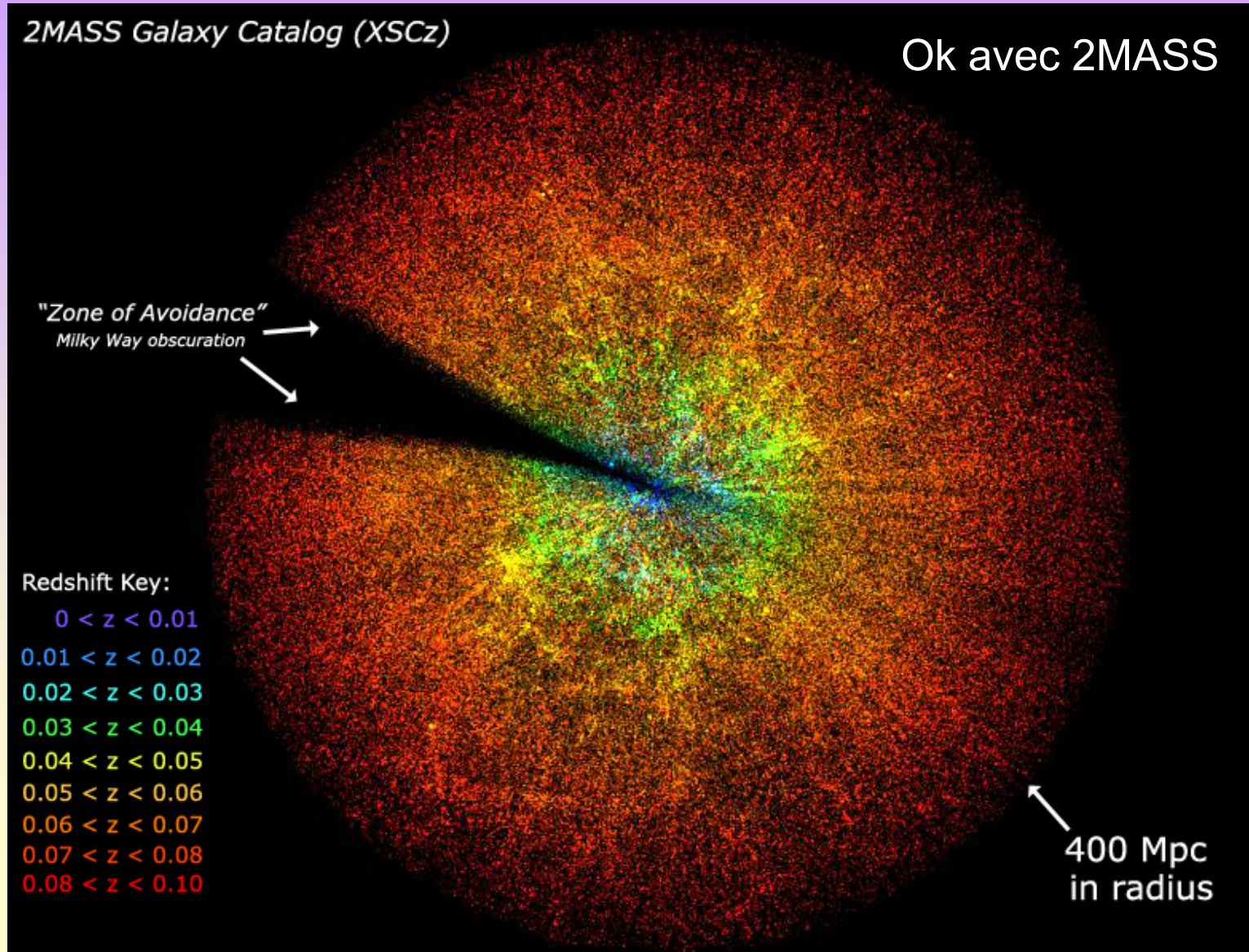
$$m = -2.5\log l + K$$

$$\log N(l) = 0.6m + K'$$

$$\alpha = \frac{d \log N(l)}{dm} = 0.6$$

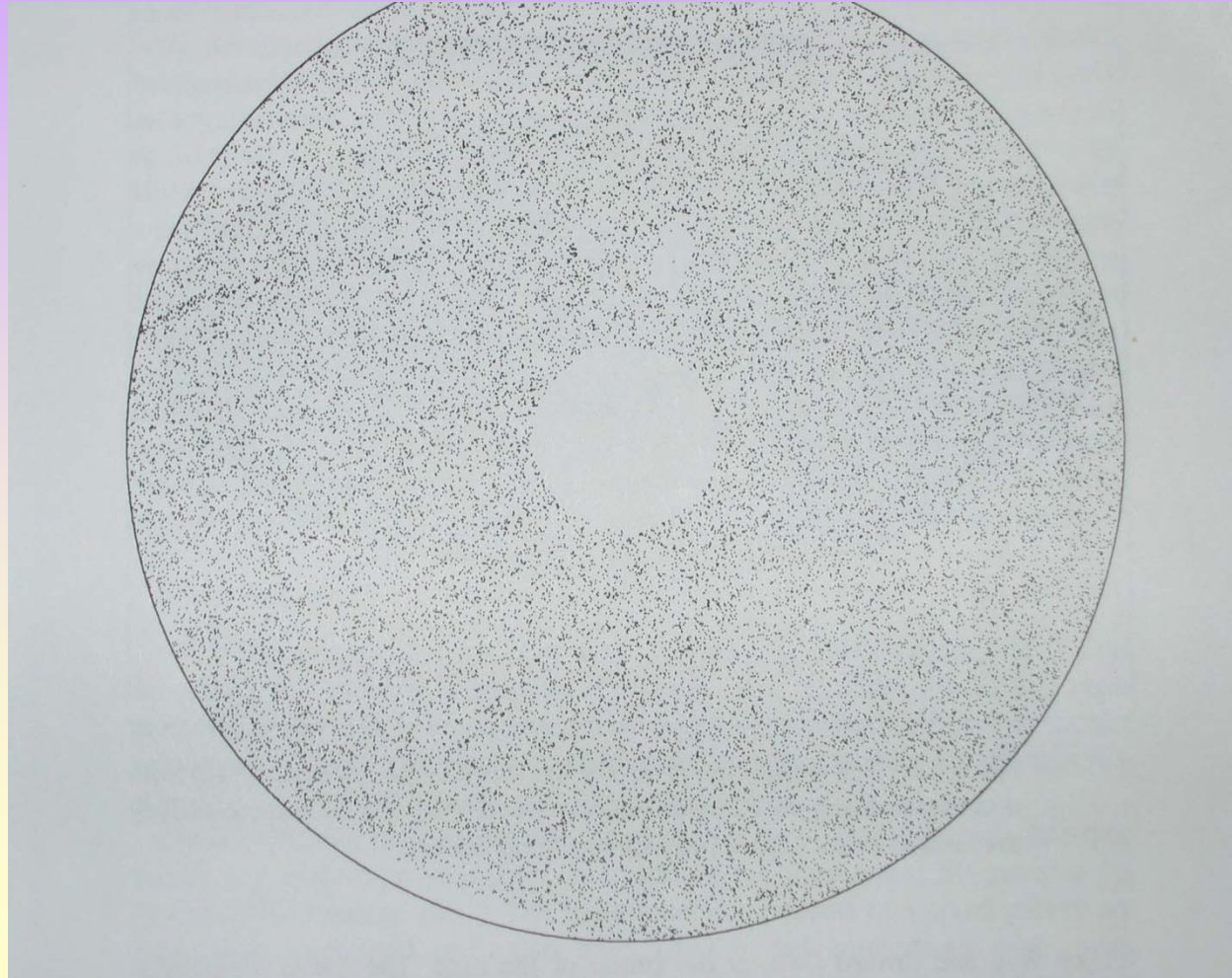


Principe cosmologique: distribution des galaxies isotrope



Principe cosmologique

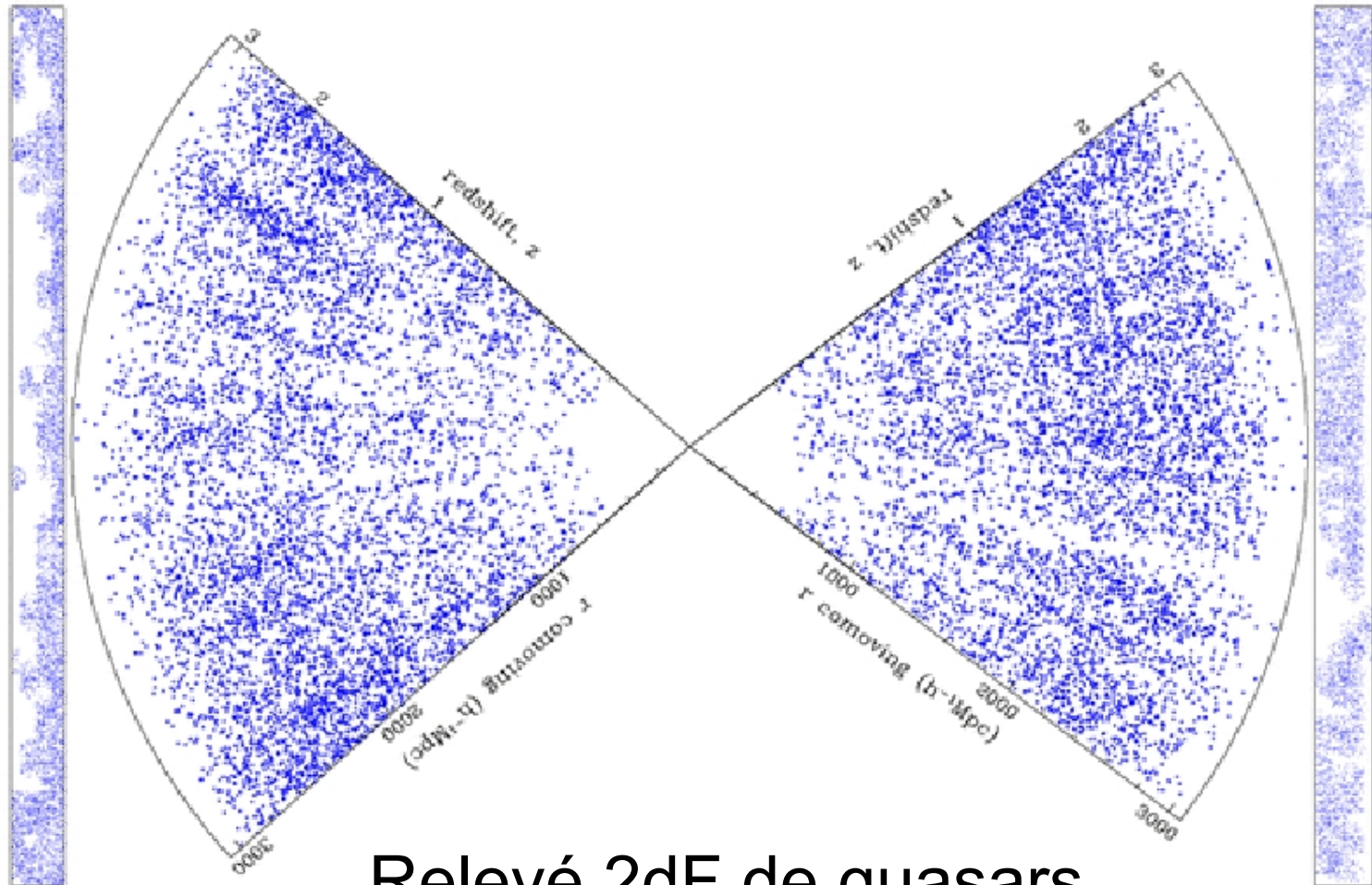
Distribution des radiosources homogène et isotrope



Isotropie:
radiosources

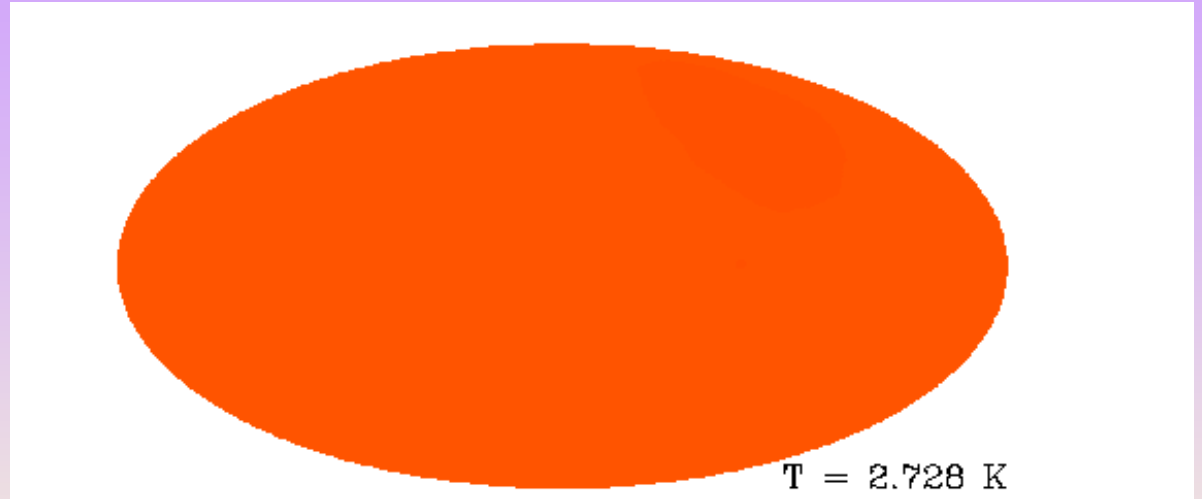
Quasars:

une distribution homogène et isotrope



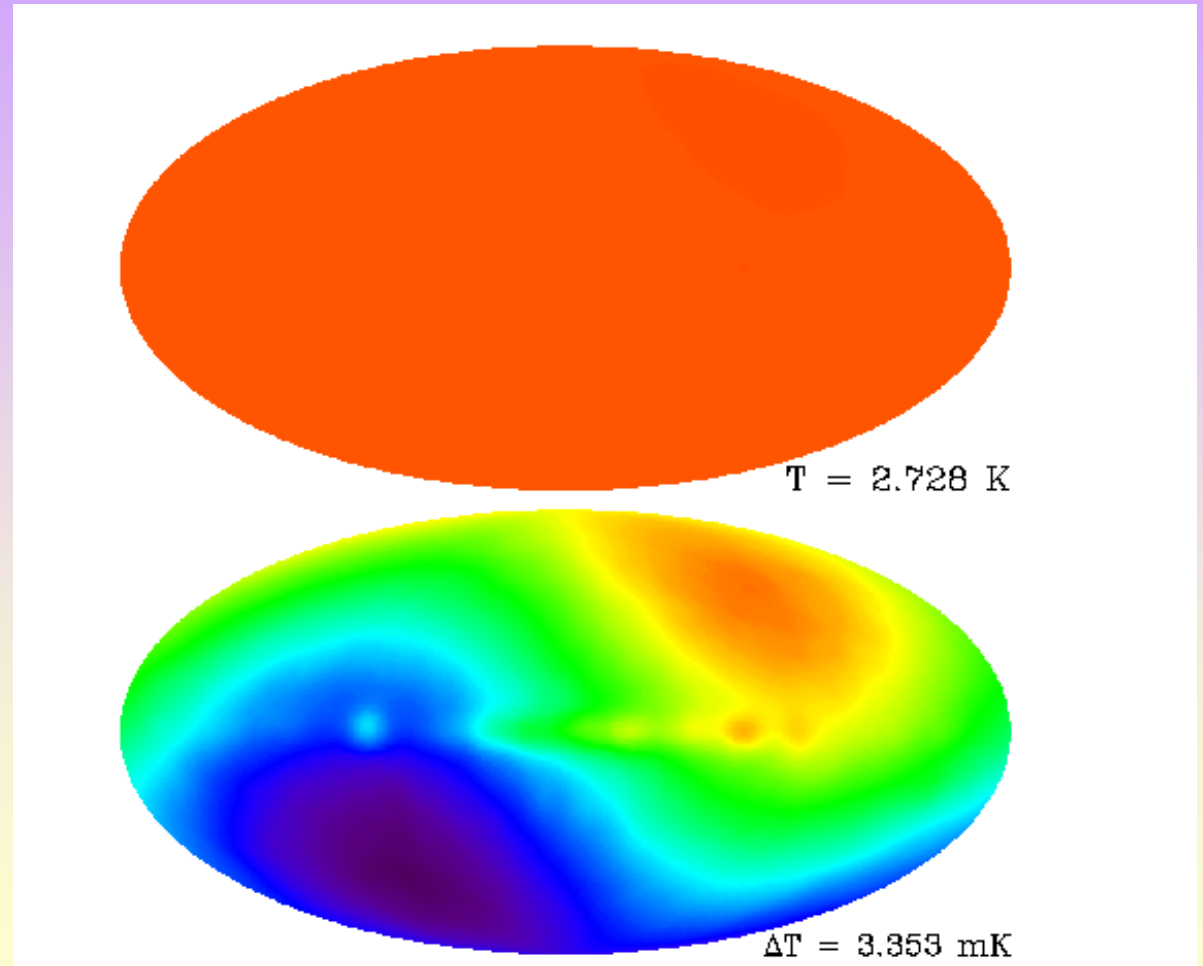
Relevé 2dF de quasars

Principe cosmologique: un fond isotrope



Isotropie:
rayonnement
cosmologique

Principe cosmologique: un fond isotrope?

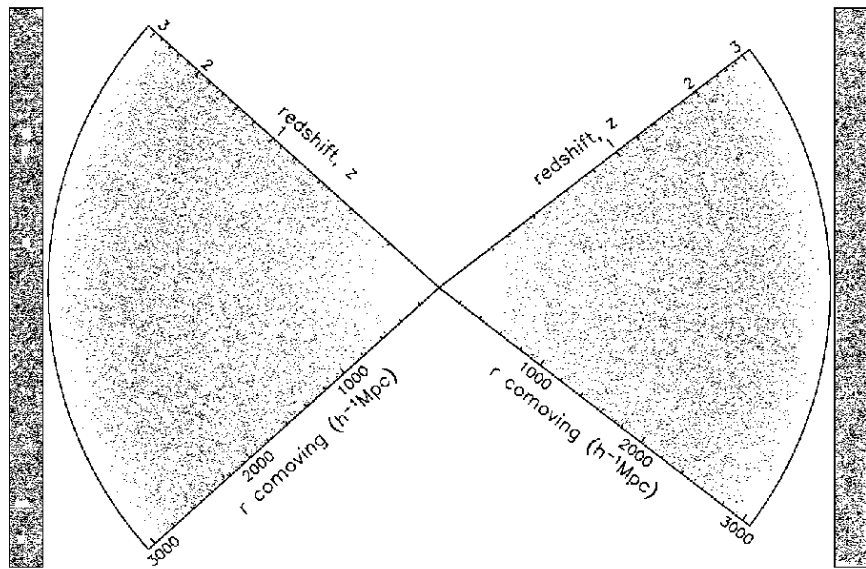
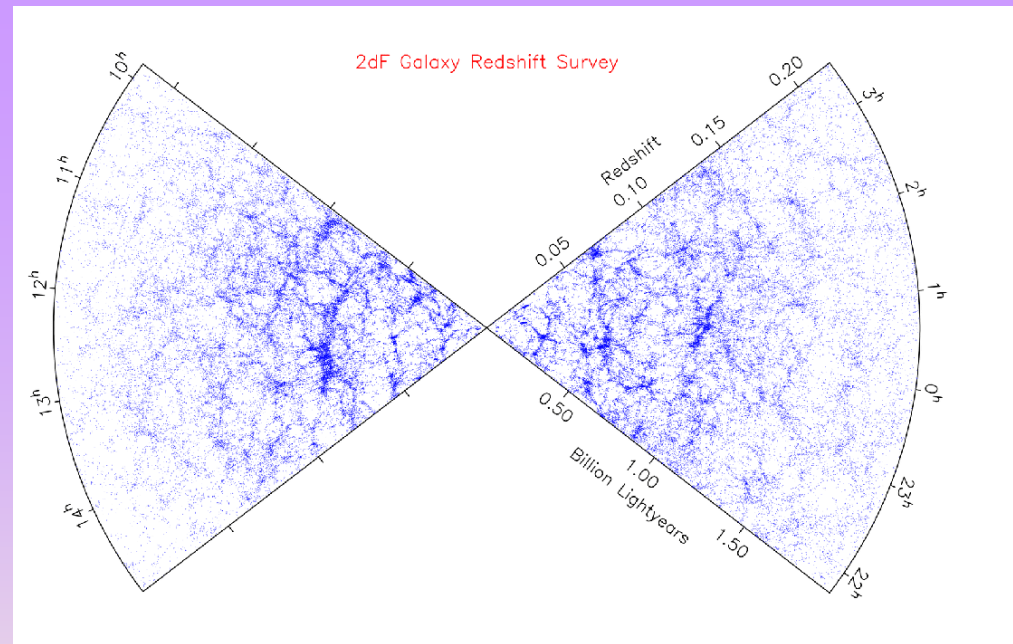


Isotropie:
rayonnement
cosmologique

Fluctuations
 $(\Delta T/T) < 10^{-3}$

Composante dipolaire

Principe cosmologique



- Isotropie: ok
- Homogénéité: difficile

Principe cosmologique

L'univers est homogène et isotrope et conserve cette propriété au cours du temps

L'intervalle d'espace-temps ds^2 peut s'écrire:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0\mu} dx^\mu dt - \sigma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- **L'isotropie de l'espace conservée au cours du temps implique que les $g_{0\mu}=0$** , sinon un observateur pourrait identifier des phénomènes ayant une direction privilégiée, même s'il était au repos dans un hyper-espace $t=Cte$.
- Donc: **Il existe un temps universel** : il est possible de choisir un système de coordonnées temporel perpendiculaire aux coordonnées spatiales

Dans ce cas, on a : $ds^2 = dt^2 - dl^2$

- **L'Univers est isotrope**, implique la symétrie sphérique et on peut donc séparer la partie radiale, dr^2 , de la partie angulaire $r^2 d\Omega^2$

$$dl^2 = R^2 \cdot [\lambda^2(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

Principe cosmologique:

ingrédients pour déduire la métrique d'un univers homogène et isotrope

1. Métrique non-statique, homogène et isotrope d'un fluide parfait

$$ds^2 = c^2 dw^2 + 2cg_{0\alpha} dw dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

2. Isotropie: symétrie sphérique

$$ds^2 = c^2 dw^2 - D(r, w) dr^2 - c E(r, w) dr dw - F(r, w) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

3. Equation des géodésiques d'une particule

$$\frac{du_j}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} u^l u^k$$

Pour une particule au repos dans le repère co-mobile:

$$u^0=1, u^\alpha = 0 \quad (\alpha= 1,2,3)$$

→ $ds^2 = c^2 dt^2 - A(r, t) dr^2 - B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

$$g_{11} = A(r, t) = D[r, w(r, t)] + \frac{1}{2} [E(r)]^2$$

$$g_{22} = B(r, t) = F[r, w(r, t)]$$

Principe cosmologique: conséquence pour la métrique d'un univers homogène et isotrope

4. Condition d'homogénéité:

- Transformation de coordonnées:

$$z^\alpha = x^\alpha + \epsilon^\alpha(r, \theta, \phi) \quad , \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

- + Loi de transformation du tenseur métrique
- + développement pour des petites translations
- + condition d'homogénéité:

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} \bar{g}_{\nu\beta}(z^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\nu\alpha}(z^k)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\alpha} g_{\nu\beta}(x^k) + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\beta} g_{\nu\alpha}(x^k) = 0$$

Principe cosmologique: conséquence pour la métrique d'un univers homogène et isotrope

4. Condition d'homogénéité:

- + Loi de transformation du tenseur métrique
- + développement pour des petites translations
- + condition d'homogénéité:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) = -\frac{2}{\epsilon^1} \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r}$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\ln B) = -\frac{2}{\epsilon^1} \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \theta}$$

→

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) a(r) dr^2 - R^2(t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Il reste à trouver $a(r)$

Principe cosmologique: conséquence pour la métrique d'un univers homogène et isotrope

4. Condition d'homogénéité:

- + Loi de transformation du tenseur métrique
- + développement pour des petites translations
- + condition d'homogénéité:

$$\frac{\partial A}{\partial r} \epsilon^1 + 2 \frac{\partial \epsilon^1}{\partial r} A = 0$$

$$\epsilon^1(r, \theta, \phi) = e(\theta, \phi) a^{-1/2}(r)$$

→

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = \frac{r^2}{a^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r a^{1/2}} \right) = C$$

Il reste à trouver C

Principe cosmologique: conséquence pour la métrique d'un univers homogène et isotrope

5. Equation valide pour n'importe quel déplacement:

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = \frac{r^2}{a^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ra^{1/2}} \right) = C$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = C e$$

Donc en particulier pour un déplacement transverse

$$e(\theta, \Phi) = \cos(\theta)$$

$$\rightarrow C = -1$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

Principe cosmologique

- Donc, *un univers homogène et isotrope est un univers à courbure constante dont la métrique s'écrit:*

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \cdot \left[\left(1 / (1-kr^2) \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

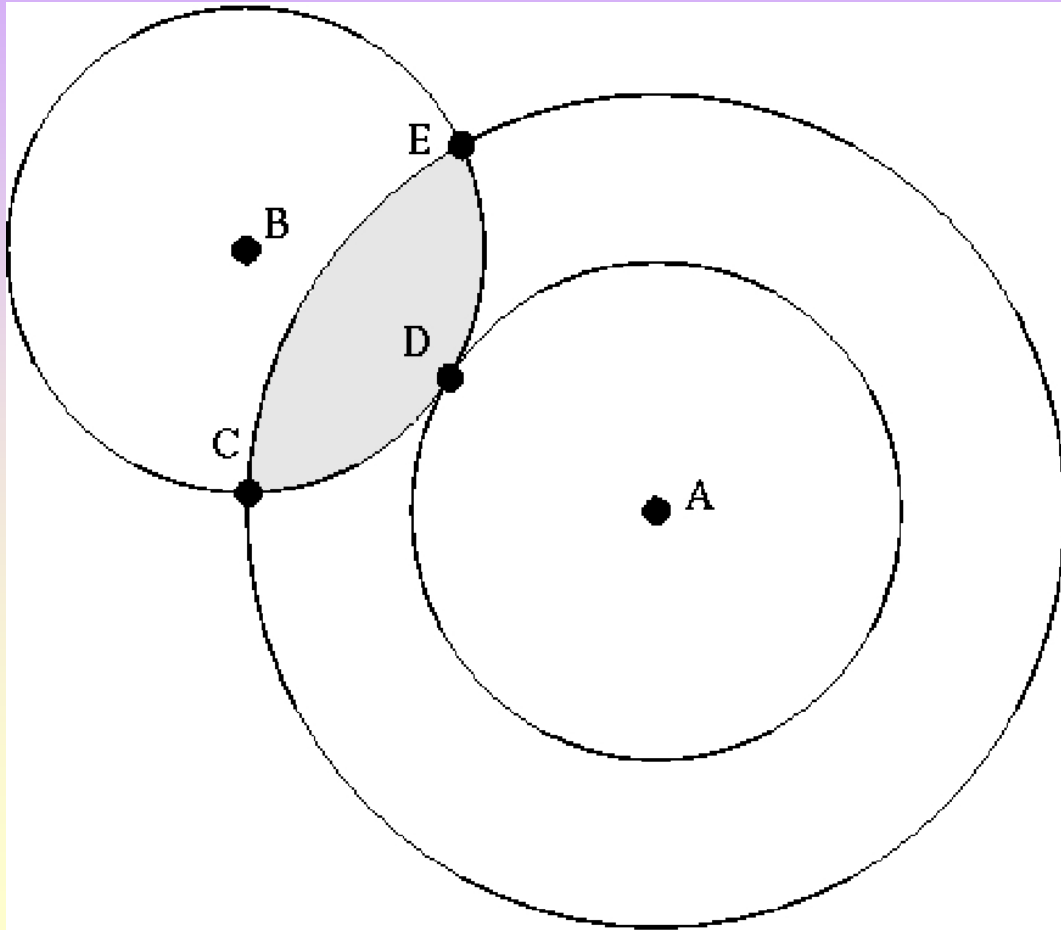
où $k=0,+1,-1$

Le préfacteur $R^2(t)$ est un facteur d'échelle global de la métrique spatiale qui en général peut dépendre du temps.

- Cette métrique s'appelle la ***métrique de Friedmann-Roberston-Walker (FRW)***

Principe cosmologique

- *Un univers partout isotrope est un aussi homogène.*



- Isotropie: pour **B**; *C*, *D* et *E* sont équivalents

- Partout isotrope: Pour **A**; *C* et *E* sont équivalents

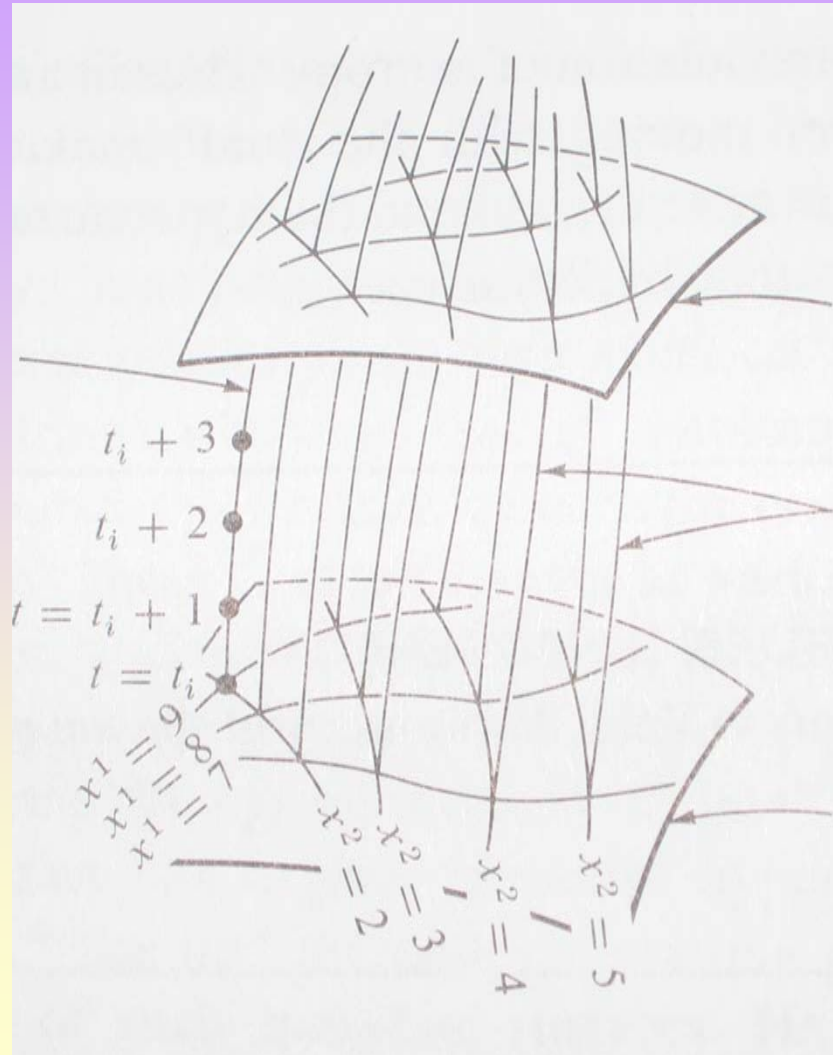
Donc pour **A**, *D* doit aussi être équivalent à *C* et *E*.

- L'univers est donc nécessairement homogène

Principe cosmologique

Système de coordonnées synchrone:

Les coordonnées spatiales se déplacent avec le fluide et la coordonnée temporelle est le temps propre le long des lignes d'univers du fluide



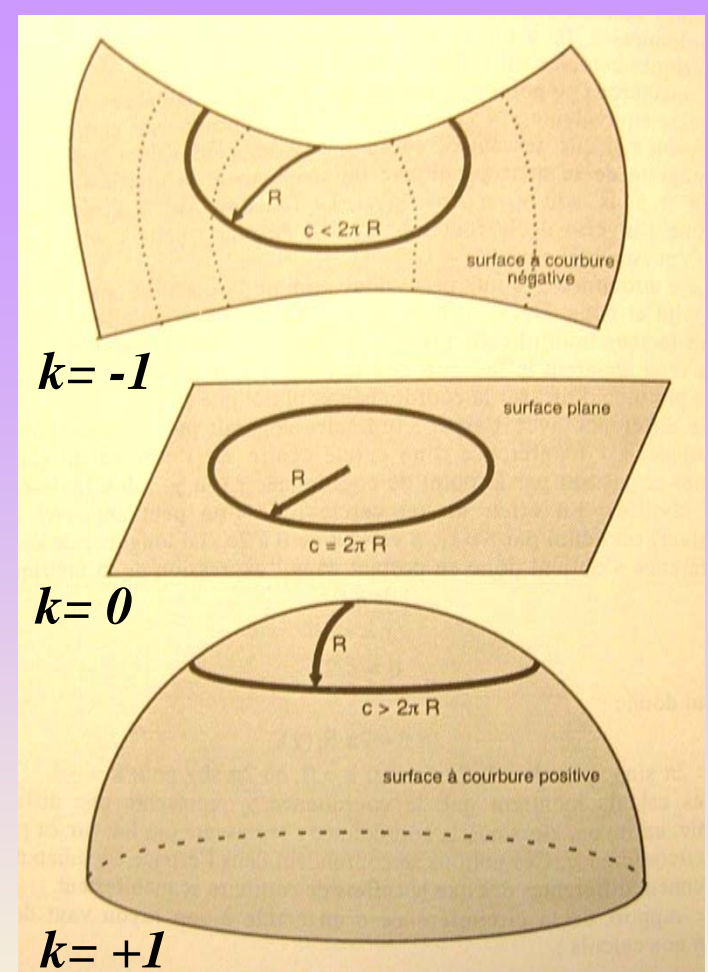
Hypersurface $t=t_i+5$

Lignes d'univers de particules du fluide liées à la grille d'espace (ie: comobiles)

Propriétés de la métrique FRW

- univers à courbure constante,
- 3 courbures possibles

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$



$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 \quad dl^2 = R(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \\ k = 1 \quad dl^2 = R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = R(t)^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2) \\ k = -1 \quad dl^2 = R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = R(t)^2 (d\chi^2 + \text{sh}^2\chi d\Omega^2) \end{array} \right.$$

Propriétés de la métrique FRW: volumes d'univers

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

$$V = R(t)^3 \int_0^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{k=0} = \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \\ V_{k=1} = \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \left[\frac{3}{2} \frac{\arcsin(r)}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{(1 - r^2)^{1/2}}{r^2} \right] \\ V_{k=-1} = \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \left[\frac{3}{2} \frac{(1 + r^2)^{1/2}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{argsh}(r)}{r^3} \right] \end{array} \right.$$

Conséquences du Principe Cosmologique: loi de Hubble

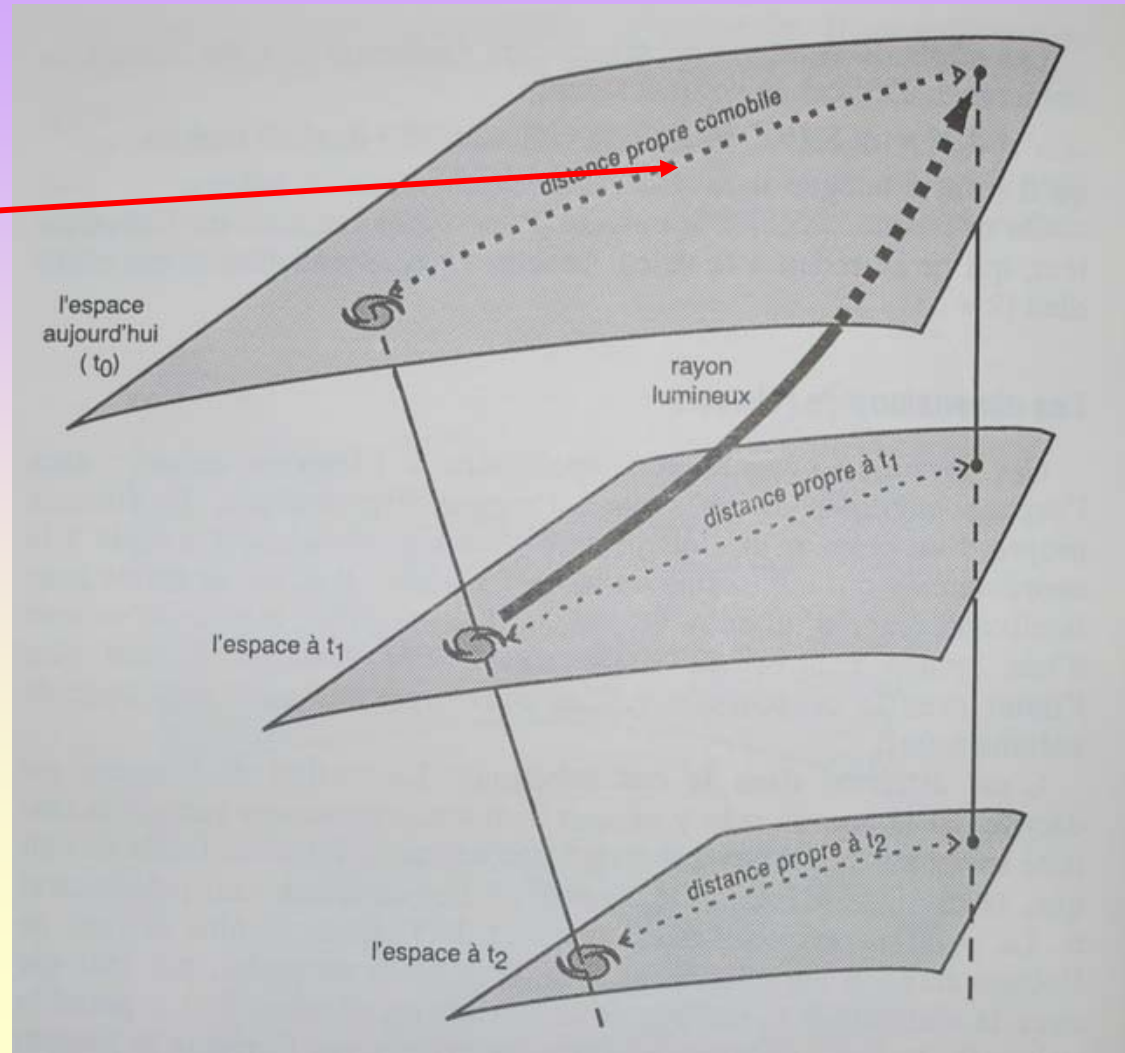
Distance propre:

$$d_{pr} = c dt$$

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{R(t) dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t) f(r)$$

$f(r) =$

- $\text{Arcsin}(r)$ si $k=+1$
- r si $k=0$
- $\text{Argsh}(r)$ si $k=-1$



Conséquences du Principe Cosmologique: loi de Hubble

Distance propre:

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{R(t) dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t) f(r)$$

Distances propres aux
temps t et t_0

$$d_{pr}(t) = R(t) f(r) \quad ; \quad d_{pr}(t_0) = R(t_0) f(r)$$



$$d_{pr}(t_0) = \frac{R(t_0)}{R(t)} d_{pr}(t)$$

$$v_r = \frac{dd_{pr}(t)}{dt} = \dot{R}(t) f(r) = \dot{R}(t) \frac{d_{pr}}{R(t)} = H(t) d_{pr}$$

$$\dot{R}(t) / R(t) = H(t)$$

La loi de Hubble est une conséquence directe du Principe Cosmologique

Conséquences du Principe Cosmologique: redshift

• Décalage spectral d'une onde observée au temps t_o et émise au temps t_e

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$$

• Les photons suivent des géodésiques $ds^2=0$, donc:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

• Donc pour deux maxima consécutifs de l'onde on a:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{cdt}{R(t)}$$

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{R(t)} = \Phi(t_o+\delta t_o) - \Phi(t_e+\delta t_e) - \Phi(t_o) + \Phi(t_e) = \Phi'(t_o)\delta t_o - \Phi'(t_e)\delta t_e = 0$$

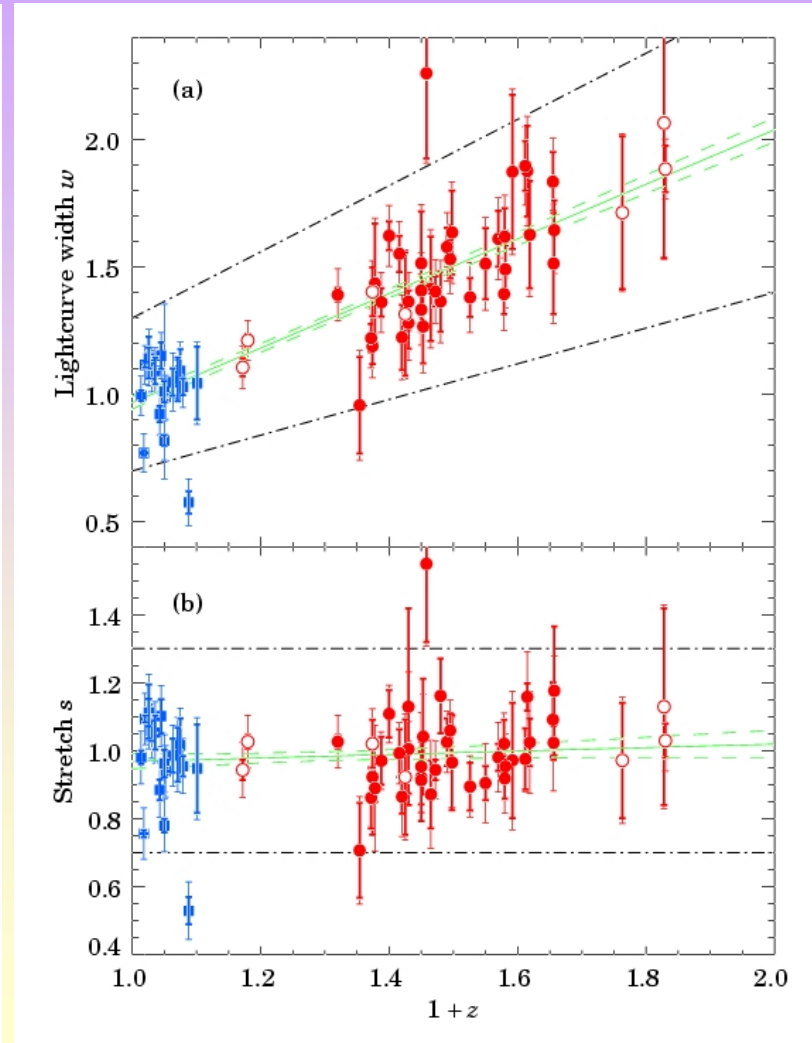
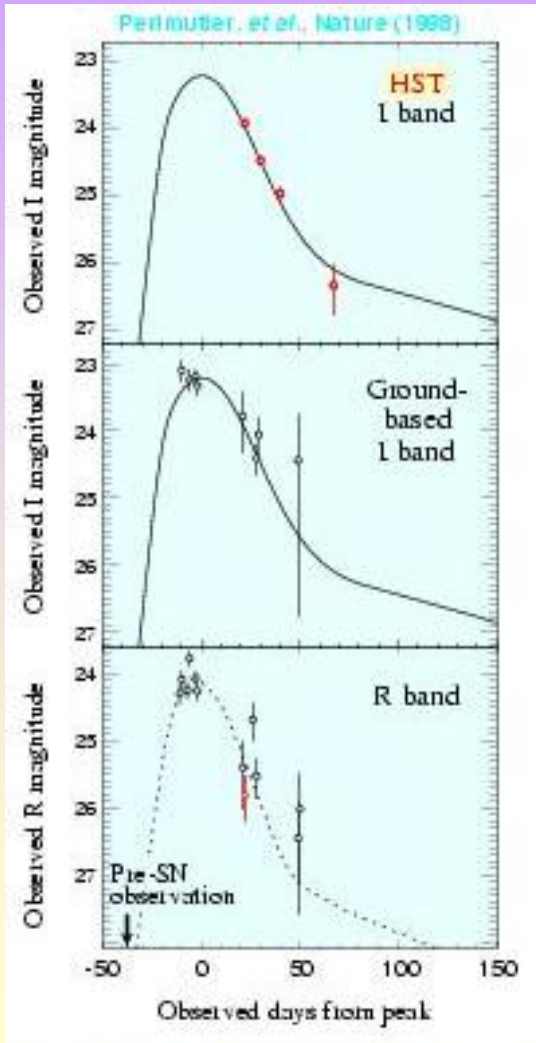
$$\frac{\delta t_e}{R(t_e)} - \frac{\delta t_o}{R(t_o)} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nu_e R(t_e) = \nu_o R(t_o) \quad \longrightarrow \quad \frac{R(t)}{\lambda_e} = \frac{R(t_o)}{\lambda_o}$$

Dilatation du temps

$$\Delta t_o / \Delta t_e = 1 + z$$

$$1 + z = \frac{R(t_o)}{R(t)}$$

Conséquences du Principe Cosmologique: Expansion/redshift/dilatation du temps



$$1+z = \frac{R(t_0)}{R(t)}$$



$$\Delta t_o / \Delta t_e = 1+z$$

Cosmographie: paramètre de décélération

Développement du facteur d'expansion:

$$R(t) = R(t_0) + (t - t_0) \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)_{t=t_0} + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \left(\frac{d^2R(t)}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \dots$$

En écrivant: $\left(\frac{dR(t)}{dt} \right)_{t=t_0} = R_0 \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)_{t=t_0}$

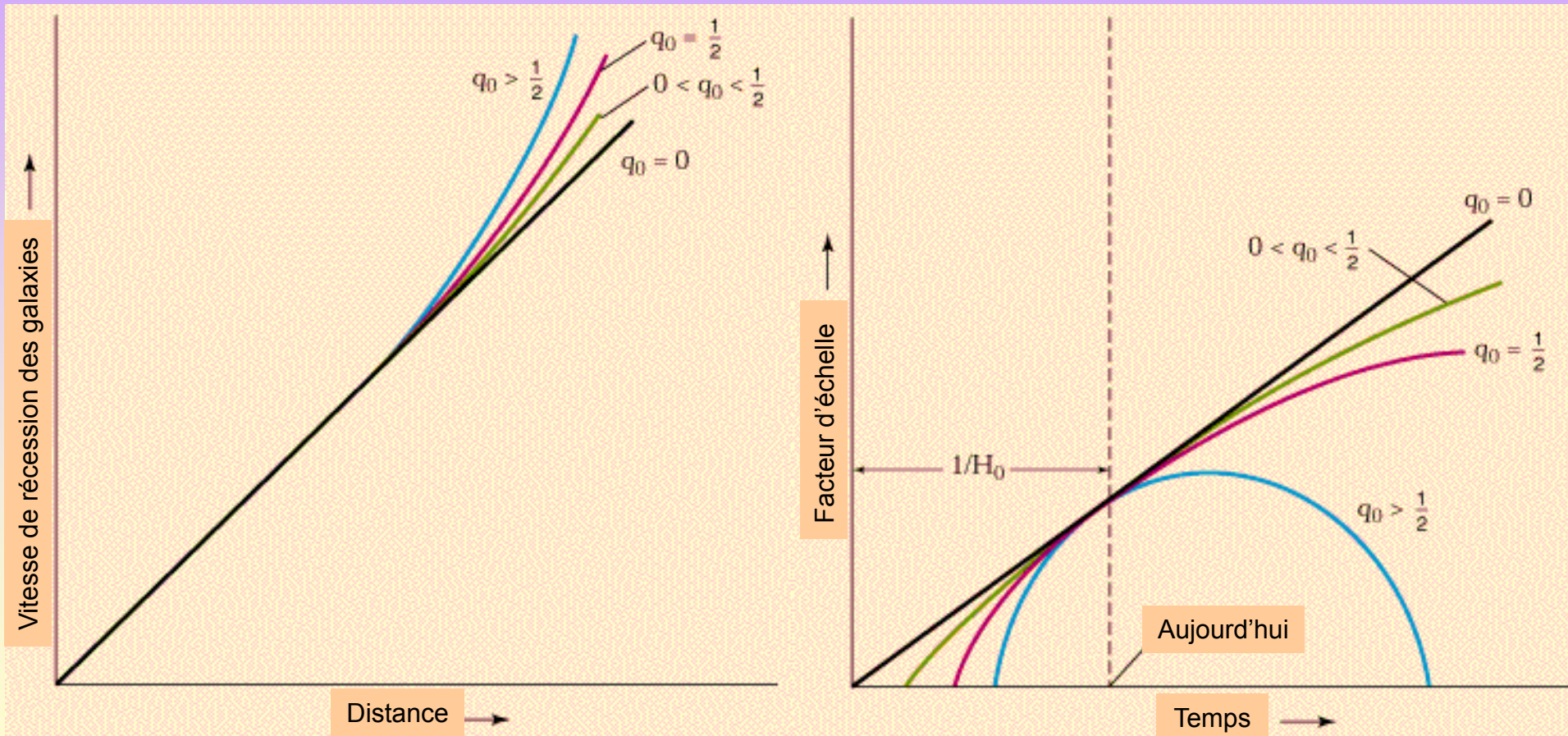
où $R_0 = R(t_0)$. Avec $H_0 = H(t_0)$, on obtient:

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = R_0 \left(\frac{d \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)}{dt} \right) = R_0 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} \left(\frac{R_0}{\dot{R}(t_0)} \right)^2 = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t) R_0}{\dot{R}(t_0)^2}$$

Et donc: $R(t) = R_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right]$

Avec $q_0 = - \frac{\ddot{R}(t_0) R_0}{\dot{R}(t_0)^2} = \text{paramètre de décélération}$

Signification de H_0 et q_0



Cosmographie: mesure du temps écoulé

Sachant que:

$$R(t) = R_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}H_0^2 q_0(t - t_0)^2 + \dots \right]$$

On a donc:

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{1}{\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}H_0^2 q_0(t - t_0)^2 + \dots \right]}$$

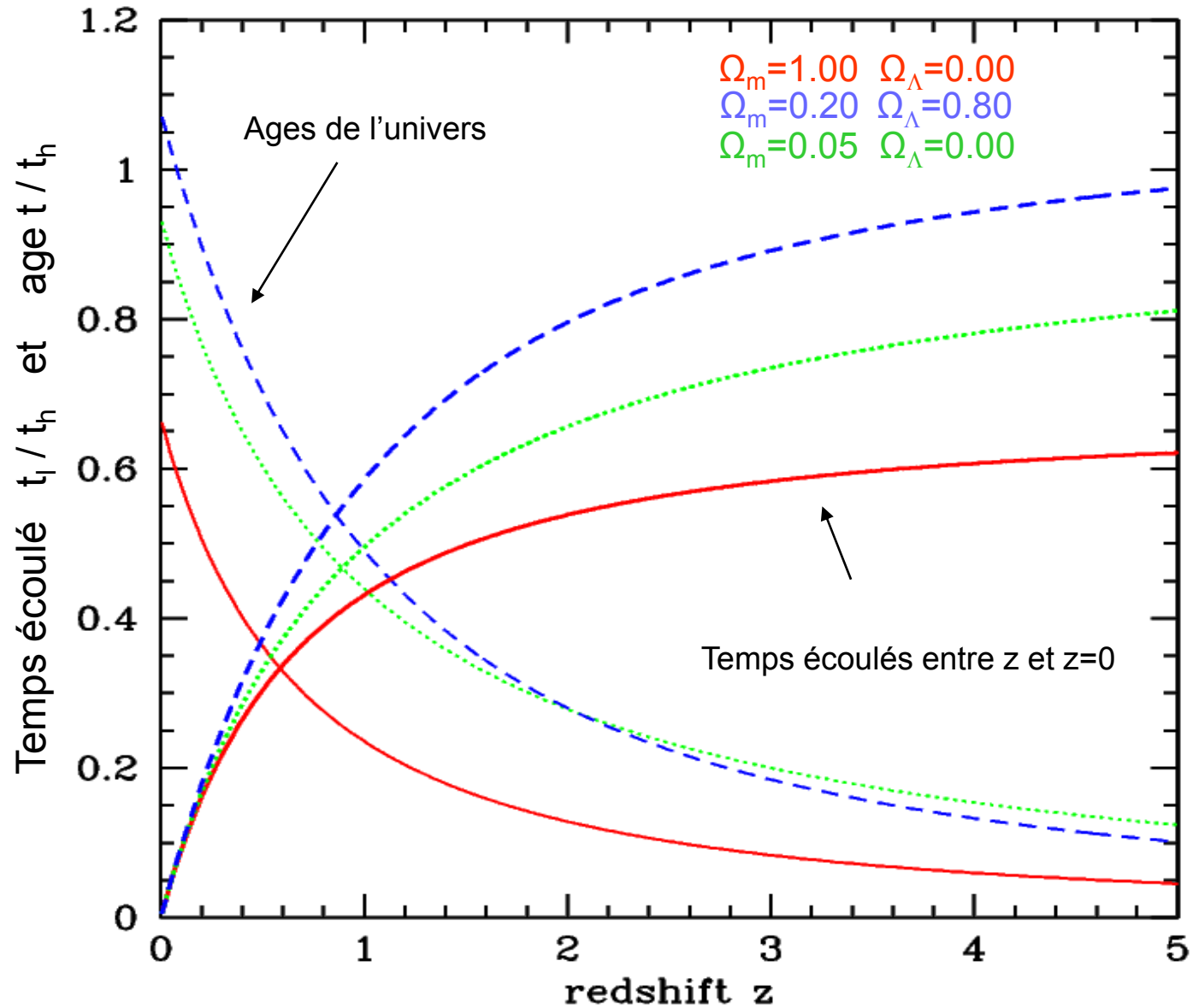
$$1 + z = 1 + H_0(t_0 - t) + H_0^2(t_0 - t)^2 \left[1 + \frac{q_0}{2} \right] + \dots$$

D'où on déduit le temps écoulé jusqu'à $t_0=t(z=0)$

$$t(0) - t(z) = t_0 - t = \frac{-H_0 + H_0 \sqrt{1 + 4z \left(1 + \frac{q_0}{2} \right)}}{2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2}$$

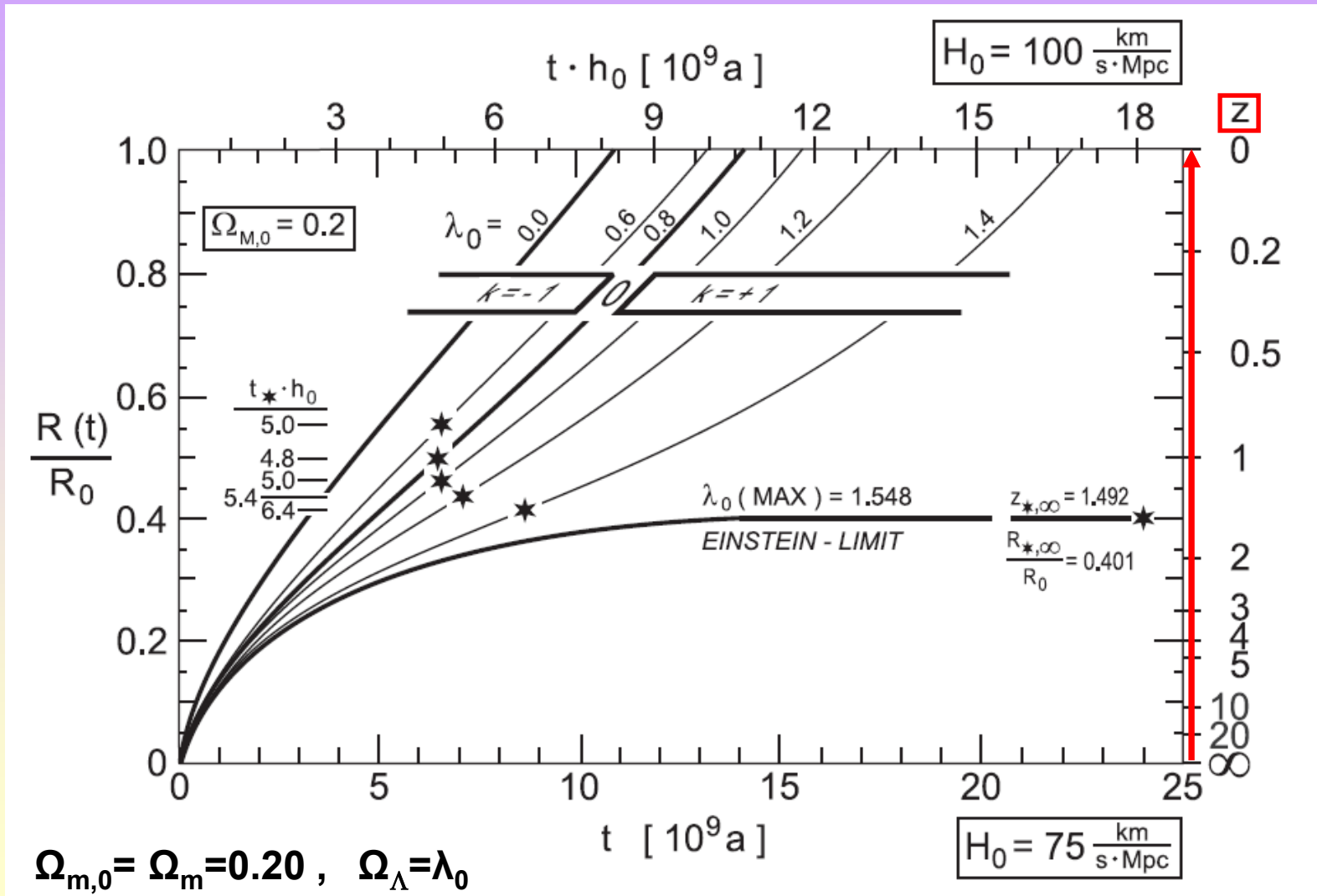
$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \left[z - z^2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) + \dots \right]$$

Cosmographie: mesure du temps écoulé



Cosmographie:

redshift, facteur d'expansion, H_0 , temps écoulé



Cosmographie: distance

Distance propre:

distance *instantannée* sur l'hypersurface $t=t_0$ ($dt=0$)

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{R(t) dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t) f(r)$$

Séparation comobile:

Varie avec l'expansion.

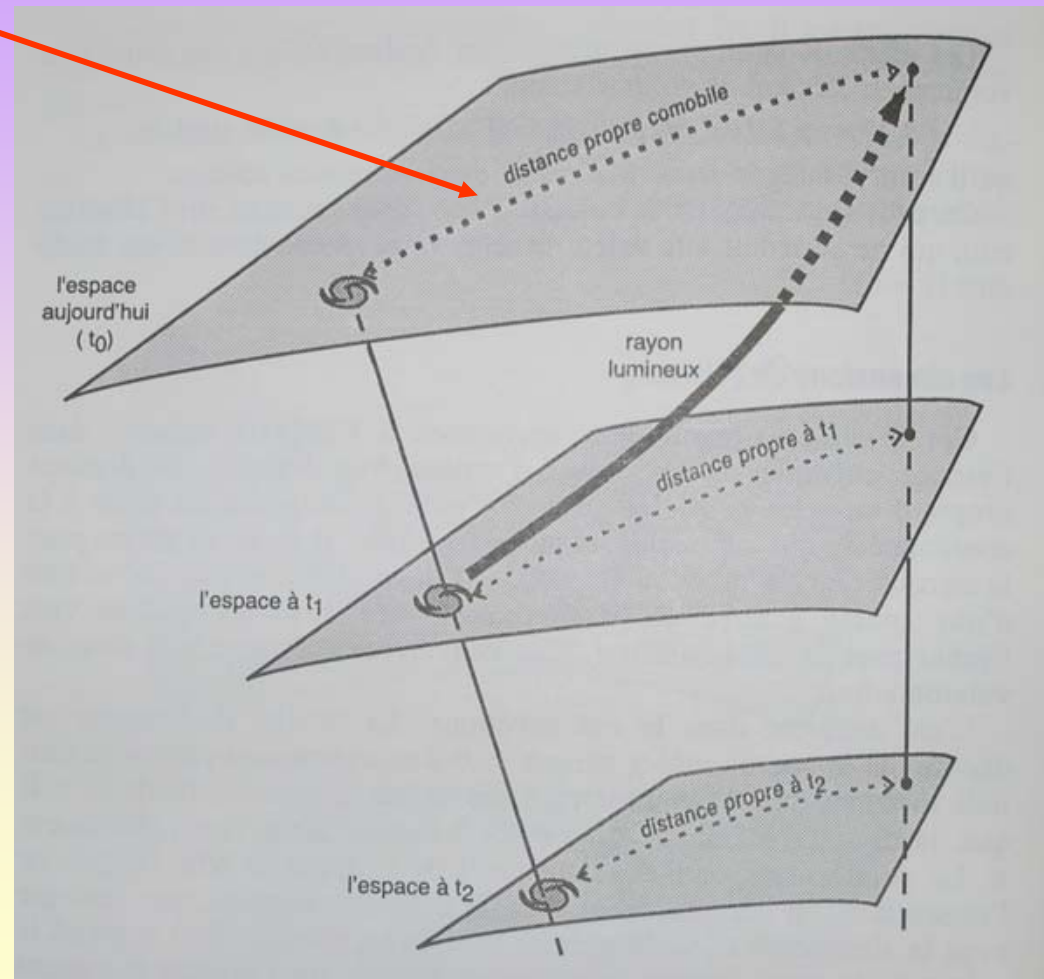
Pour deux galaxies proches, elle est quasi-mesurable et est en pratique la distance physique.

$$dD(t) = R(t) dr ; dD(t_0) = R_0 dr$$

$$dD(t) = [R_0 / (1+z)] dr = dr / (1+z)$$

La distance propre décroît comme $(1+z)$.

Idem pour volume propre $(1+z)^3$



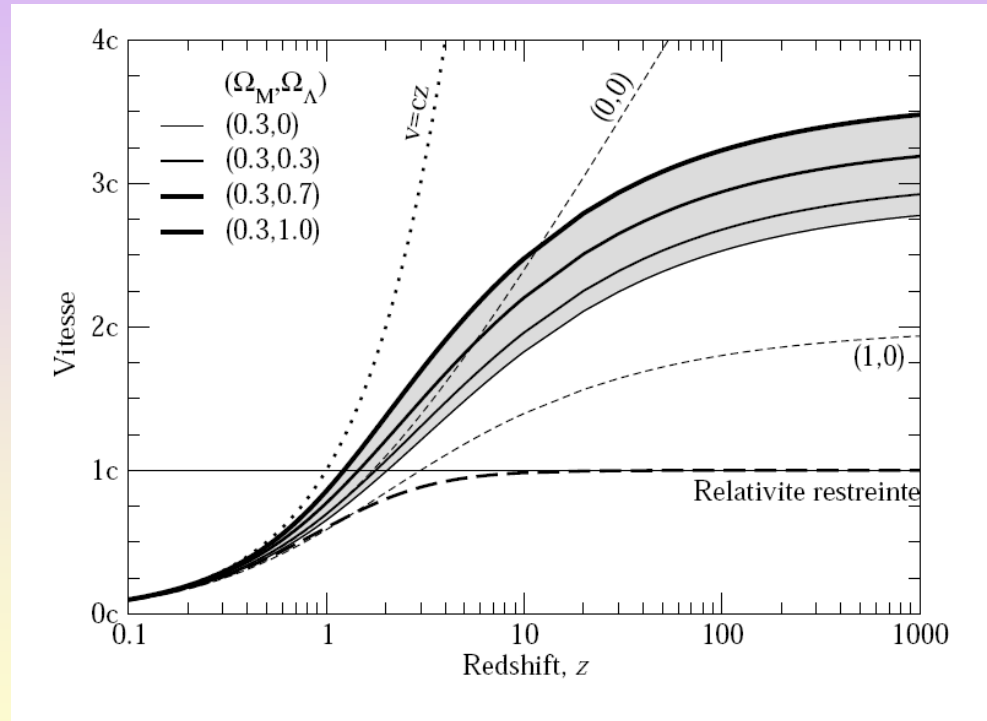
Cosmographie: distance et vitesse

Vitesse d'un corps mobile:

$$v = \frac{dd_{pr}(t)}{dt} = \dot{R}(t)f(r) + R(t)f'(z) = v_{rec} + v_{pec}$$

Pour un photon
 $ds=0$

$$cdt = R(t) df(r) \implies v_{pec} = c$$



$$v_{Grav/rec} = \dot{R}(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad , \quad \text{alors que} \quad v_{Rela/rec} = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Cosmographie: distance

- Distance propre
- Distance propre comobile
- Distance lumineuse
- Distance diamètre-angulaire (ou distance “angulaire”)
- Distance mouvement propre (mouvement relatif de la source)
- Distance parallaxe (effet révolution de la Terre)

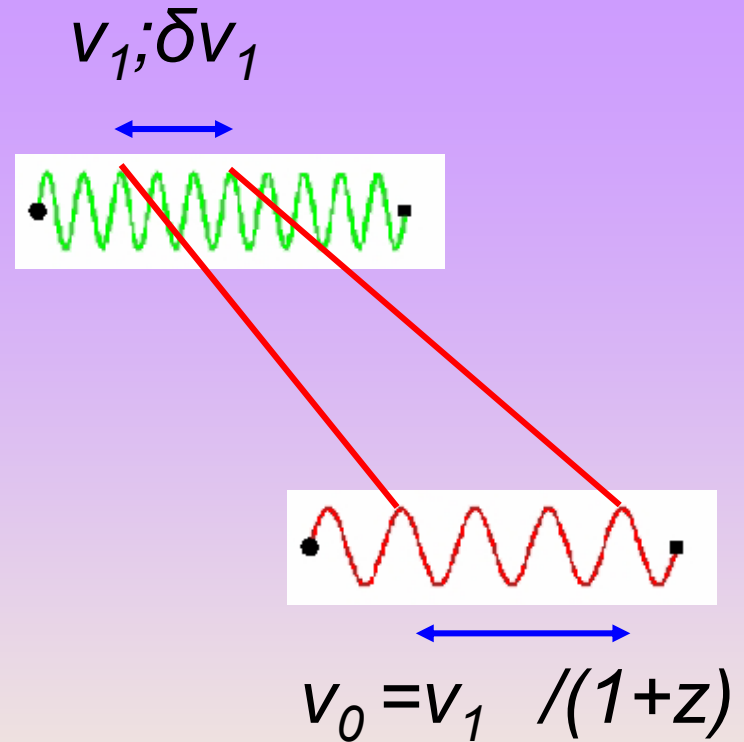
Ces distances NE SONT PAS identiques car:

- Effet de l'expansion
- Effet de la géométrie de l'univers... dont dépend l'expansion

Cosmographie: distance lumineuse

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2}$$

L'énergie totale émise pendant δt à la fréquence ν est atténuée d'un facteur $(1+z)$ par le décalage en fréquence (expansion) puis par le terme de dilatation de l'échelle de temps (expansion) :



$$L \delta t_1 = 4 \pi (r R_0)^2 \cdot l \cdot (1+z) \cdot \delta t_0$$

$$\delta t_0 = (R_0 / R) \cdot \delta t_1 = (1+z) \delta t_1$$

Donc : $d_L = r \cdot R_0 \cdot (1+z)$

*Effet géométrique (r)
+ effet de
l'expansion (1+z)*

Distance lumineuse, flux émis et flux observé

Soit:

- $S(\nu_0)$ l'énergie reçue par unité de temps, par unité de surface et par unité de fréquence.
- $N(\nu_1)$ le nombre de photons émis d'énergie $h\nu_1$ dans la bande de fréquence $\Delta\nu_1$ pendant le temps Δt_1 .

La luminosité de la source dans la bande ν_1 est donc

$$L(\nu_1) = \frac{N(\nu_1) h\nu_1}{\Delta t_1 \Delta \nu_1}$$

L'énergie reçue est captée par un collecteur d'aire $\pi \Delta l^2 / 4$ qui couvre un angle solide d'émission $\Delta\Omega / 4\pi$.

L'énergie reçue pendant une durée Δt_0 est donc:

$$S(\nu_0) = \frac{N(\nu_1) \left(\frac{\Delta\Omega}{4\pi} \right)}{\Delta t_0 \Delta \nu_0 \left(\frac{\pi \Delta l^2}{4} \right)} h\nu_0$$

Distance lumineuse, flux émis et flux observé

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_1) \Delta t_1 \Delta \nu_1 \Delta \Omega}{h \nu_1} \frac{h \nu_0}{4\pi \Delta t_0 \Delta \nu_0 \left(\frac{\pi \Delta l^2}{4}\right)}$$

Or: $\left\{ \begin{array}{l} \Delta t_0 \Delta \nu_0 \text{ et } \Delta t_1 \Delta \nu_1 = 1 \\ \Delta l = D \Delta \theta \text{ et } \Delta \Omega = \frac{\pi}{4} \Delta \theta^2 \end{array} \right.$

$$S(\nu_0) = L(\nu_1) \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{1}{4\pi D^2} = \frac{L(\nu_1)}{4\pi D^2 (1+z)}$$

Distance lumineuse, flux émis et flux observé

$$S(\nu_0) = L(\nu_1) \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{1}{4\pi D^2} = \frac{L(\nu_1)}{4\pi D^2(1+z)}$$

$$L_{Bol} = L(\nu_1) \Delta\nu_1 = 4\pi D^2(1+z) S(\nu_0) \Delta\nu_1$$

$$L_{Bol} = 4\pi D^2(1+z)^2 S(\nu_0) \Delta\nu_0 = 4\pi D^2(1+z)^2 S_{Bol}$$

$$S_{Bol} = \frac{L_{Bol}}{4\pi D^2(1+z)^2} = \frac{L_{Bol}}{4\pi D_L^2}$$

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_0)}{4\pi D_L^2} \left[\frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right]$$



$$-2.5 \log_{10} \left[\frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right]$$

Cosmographie:

distance diamètre-angulaire et distance mouvement propre

- $d_A = D_{pr} / \theta$

où D_{pr} est le diamètre propre de l'objet

$$d_A = d_L / (1+z)^2$$

- $d_M = u / u_\theta$

où u est la vitesse propre transverse et u_θ et le mouvement angulaire apparent

Cosmographie:

Exemple simple de calcul de distance en pratique

$$d_A = \frac{D}{\theta}$$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \approx r + \mathcal{O}(r^3)$$



$$\frac{c}{R_0} \int_{t_e}^{t_0} (1 + z) dt = r$$

Or:

$$1 + z = 1 + H_0(t_0 - t) + H_0^2(t_0 - t)^2 \left[1 + \frac{q_0}{2} \right] + \dots$$

Donc:

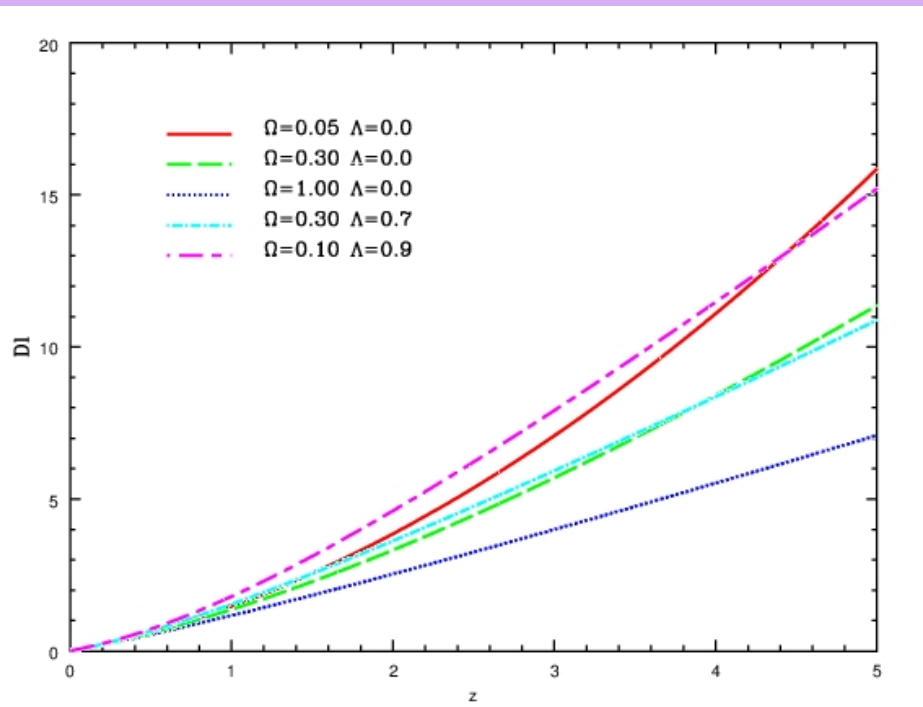
$$\frac{c}{R_0} \left[(t_0 - t) + \frac{H_0}{2}(t_0 - t)^2 + \dots \right] = r$$



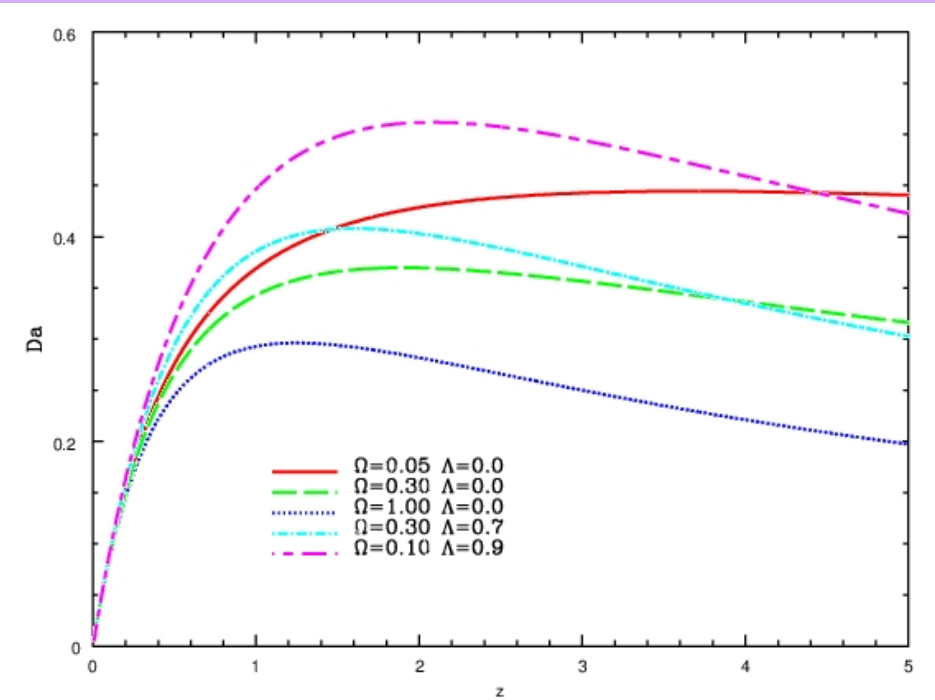
$$r = \frac{c}{R_0 H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) + \dots \right]$$

Comme $d_A = R_0 r (1+z)$, les distances sont donc calculables facilement (dans ce cas simple)

Cosmographie: distances

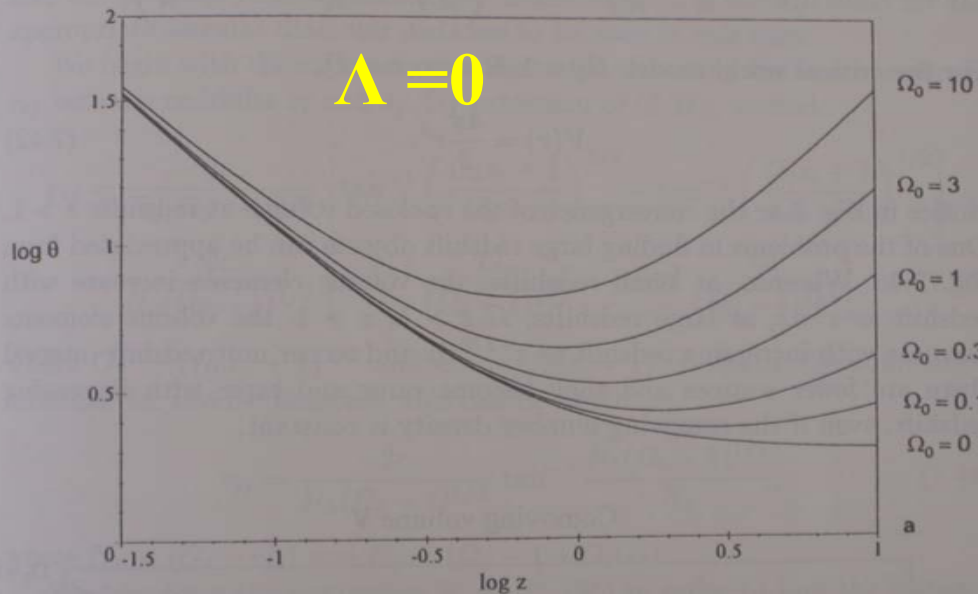
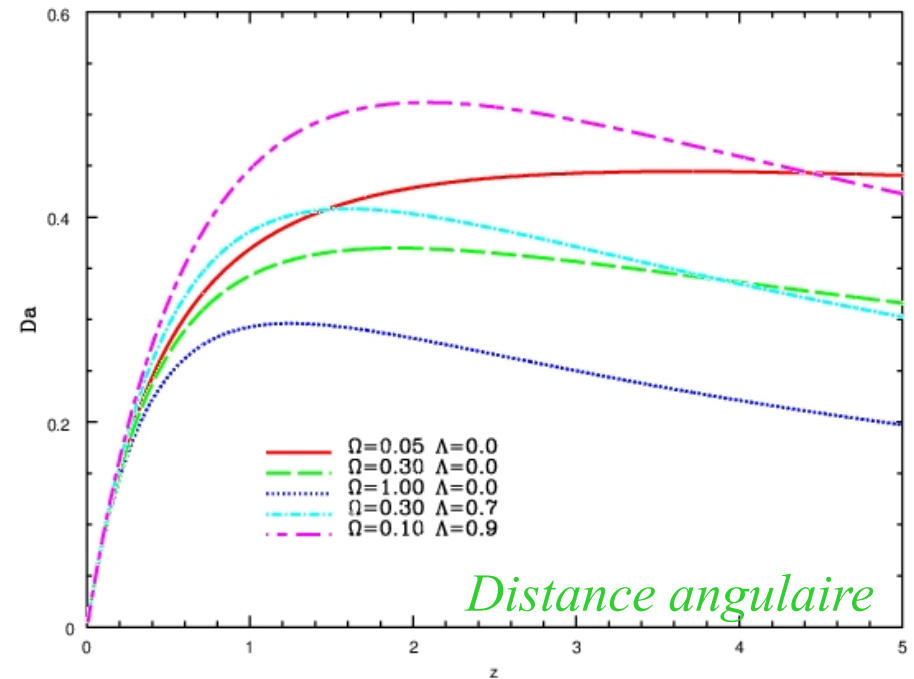


Distance luminosité



Distance angulaire

Cosmographie: dimension apparente



Conséquence:
dimension angulaire
d'une source....

$$\theta = \left(\frac{D_{pr} H_0}{c} \right) \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) (\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}$$

Cosmographie: relation magnitude-redshift

$$m - M = -5 + 5\log(d_L)$$

Exemple: cosmologie sans constante cosmologique

$$m - M = -5 - 5 \log H_0 + 5 \log \left[\frac{1}{q_0^2 (1+z)} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left[\sqrt{2q_0 + 1} - 1 \right] \right] \right]$$

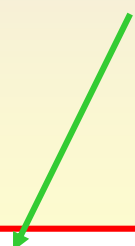
Comme:

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]$$

Donc:

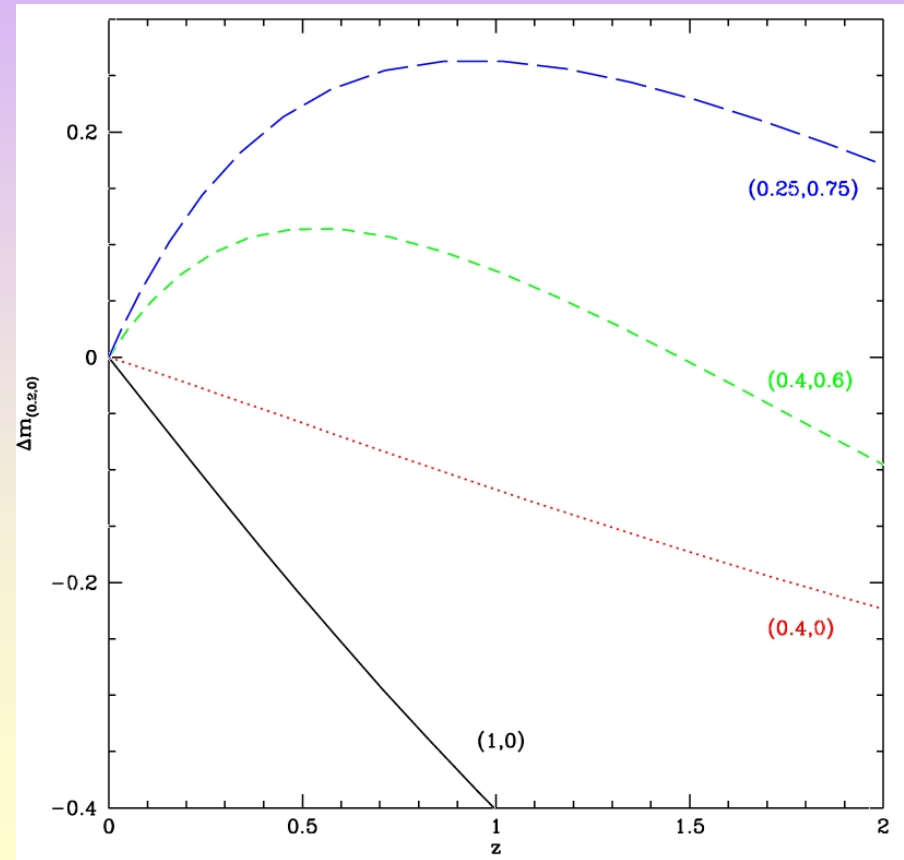
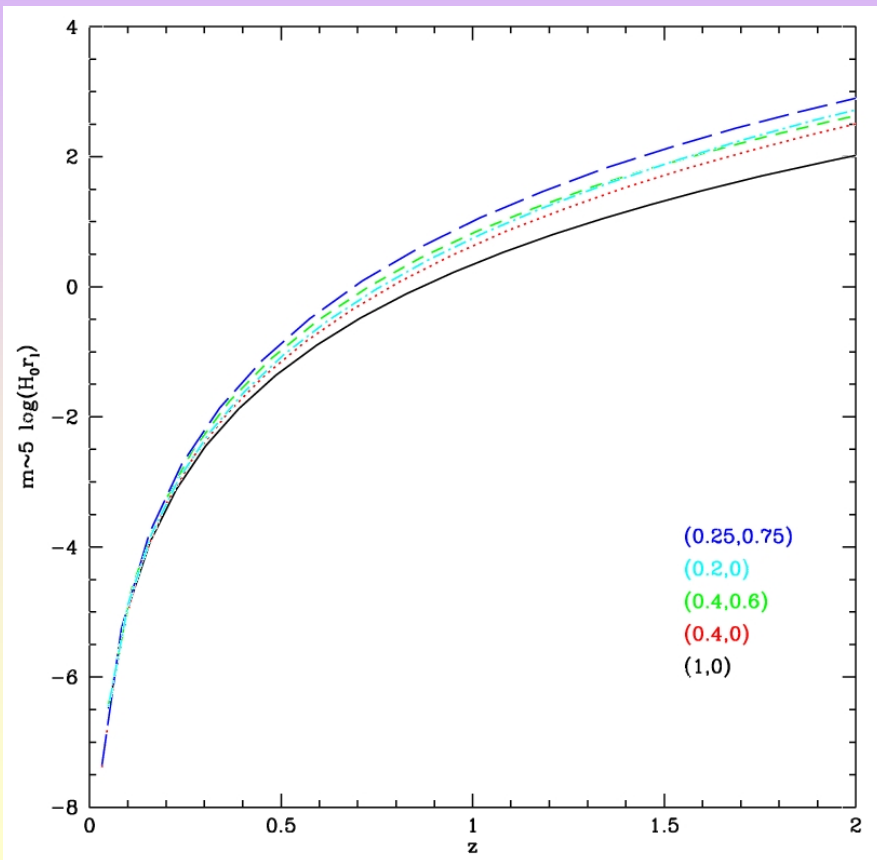
$$m - M = -5 + 5 \log \left[\frac{10^6 cz}{H_0} \right] + 5 \log \left[1 + \frac{1}{2} (1 - q_0) z \right]$$

Relation de Mattig

$$m - M = 25 - 5 \log \left[H_0 (\text{km} \cdot \text{sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1}) \right] + 5 \log \left[cz (\text{km} \cdot \text{sec}^{-1}) \right] + 1.086 (1 - q_0) z + \dots$$


Cosmographie: relation magnitude-redshift

Cas général: $(\Omega_m ; \Omega_\Lambda)$



Cosmographie: relation comptage-magnitude-redshift

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2}$$

$$m = -2.5 \log l + K$$

Expansion+
géométrie

$$N(l) = 4\pi \int_0^r n [t(r')] R [t(r')]^3 \frac{r'^2}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr'$$

$$nR^3 = n_0R_0^3$$

Euclidien
Sans expansion

$$N(l) = \frac{4}{3} \pi n_0 d_L^3$$

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \int_0^r \frac{r'^2}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr'$$

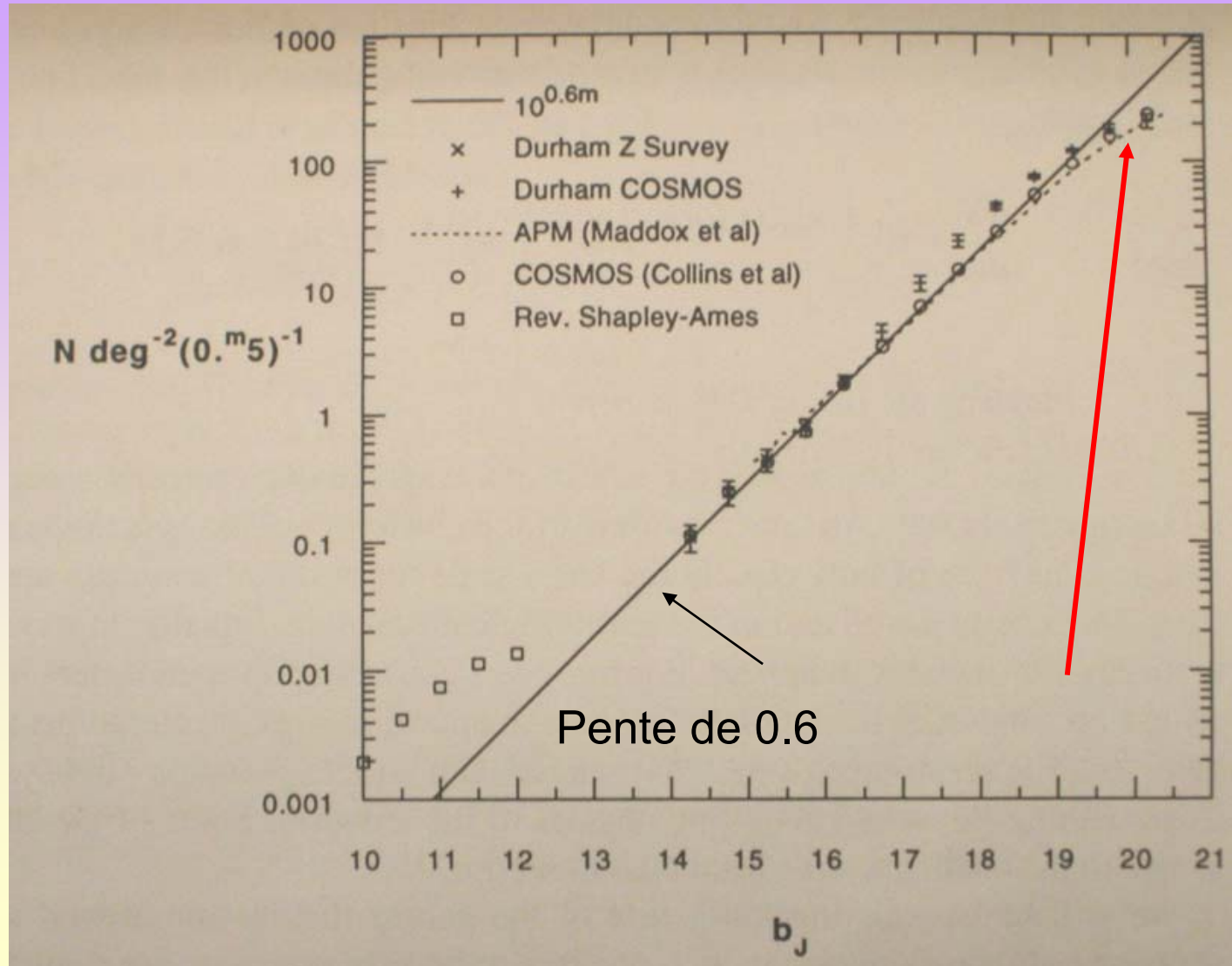
$$\log N(l) = 0.6m + K'$$

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{1}{10} kr^5 + \dots \right]$$

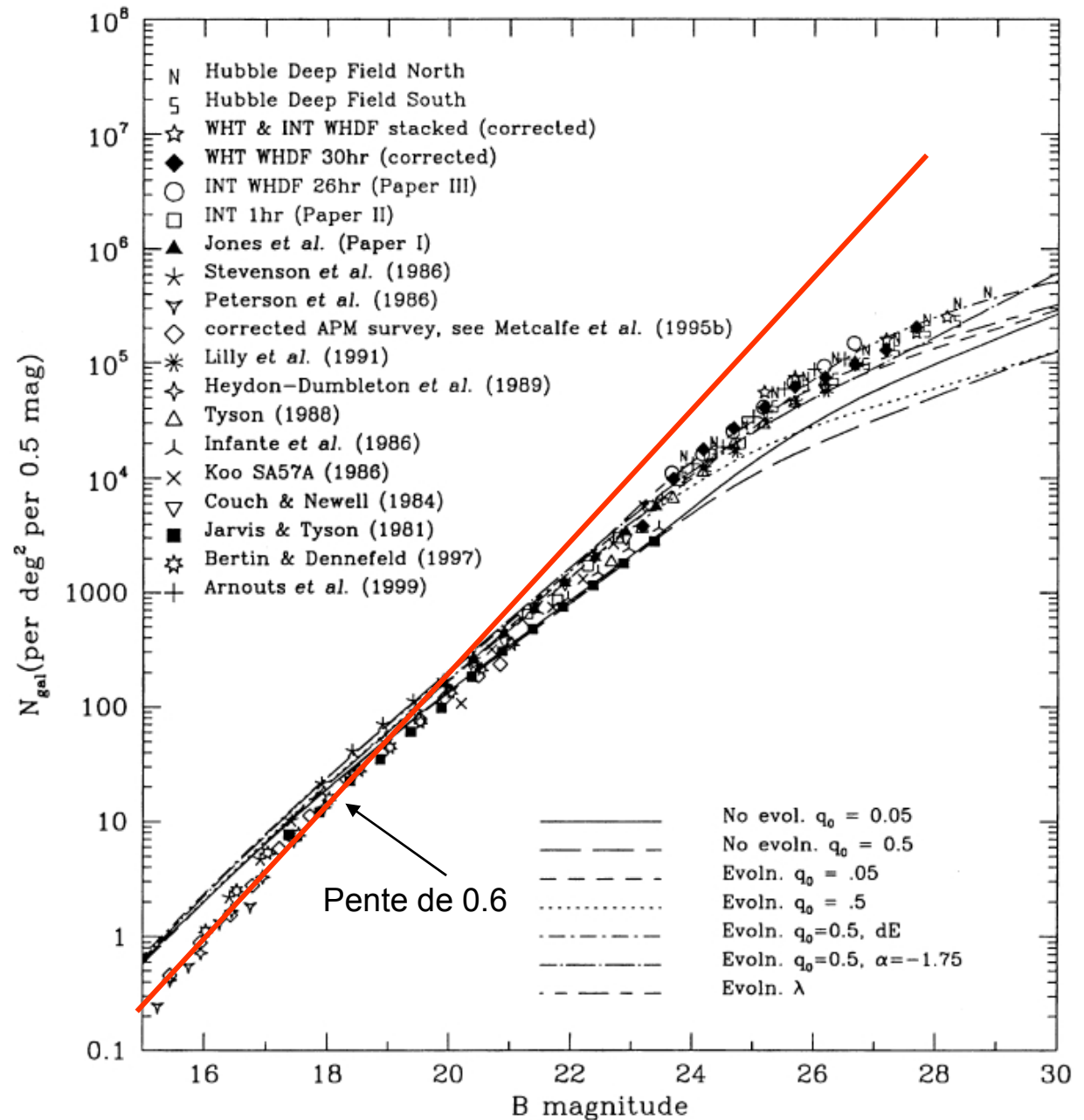
$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \frac{r^3}{3} \left[1 + \frac{3}{10} kr^2 \right] \approx 4\pi n_0 R_0^3 z^3 \left[1 + \frac{z}{2} (1 + q_0) \right]^3$$

$$\log N(l) = 3 \log z - 0.651(1 + q_0)z + K'$$

Cosmographie: relation comptage-magnitude-redshift



Cosmographie:
 relation
 comptage-
 magnitude-
 redshift



Cosmographie: « dimming factor »

- Cas d'un univers sans expansion

B_{int} = puissance émise par la source par unité de surface et unité d'angle solide:

$$L = 2\pi B_{int} S = 2\pi B_{int} \Omega d^2$$

Or:

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}$$



$$\frac{f}{\Omega} = B_{int}$$

, donc indépendant de la distance

- Cas d'un univers en expansion

$$L = 2\pi B_{int} \Omega \underline{d_A^2} = 2\pi f \underline{d_L^2}$$

$$B_{obs} = \frac{f}{\Omega} = B_{int} \left(\frac{d_L}{d_A} \right)^2$$



$$B_{obs} = \frac{B_{int}}{(1+z)^4}$$

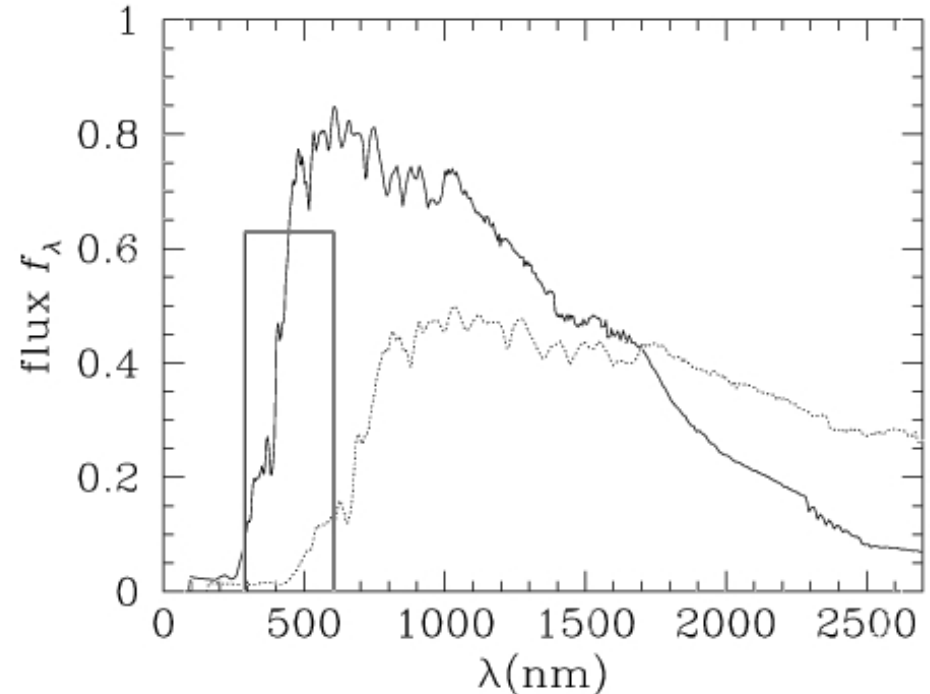
dimming factor

Cosmographie: « K-correction »

- La *K*-correction prend en compte le décalage spectral qui se traduit par une modification du flux observé dans un filtre la longueur d'onde fixée entre le flux émis et celui reçu.

- *Optique et NIR*: $K(z)$ doit être positif pour des objets rouges.
- *Sub-millimétrique*: $K(z)$ négatif pour les objets à très grand redshift

$$K_F(t_e, z) = 2.5 \log(1+z) - 2.5 \log \left[\frac{\int_0^\infty E_e \left(t_e, \frac{\lambda}{1+z} \right) T_F(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty E_e(t_e, \lambda) T_F(\lambda) d\lambda} \right]$$



$$m = M + 5 \log_{10} [d_L/10pc] + K(z)$$

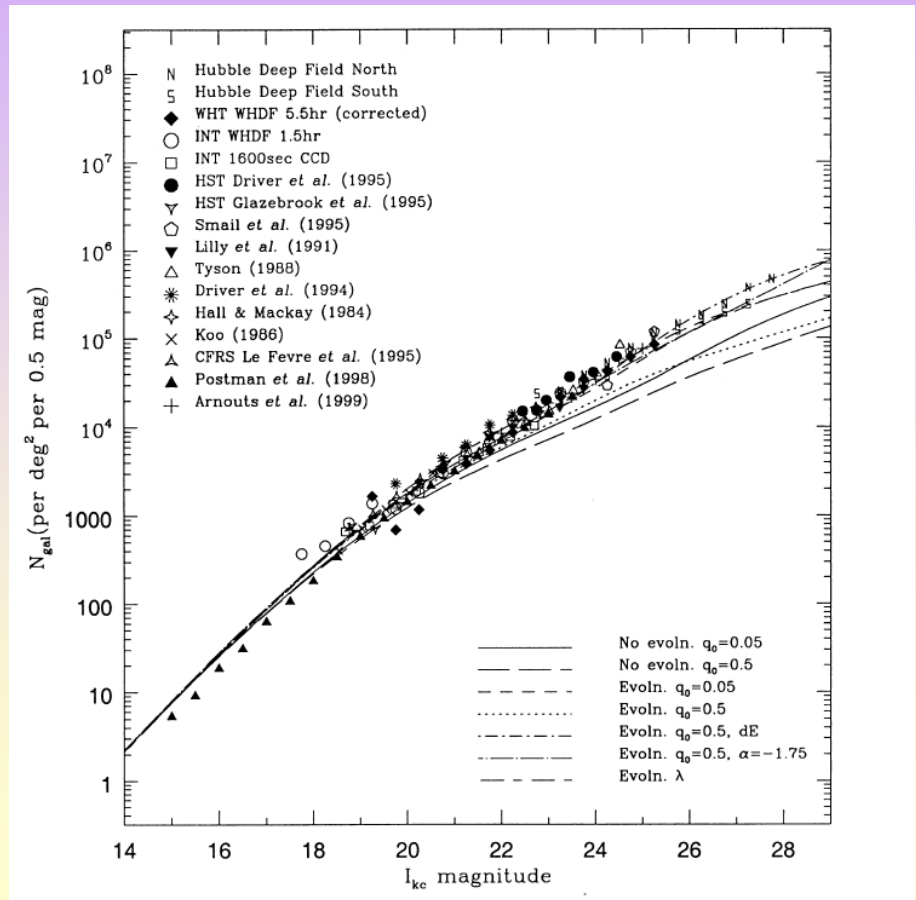
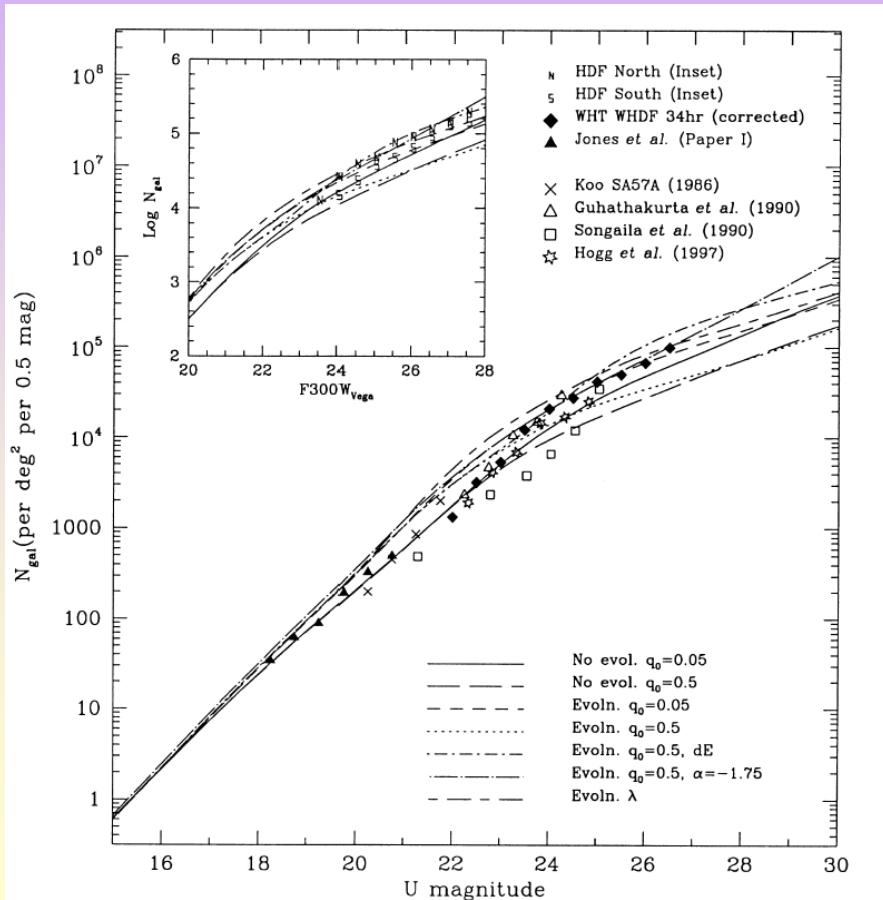
Si $f \sim \nu^\alpha$, alors $K(z) = 2.5 (\alpha - 1) \log_{10}(1+z)$

Les tests cosmologiques classiques

- Relation décalage spectral magnitude-apparente (*diagramme de Hubble*)
- Relation magnitude-comptage de galaxies
- Âge des galaxies lointaines
- Relation décalage spectral-diamètre apparent
- Relation brillance de surface-redshift (*Test de Tolman*)
- Conservation du nombre de galaxies (*Test de Loh & Spillar*)

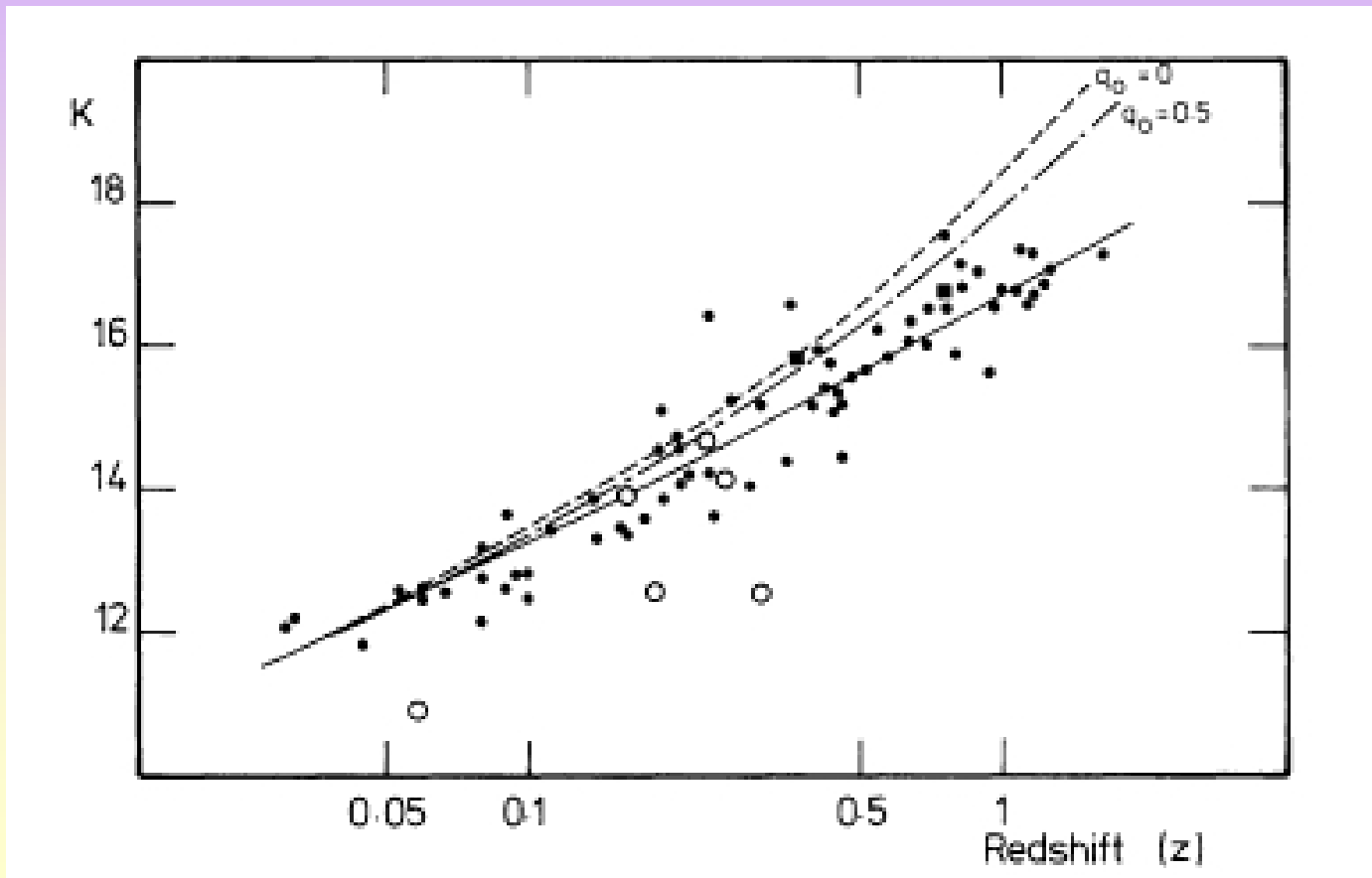
Les tests cosmologiques classiques

- Relation magnitude-comptage de galaxies



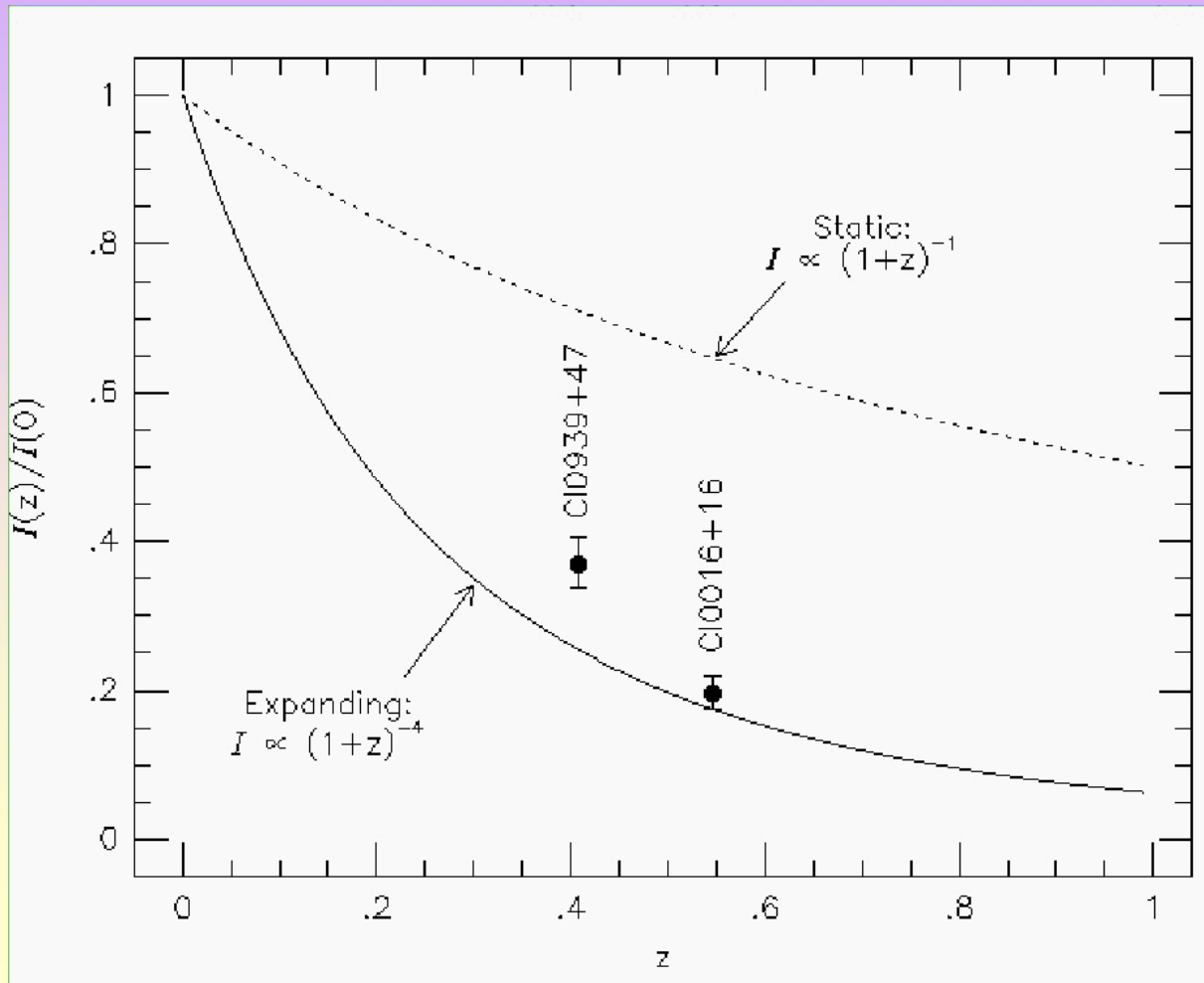
Les tests cosmologiques classiques

- Relation décalage spectral magnitude-apparente (*diagramme de Hubble*)



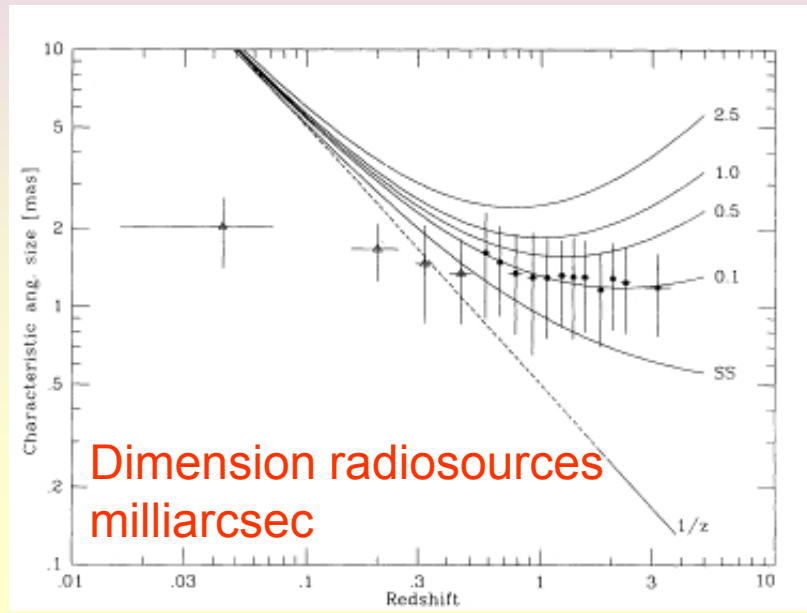
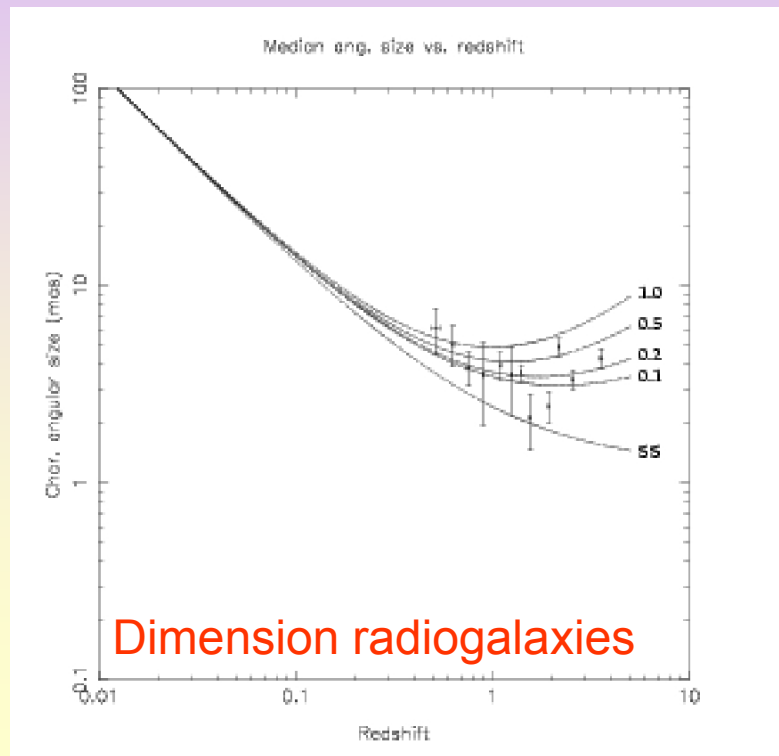
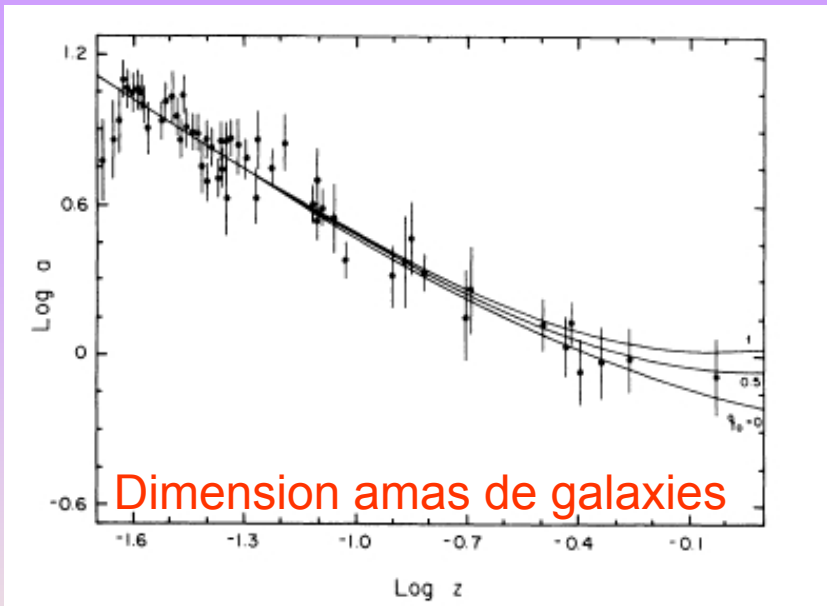
Les tests cosmologiques classiques

- Relation brillance de surface-redshift (*Test de Tolman*)



Les tests cosmologiques classiques

- Relation décalage spectral-diamètre apparent



Les tests cosmologiques classiques

En résumé: bilan des « tests classiques »

- $0.0 < q_0 < 1.0$ assez sûr
- Difficile d'être plus précis:
 - Erreurs de mesures importantes
 - Biais systématiques
 - Effets de sélection
 - Effets d'évolution à grand z

Le paradoxe d'Olbers

Pourquoi le ciel est-il noir?

Luminosité totale induite par une densité d'étoiles constante dans un univers euclidien statique:

$$L_{tot} = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 n \frac{L}{4\pi r^2} dr \longrightarrow n \text{ s'annule pour } z \sim 10$$

1. Le ciel est noir à cause de l'âge fini de l'univers
2. Le ciel n'est pas noir! Il apparaît noir à cause de l'expansion... mais le rayonnement cosmologique fossile existe bien à $T=2.728 K$

Les principes de la Relativité Générale

- **But:** compléter la Relativité Restreinte pour traiter des problèmes de gravitation et d'observateurs accélérés
- On admet que tout événement de l'espace-temps peut être repéré par un ensemble de 4 nombres. Le premier = coordonnée temporelle et que ces coordonnées sont au moins 3 fois dérivables.

Les principes de la Relativité Générale

- **But:** compléter la Relativité Restreinte pour traiter des problèmes de gravitation et d'observateurs accélérés
- On admet que tout événement de l'espace-temps peut être repéré par un ensemble de 4 nombres. Le premier = coordonnée temporelle et que ces coordonnées sont au moins 3 fois dérivables.
- **Généralisation du principe d'inertie:**
 - L'espace de référence est un espace R_4 Riemannien.

Espaces de Riemann

Espace auquel est attaché une métrique:

- Chaque partie de l'espace est représentée par un système de coordonnées (dx^i) et on s'y donne une métrique définie par une forme différentielle quadratique

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

- Ces coefficients remplissent les conditions suivantes
 - Les composantes g_{ij} sont symétriques $g_{ij} = g_{ji}$
 - Le déterminant de la matrice $[g_{ij}]$ est différent de zéro
 - La forme ds^2 , et donc les distances définies par les g_{ij} , est invariante vis-à-vis de tout changement de coordonnées
 - Toutes les dérivées partielles d'ordre deux des g_{ij} existent et sont continues

Les principes de la Relativité Générale

- **But:** compléter la Relativité Restreinte pour traiter des problèmes de gravitation et d'observateurs accélérés
- On admet que tout événement de l'espace-temps peut être repéré par un ensemble de 4 nombres. Le premier = coordonnée temporelle et que ces coordonnées sont au moins 3 fois dérivables.
- **Généralisation du principe d'inertie:**
 - L'espace de référence est un espace R_4 Riemannien.
 - Dans R_4 un point matériel libre de forces non-gravitationnelles décrit une géodésique dans cet espace (remplace de mouvement rectiligne uniforme de la Relativité Restreinte).
 - Cette condition est indépendante de la nature physique du point matériel MAIS prend en compte l'influence des masses de l'Univers

Les principes de la Relativité Générale

- **But:** compléter la Relativité Restreinte pour traiter des problèmes de gravitation et d'observateurs accélérés
- On admet que tout événement de l'espace-temps peut être repéré par un ensemble de 4 nombres. Le premier = coordonnée temporelle et que ces coordonnées sont au moins 3 fois dérivables.
- **Généralisation du principe d'inertie:**
 - L'espace de référence est un espace R_4 Riemannien.
 - Dans R_4 un point matériel libre de forces non-gravitationnelles décrit une géodésique dans cet espace (remplace de mouvement rectiligne uniforme de la Relativité Restreinte).
 - Cette condition est indépendante de la nature physique du point matériel MAIS prend en compte l'influence des masses de l'Univers
- **Principe d'équivalence (faible)** = identité des masses pesantes et des masses inertes: le rapport m_i / m_g est le même pour tous les corps

Les principes de la Relativité Générale

- **Généralisation de l'équation de Poisson:**

Postulat d'Einstein: comment la matière agit sur l'espace de manière à ce que les géodésiques de cet espace soient effectivement des trajectoires des masses d'épreuve:

- Courbure de $R_4 = \text{Cte}$ valable en tout point M de R_4 (propriété locale de la matière)
- On peut alors calculer le mouvement d'une masse test en présence d'un champ de gravitation en
 1. Traduisant l'influence de la matière sur la courbure de l'espace-temps R_4
 2. Calculant les symboles de Christoffel correspondant à cette courbure
 3. Déterminant les géodésiques correspondant à ces symboles et aux conditions initiales du problème

Principe d'équivalence et d'inertie: implication

- Identité entre masse inerte et masse grave :

$$m_I \mathbf{a} = m_G \mathbf{g}$$

- En tout point de l'espace il est toujours possible de définir un référentiel inertiel tel que dans une petite région autour de ce point les lois de la nature sont identiques à celles d'un système non accéléré, i.e. défini par un système de coordonnées cartésien sans champ de gravité

Principe d'équivalence

Exemple de changement de coordonnées:

Force électrostatique dans un champ gravitationnel:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = m_i \mathbf{g} + \sum_j \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (1)$$

Posons: $\xi = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ et $\xi^0 = t$

$$\implies m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \sum_j \mathbf{F}(\xi_i - \xi_j) \quad (2)$$

Soit une particule en chute libre sous l'effet d'un champ de gravité.

Posons x^μ le label du système de coordonnées spatiales.

Selon le Principe d'équivalence, à un point donné X , on peut toujours définir un système de coordonnées inertiel, ξ^μ dans lequel l'équation du mouvement sera:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{et} \quad d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (3)$$

$\xi^\mu(x^\mu)$ est invertible:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (4)$$

$$= \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (5)$$

En multipliant par

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\nu}, \quad \text{puis en utilisant} \quad \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} = \delta_\nu^\alpha \quad (6)$$

Equation des géodésiques

Voir exemple,
page précédente

Equation des géodésiques

On obtient l'èquation du mouvement dans le système de coordonnées x^μ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad \text{Equation des geodesiques}$$

où

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}$$

et la métrique est donc

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Les principes de la Relativité Générale

- **Généralisation du principe de relativité:**
 - La forme des lois fondamentales de la physique ne doit pas dépendre du repère dans lequel elles sont exprimées.
 - Les lois sont donc covariantes. Elles impliquent que ces lois doivent s'écrire sous forme tensorielle pour qu'elles soient invariantes lors d'un changement de coordonnées.
- **Equations d'Einstein**
 - Construction des équations du champ gravitationnel

Equations d'Einstein

Postulats d'Einstein sur les propriétés du tenseur impulsion-énergie

- Objectif: une relation entre matière-énergie et métrique
- Construire un tenseur impulsion-énergie (T_{ij}) qui ne dépende que des dérivées premières et secondes du tenseur métrique: le plus simple=relation linéaire.
- La dérivée covariante du tenseur T_{ij} est nulle: lois de conservation
- Qu'aux limites, les dérivées de ce tenseur conduisent à l'équation de Poisson

Equations d'Einstein

Postulats d'Einstein sur les propriétés du tenseur impulsion-énergie

- Einstein a postulé que cette relation devait inclure le tenseur de Riemann-Christoffel car:

c'est le seul tenseur qui dépend linéairement des dérivées premières et secondes de la métrique

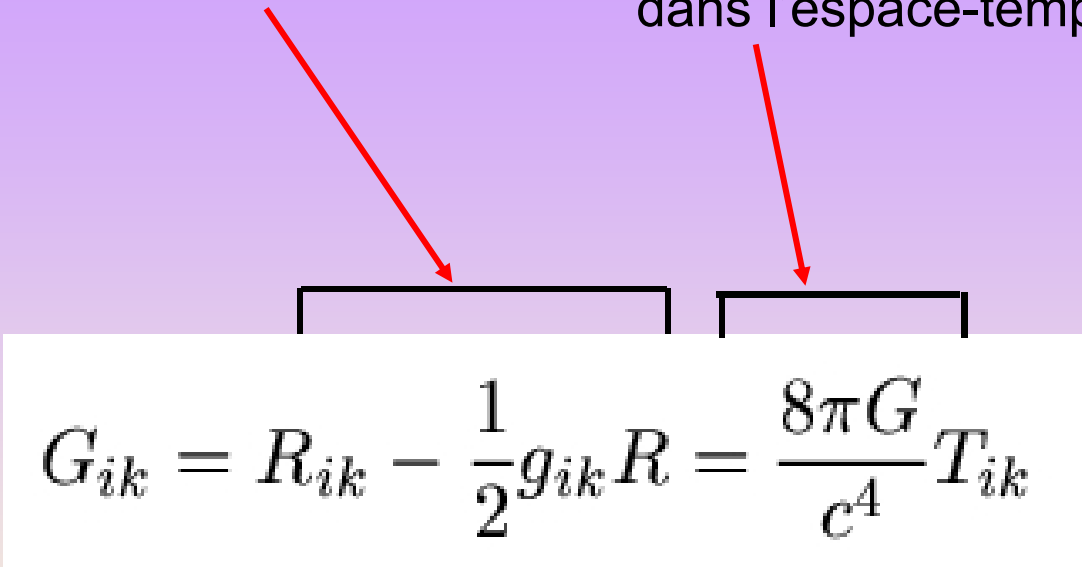
- Einstein a construit le tenseur d'Einstein qui permette d'avoir nécessairement des dérivées covariantes nulles

D'où:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

Equations d'Einstein

Courbure de l'espace-temps = énergie et impulsion contenues
dans l'espace-temps


$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

Equations d'Einstein

Courbure de l'espace-temps = énergie et impulsion contenues dans l'espace-temps

→ *garantit*: $G_{ik};k=0$

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

→ *Poisson*

Equations d'Einstein

Courbure de l'espace-temps = énergie et impulsion contenues dans l'espace-temps

→ *garantit*: $G_{ik ;k} = 0$

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

Tenseur d'Einstein

Tenseur de Ricci

Tenseur métrique

→ **Poisson**

Tenseur impulsion-énergie

Equations d'Einstein

Forme générale avec constante cosmologique

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$



Modèles d'univers homogènes et isotropes:

1. Calcul de toutes les composantes non nulles des tenseurs métrique, de Ricci et des symboles de Christoffel
2. Détermination du tenseur impulsion-énergie

Modèles cosmologiques

- **Principe d'équivalence et principe d'inertie:**
 - masse, forme de la métrique, équation des géodésiques
- **Principe cosmologique:**
 - Métrique de Friedmann-Robertson-Walker
 - Le tenseur impulsion-énergie décrit un fluide parfait
- **Equation du champ gravitationnel (Relativité Générale) + Principe cosmologique:**
 - Equations de Friedmann d'évolution de l'espace-temps
- **Equation d'état + Equation de Friedmann:**
 - Evolution du contenu matière-énergie, taux d'expansion, taux de croissance des perturbations (+hyp. instabilité gravitationnelle)

Modèles cosmologiques

Quelques points dont il faut se souvenir pour écrire les équations du champ gravitationnel

Forme générale de la métrique:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Equation des géodésiques:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$$

Symbole de Christoffel:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right]$$

$g^{im} g_{mk} = \delta_k^i$ symbole de Kroneker

Différentielle covariante:

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{kl}^i A^k dx^l = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l$$

Les équations du champ cosmologique

Quelques points dont il faut se souvenir pour écrire les équations du champ gravitationnel

- Convention de sommation d'Einstein

- Notation des dérivées: $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

- Tenseur de courbure de Riemann:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}$$

- Tenseur de Ricci (les indices 1 et 3 égaux; *i.e.* $\alpha=\beta$):

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

- Scalaire de Ricci (contraction en multipliant par l'inverse du tenseur métrique):

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

- Symbole de Christoffel: $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$

Les équations du champ cosmologique

Eléments non nuls du tenseur métrique pour une métrique FRW:

voir annexe du cours, à faire en exercice

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$$

$$g_{00}$$

$$g_{11}(x^0, x^1)$$

$$g_{22}(x^0, x^1)$$

$$g_{33}(x^0, x^1, x^2)$$

$$R \equiv R(t) = R(x^0)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_{00} = 1 & g_{11} = -\frac{R(t)^2}{1 - kr^2} \\ g_{22} = -R(t)^2 r^2 & g_{33} = -R(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \\ g^{00} = 1 & g^{11} = -\frac{1 - kr^2}{R(t)^2} \\ g^{22} = -\frac{1}{R(t)^2 r^2} & g^{33} = -\frac{1}{R(t)^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right.$$
$$(-g)^{1/2} = \frac{R(t)^2 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Les équations du champ cosmologique

- Calcul des symboles de Christoffel

| | $\partial_0 g_{\mu\nu}$ | $\partial_1 g_{\mu\nu}$ | $\partial_2 g_{\mu\nu}$ | $\partial_3 g_{\mu\nu}$ |
|----------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------|
| g_{00} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| g_{11} | $-2R\dot{R}/(1 - kr^2)$ | $-2R^2 kr/(1 - kr^2)^2$ | 0 | 0 |
| g_{22} | $-2R\dot{R}r^2$ | $-2R^2 r$ | 0 | 0 |
| g_{33} | $-2R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta$ | $-2R^2 r \sin^2 \theta$ | $-2R^2 r^2 \sin \theta \cos \theta$ | 0 |

Soit:

| | $\partial_0 g_{\mu\nu}$ | $\partial_1 g_{\mu\nu}$ | $\partial_2 g_{\mu\nu}$ | $\partial_3 g_{\mu\nu}$ |
|----------|-------------------------|--------------------------|---------------------------------------|-------------------------|
| g_{00} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| g_{11} | $[2\dot{R}/R]g_{11}$ | $[2kr/(1 - kr^2)]g_{11}$ | 0 | 0 |
| g_{22} | $[2\dot{R}/R]g_{22}$ | $[2/r]g_{22}$ | 0 | 0 |
| g_{33} | $[2\dot{R}/R]g_{33}$ | $[2/r]g_{33}$ | $[2 \sin \theta / \cos \theta]g_{33}$ | 0 |

Propriétés importantes:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathbf{1}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

Les équations du champ cosmologique

- Calcul des symboles de Christoffel

Cas: $\lambda = 0$:

L'expression des symboles de Christoffel se simplifie:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_\mu g_{\nu 0} + \partial_\nu g_{\mu 0} - \partial_0 g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}(0 + 0 - 0) = 0$$

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = 0$$

$$\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20} = 0$$

$$\Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} = 0$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00}(0 + 0 - \partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(R^2 \frac{1}{1 - kr^2} \right) = R\dot{R}/(1 - kr^2)$$

$$\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = 0$$

$$\Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{31} = 0$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}g^{00}(0 + 0 - \partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (R^2 r^2) = R\dot{R}r^2$$

$$\Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{32} = 0$$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (R^2 r^2 \sin^2 \theta) = R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta$$

Les équations du champ cosmologique

- Calcul des symboles de Christoffel

Cas: $\lambda = 1$:

L'expression des symboles de Christoffel se simplifie:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\mu g_{\nu 1} + \partial_\nu g_{\mu 1} - \partial_1 g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^1_{00} = 0$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + 0 - 0) = \dot{R}/R$$

$$\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20} = 0$$

$$\Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{30} = 0$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = kr/(1 - kr^2)$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(0 + 0 - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2}(1 - kr^2)R^{-2}(2R^2 r) = -r(1 - kr^2)$$

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = 0$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}(0 + 0 - \partial_1 g_{33}) = -\frac{1}{2}(1 - kr^2)R^{-2}(2R^2 r \sin^2 \theta) = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta$$

Les équations du champ cosmologique

- Calcul des symboles de Christoffel

Cas: $\lambda = 2$:

L'expression des symboles de Christoffel se simplifie:

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\mu g_{\nu 2} + \partial_\nu g_{\mu 2} - \partial_2 g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^2_{00} = 0$$

$$\Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{10} = 0$$

$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + 0 - 0) = \dot{R}/R$$

$$\Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + 0 - 0) = 1/r$$

$$\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = 0$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}(0 + 0 - \partial_2 g_{33}) = -\frac{1}{2}R^{-2}r^{-2}2R^2r^2 \sin\theta \cos\theta = -\sin\theta \cos\theta$$

Les équations du champ cosmologique

- Calcul des symboles de Christoffel

Cas: $\lambda = 3$:

L'expression des symboles de Christoffel se simplifie:

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_\mu g_{\nu 3} + \partial_\nu g_{\mu 3} - \partial_3 g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^3_{00} = 0$$

$$\Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{10} = 0$$

$$\Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{20} = 0$$

$$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + 0 - 0) = \dot{R}/R$$

$$\Gamma^3_{11} = 0$$

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = 0$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + 0 - 0) = 1/r$$

$$\Gamma^3_{22} = 0$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + 0 - 0) = \frac{1}{2}2 \cos \theta / \sin \theta = \cot \theta$$

$$\Gamma^3_{33} = 0$$

Les équations du champ cosmologique

Eléments non nuls des symboles de Christoffel pour une métrique FRW

19 composantes non-nulles

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \begin{pmatrix} \Gamma^0_{00} & \Gamma^0_{01} & \Gamma^0_{02} & \Gamma^0_{03} \\ \Gamma^1_{00} & \Gamma^1_{01} & \Gamma^1_{02} & \Gamma^1_{03} \\ \Gamma^2_{00} & \Gamma^2_{01} & \Gamma^2_{02} & \Gamma^2_{03} \\ \Gamma^3_{00} & \Gamma^3_{01} & \Gamma^3_{02} & \Gamma^3_{03} \\ \hline \Gamma^0_{10} & \Gamma^0_{11} & \Gamma^0_{12} & \Gamma^0_{13} \\ \Gamma^1_{10} & \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} \\ \Gamma^2_{10} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} \\ \Gamma^3_{10} & \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} \\ \hline \Gamma^0_{20} & \Gamma^0_{21} & \Gamma^0_{22} & \Gamma^0_{23} \\ \Gamma^1_{20} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} \\ \Gamma^2_{20} & \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} \\ \Gamma^3_{20} & \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} \\ \hline \Gamma^0_{30} & \Gamma^0_{31} & \Gamma^0_{32} & \Gamma^0_{33} \\ \Gamma^1_{30} & \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \\ \Gamma^2_{30} & \Gamma^2_{31} & \Gamma^2_{32} & \Gamma^2_{33} \\ \Gamma^3_{30} & \Gamma^3_{31} & \Gamma^3_{32} & \Gamma^3_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{R}/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{R}/R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{R}/R \\ \hline 0 & R\dot{R}/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ \dot{R}/R & kr/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \\ \hline 0 & 0 & R\dot{R}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r(1-kr^2) & 0 \\ \dot{R}/R & 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ \hline 0 & 0 & 0 & R\dot{R}r^2 \sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & -r(1-kr^2) \sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta \cos\theta \\ \dot{R}/R & 1/r & \cot\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$$

$$\partial_3 \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$$

| | $\partial_0 \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ | $\partial_1 \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ | $\partial_2 \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ |
|-----------------|--|--------------------------------------|---|
| Γ^0_{11} | $(R\ddot{R} + \dot{R}^2)/(1 - kr^2)$ | $-2R\dot{R}kr/(1 - kr^2)^2$ | 0 |
| Γ^0_{22} | $(R\ddot{R} + \dot{R}^2)r^2$ | $2R\dot{R}r$ | 0 |
| Γ^0_{33} | $(R\ddot{R} + \dot{R}^2)r^2 \sin^2 \theta$ | $2R\dot{R}r \sin^2 \theta$ | $2R\dot{R}r^2 \sin \theta \cos \theta$ |
| Γ^1_{01} | $(\ddot{R} - \dot{R})/R^2$ | 0 | 0 |
| Γ^2_{02} | $(\ddot{R} - \dot{R})/R^2$ | 0 | 0 |
| Γ^3_{03} | $(\ddot{R} - \dot{R})/R^2$ | 0 | 0 |
| Γ^1_{11} | 0 | $k(1 + kr^2)/(1 - kr^2)^2$ | 0 |
| Γ^1_{22} | 0 | $3kr^2 - 1$ | 0 |
| Γ^1_{33} | 0 | $(3kr^2 - 1) \sin^2 \theta$ | $-2r(1 - kr^2) \sin \theta \cos \theta$ |
| Γ^2_{12} | 0 | $-1/r^2$ | 0 |
| Γ^3_{13} | 0 | $-1/r^2$ | 0 |
| Γ^2_{33} | 0 | 0 | $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ |
| Γ^3_{23} | 0 | 0 | $-1/\sin^2 \theta$ |

Tous les termes non diagonaux sont nuls

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

Terme temps-temps 00

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\lambda_{00} \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{0\alpha} \Gamma^\alpha_{0\lambda}$$

- Sachant que $\Gamma^\alpha_{00}=0$ annule les termes d'indice 1 et 3.
- Seuls symboles non nuls: $\Gamma^\alpha_{0\alpha} = \dot{R}/R$ et le produit $\Gamma^\lambda_{0\alpha} \Gamma^\alpha_{0\lambda}$ est non nul si $\alpha=\lambda$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} - \Gamma^\lambda_{0\alpha} \Gamma^\alpha_{0\lambda}$$

- Soit:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_0 \Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{00} & (\alpha = 0) \\ & -\partial_0 \Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{01} \Gamma^1_{01} & (\alpha = 1) \\ & -\partial_0 \Gamma^2_{02} - \Gamma^2_{02} \Gamma^2_{02} & (\alpha = 2) \\ & -\partial_0 \Gamma^3_{03} - \Gamma^3_{03} \Gamma^3_{03} & (\alpha = 3) \end{aligned}$$

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

Terme temps-temps 00

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\partial_0\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} & (\alpha = 0) \\ & -\partial_0\Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{01} & (\alpha = 1) \\ & -\partial_0\Gamma^2_{02} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{02} & (\alpha = 2) \\ & -\partial_0\Gamma^3_{03} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{03} & (\alpha = 3)\end{aligned}$$

Soit, en prenant en compte les termes non nuls et les expressions des symboles de Christoffel

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\partial_0\dot{R}/R - 3\dot{R}^2/R^2 \\ &= -3R^{-2}(\ddot{R}R - \dot{R}^2) - 3R^{-2}\dot{R}^2 \\ &= -3\ddot{R}/R\end{aligned}$$

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

Terme espace-espace 11

$$R_{11} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{11} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^\lambda_{11} \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{1\alpha} \Gamma^\alpha_{1\lambda}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 \Gamma^0_{10} + \Gamma^\lambda_{11} \Gamma^0_{\lambda 0} - \Gamma^\lambda_{10} \Gamma^0_{1\lambda} & (\alpha = 0) \\ &+ \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1 \Gamma^1_{11} + \Gamma^\lambda_{11} \Gamma^1_{\lambda 1} - \Gamma^\lambda_{11} \Gamma^1_{1\lambda} & (\alpha = 1) \\ &+ \partial_2 \Gamma^2_{11} - \partial_1 \Gamma^2_{12} + \Gamma^\lambda_{11} \Gamma^2_{\lambda 2} - \Gamma^\lambda_{12} \Gamma^2_{1\lambda} & (\alpha = 2) \\ &+ \partial_3 \Gamma^3_{11} - \partial_1 \Gamma^3_{13} + \Gamma^\lambda_{11} \Gamma^3_{\lambda 3} - \Gamma^\lambda_{13} \Gamma^3_{1\lambda} & (\alpha = 3) \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \Gamma^1_{10} \Gamma^0_{11} \\ &\quad - \partial_1 \Gamma^2_{12} + \Gamma^0_{11} \Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{11} \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{12} \\ &\quad - \partial_1 \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{11} \Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{11} \Gamma^3_{13} - \Gamma^3_{13} \Gamma^3_{13} \end{aligned}$$

Soit, en prenant en compte les termes non nuls et les expressions des symboles de Christoffel

$$\begin{aligned} R_{11} &= (R\ddot{R} + \dot{R}^2)/(1 - kr^2) - \dot{R}^2/(1 - kr^2) \\ &\quad + r^{-2} + \dot{R}^2/(1 - kr^2) + k/(1 - kr^2) - r^{-2} \\ &\quad + r^{-2} + \dot{R}^2/(1 - kr^2) + k/(1 - kr^2) - r^{-2} \\ &= R\ddot{R}/(1 - kr^2) + 2\dot{R}^2/(1 - kr^2) + 2k/(1 - kr^2) \\ &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)/(1 - kr^2) \end{aligned}$$

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

Terme espace-espace 22

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{22} - \partial_2 \Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^\lambda_{22} \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{2\alpha} \Gamma^\alpha_{2\lambda} \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{22} - \partial_2 \Gamma^0_{20} + \Gamma^\lambda_{22} \Gamma^0_{\lambda 0} - \Gamma^\lambda_{20} \Gamma^0_{2\lambda} \quad (\alpha = 0) \\ &\quad + \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^1_{21} + \Gamma^\lambda_{22} \Gamma^1_{\lambda 1} - \Gamma^\lambda_{21} \Gamma^1_{2\lambda} \quad (\alpha = 1) \\ &\quad + \partial_2 \Gamma^2_{22} - \partial_2 \Gamma^2_{22} + \Gamma^\lambda_{22} \Gamma^2_{\lambda 2} - \Gamma^\lambda_{22} \Gamma^2_{2\lambda} \quad (\alpha = 2) \\ &\quad + \partial_3 \Gamma^3_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^\lambda_{22} \Gamma^3_{\lambda 3} - \Gamma^\lambda_{23} \Gamma^3_{2\lambda} \quad (\alpha = 3) \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{22} - \Gamma^2_{20} \Gamma^0_{22} \\ &\quad + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{22} \Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22} \\ &\quad - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^0_{22} \Gamma^3_{30} + \Gamma^1_{22} \Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{23} \Gamma^3_{23} \end{aligned}$$

Soit, en prenant en compte les termes non nuls et les expressions des symboles de Christoffel

$$\begin{aligned} R_{22} &= (R\ddot{R} + \dot{R}^2)r^2 - \dot{R}^2 r^2 \\ &\quad + 3kr^2 - 1 + \dot{R}^2 r^2 - kr^2 + (1 - kr^2) \\ &\quad + 1/\sin^2 \theta + \dot{R}^2 r^2 - (1 - kr^2) - \cos^2 \theta / \sin^2 \theta \\ &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2)r^2 + 2kr^2 - 1 + (1 - \cos^2 \theta) / \sin^2 \theta \\ &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 - 1 + 1 \\ &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \end{aligned}$$

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

Terme espace-espace 33

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{33} - \partial_3 \Gamma^\alpha_{3\alpha} + \Gamma^\lambda_{33} \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{3\alpha} \Gamma^\alpha_{3\lambda} \\
 &= \partial_0 \Gamma^0_{33} - \partial_3 \Gamma^0_{30} + \Gamma^\lambda_{33} \Gamma^0_{\lambda 0} - \Gamma^\lambda_{30} \Gamma^0_{3\lambda} \quad (\alpha = 0) \\
 &\quad + \partial_1 \Gamma^1_{33} - \partial_3 \Gamma^1_{31} + \Gamma^\lambda_{33} \Gamma^1_{\lambda 1} - \Gamma^\lambda_{31} \Gamma^1_{3\lambda} \quad (\alpha = 1) \\
 &\quad + \partial_2 \Gamma^2_{33} - \partial_3 \Gamma^2_{32} + \Gamma^\lambda_{33} \Gamma^2_{\lambda 2} - \Gamma^\lambda_{32} \Gamma^2_{3\lambda} \quad (\alpha = 2) \\
 &\quad + \partial_3 \Gamma^3_{33} - \partial_3 \Gamma^3_{33} + \Gamma^\lambda_{33} \Gamma^3_{\lambda 3} - \Gamma^\lambda_{33} \Gamma^3_{3\lambda} \quad (\alpha = 3) \\
 &= \partial_0 \Gamma^0_{33} - \Gamma^3_{30} \Gamma^0_{33} \\
 &\quad + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \Gamma^0_{33} \Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{33} \Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{33} \\
 &\quad + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \Gamma^0_{33} \Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{33} \Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33} \\
 &\quad + 0
 \end{aligned}$$

Soit, en prenant en compte les termes non nuls et les expressions des symboles de Christoffel

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= (R\ddot{R} + \dot{R}^2)r^2 \sin^2 \theta - \dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta \\
 &\quad + (3kr^2 - 1) \sin^2 \theta + \dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + (1 - kr^2) \sin^2 \theta \\
 &\quad + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta - (1 - kr^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
 &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Les équations du champ cosmologique

Composantes du tenseur de Ricci

Termes espace-espace exprimés en fonction des termes espace-espace du tenseur métrique:

$$\begin{aligned}R_{11} &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)/(1 - kr^2) = - \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right) g_{11} \\R_{22} &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 = - \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right) g_{22} \\R_{33} &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta = - \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right) g_{33}\end{aligned}$$

qui montrent une symétrie illustrant l'isotropie de l'espace.

Le tenseur de Ricci s'écrit donc:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \quad R_{ij} = - \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right) g_{ij}$$

Les équations du champ cosmologique

Le scalaire de Ricci

Obtenu simplement par contraction du tenseur de Ricci

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= -3 \frac{\ddot{R}}{R} - 3 \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right) \\ &= -6 \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right)\end{aligned}$$

Les équations du champ cosmologique

Le tenseur d'Einstein

On peut maintenant construire le tenseur d'Einstein.

Il correspond à la partie géométrique des équations du champ cosmologique

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}$$

Terme temps-temps G_{00}

$$\begin{aligned}G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} \\ &= -3\frac{\ddot{R}}{R} + 3\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) \\ &= 3\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right)\end{aligned}$$

Terme espace-espace G_{ij}

$$\begin{aligned}G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} \\ &= -\left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right)g_{ij} + 3\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right)g_{ij} \\ &= \left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right)g_{ij}\end{aligned}$$

Equations de champ cosmologique

En résumé:

Eléments non nuls des symboles de Christoffel pour une métrique FRW

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \\ \Gamma_{11}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)}{c(1-kr^2)} \qquad \Gamma_{22}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)r^2}{c} \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)r^2\sin^2\theta}{c} \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2} \qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma_{23}^3 = \cotg\theta \end{array} \right.$$

Equations d'Einstein

En résumé:

Éléments non nuls du tenseur de Ricci et du tenseur d'Einstein pour une métrique FRW

- Ricci:

$$\begin{cases} R_0^0 = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \\ R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{2\dot{R}(t)^2 + 2kc^2}{R(t)^2} \right) \end{cases}$$

- Courbure scalaire:


$$R = \frac{6}{c^2} \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \left(\frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} \right)$$

- Einstein:

$$\begin{cases} G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = R_1^1 - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{c^2} \left(2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} \right) \\ G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} \right) \end{cases}$$

Equations de Friedmann

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{c^2}T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2}T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2}T_3^3 \quad (a) \\ \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}T_0^0 \quad (b) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} +\Lambda /3 \\ +\Lambda R^2 /3 \end{array}$$



T_{ij} ?

Le tenseur énergie-impulsion

- ***L'univers est homogène et isotrope*** → la distribution de ses composantes aussi.... Donc les « gaz » doivent être conformes à l'***hypothèse du fluide parfait***: aucun phénomènes dissipatifs : ni propagation de chaleur, ni viscosité, ni diffusion
- Le fluide est, et reste, isotrope dans son repère au repos et son tenseur énergie-impulsion ne doit contenir aucun termes de gradient (de vitesse, de température, de densité, etc...).
- $T_{\mu\nu}$ est donc complètement défini par sa densité d'énergie ρ et sa pression P .

Sa forme dans un repère au repos doit donc être la suivante:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$$

Le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$$

Avec la normalisation: $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$

$$T_j^i = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Ce qui implique nécessairement: $Div_{cov}[T_{\mu\nu}] = 0$

Les équations de Friedmann

Le tenseur énergie-impulsion

Donc les seuls composantes importantes sont: $T_{00}=\rho$ et $T_{ij}=-P$

et la forme compacte des équations du champ est:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Composante G_{00}

(sachant que $g_{00}=1$)

$$\begin{aligned}G_{00} &= 8\pi GT_{00} \\ 3 \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right) &= 8\pi G\rho \\ \Rightarrow \frac{\dot{R}^2}{R^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2}\end{aligned}$$

← Décrit comment la vitesse d'expansion dépend de la densité d'énergie et de la courbure.

Composante G_{ij}

$$\begin{aligned}G_{ij} &= 8\pi GT_{ij} \\ 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} &= -8\pi Gp \\ \Rightarrow 2\frac{\ddot{R}}{R} &= -\frac{8\pi G}{3}(3p) - \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \Rightarrow \frac{\ddot{R}}{R} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\end{aligned}$$

← Décrit comment l'accélération du facteur d'échelle dépend de la pression et de la densité.

Signification des équations de Friedmann

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 \quad (a) \\ \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 \quad (b) \end{array} \right.$$

$$\left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R} \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P$$

Or:

$$\frac{d}{dt} \left[R \left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) \right] = \dot{R} \left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R} \right]$$

⇒

$$\frac{1}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left[R \left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P$$

Signification des équations de Friedmann

$$\frac{1}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left[R \left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 \\ \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 \end{array} \right.$$

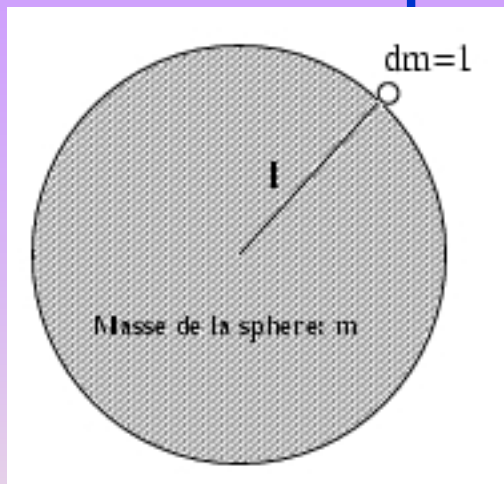
$$\left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) = \frac{8\pi G}{3c^2} R^2 \rho c^2$$

$$\frac{1}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left[\frac{8\pi G}{3c^2} R^3 \rho c^2 \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2 P$$

$$\frac{d}{dR} \left[\rho c^2 R^3 \right] + 3PR^2 = 0$$

Variation d'énergie totale $d[\rho c^2 R^3] = 3PR^2 dR$ Travail

Interprétation Newtonnienne des équations de Friedmann



Sphère de rayon l , de masse m et de densité homogène et isotrope ρ .

Accélération subie par une masse unité située à une distance radiale l :

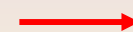
$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{Gm}{l^2} = -\frac{G}{l^2} \frac{4}{3} \pi l^3 \rho$$

Or:

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{Gm}{l^2}$$



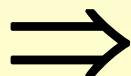
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{l}^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{Gm}{l} \right)$$



$$\frac{1}{2} \dot{l}^2 = \frac{Gm}{l} + C$$

Par ailleurs, on a la loi d'échelle:

$$\frac{l}{R} = \frac{l_0}{R_0} \implies l = l_0 \frac{R}{R_0}$$



$$\frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} \dot{R} \right)^2 = G \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{l_0}{R_0} R \right)^2 + C$$

Interprétation Newtonnienne des équations de Friedmann

$$\frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} \dot{R} \right)^2 = G \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{l_0}{R_0} R \right)^2 + C$$



$$\dot{R}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2$$

avec

$$C = -\frac{K}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} c \right)^2$$

Il suffit donc de définir l_0 telle que $K = -1, 0, 1$

- $K=1$: $C < 1$, énergie totale négative, la sphère peut s'effondrer
- $K=-1$: $C > 1$, expansion infinie
- $K=0$: $C=0$, énergie totale nulle; arrêt de l'expansion pour $t \rightarrow \infty$

Equation d'état

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 & (b) \end{cases}$$

2 équations, 3 inconnues: $R(t)$, P et ρ

- Il faut une relation de fermeture: pour un fluide parfait, $P(\rho)$ peut être simplement de la forme:

$$P = \omega \rho c^2 \quad \text{avec} \quad 0 < \omega < 1$$

- $\omega = 1/3$: univers dominé par le rayonnement
- $\omega = 0$: « univers poussière » . Correspond à l'univers actuel car pour les composants dominants $v^2/c^2 \ll 1$
- $\omega = -1$: champ additionnel = constante cosmologique

Caractérisation et propriétés des universs de Friedmann

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 & (b) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

On définit:

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

: densité critique

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 3.252 \cdot 10^{-18} h \text{ s}^{-1}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\rho_{0c} = 1.88 \cdot 10^{-29} h^{-2} \text{ g cm}^{-3}$$

Modèles de Friedmann, l'expansion est adiabatique

$$dU = dQ - PdV \quad \text{avec} \quad dQ = 0 . \quad (259)$$

Or

$$dU = d(\rho c^2 R^3) \quad \text{et} \quad dV = d(R^3) . \quad (260)$$

Donc

$$d(\rho c^2 R^3) = -Pd(R^3) = R^3 dP - d(PR^3) , \quad (261)$$

ce qui implique que

$$R^3 dP = d(\rho c^2 R^3 + PR^3) = d(R^3 [\rho c^2 + P]) . \quad (262)$$

Soit, en transformant $dp \Rightarrow dp/dt$, puis en dérivant par rapport au temps les termes de droite:

$$R^3 \dot{P} = 3R^3 \dot{R} [\rho c^2 + P] + R^3 \dot{\rho} c^2 + R^3 \dot{P} . \quad (263)$$

Ce qui conduit à la relation

$$\frac{\dot{\rho} R^2}{\dot{R}} = -3R \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (264)$$

Par ailleurs, on peut écrire l'équation (250)(b) sous la forme

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 - kc^2 , \quad (265)$$

puis, en dérivant par rapport au temps

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho} R^2 + 2\rho R\dot{R}) , \quad (266)$$

soit

$$\ddot{R} = \frac{4\pi G}{3} \left(\dot{\rho} \frac{R^2}{\dot{R}} + 2\rho R \right) \quad (267)$$

On peut maintenant utiliser l'expression de $\frac{\dot{\rho} R^2}{\dot{R}}$ déduite de la condition adiabatique, (264), que l'on substitue alors dans (267). On a donc

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R , \quad (268)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (250)(a). (CQFD).

Les deux équations de Friedmann ne peuvent être satisfaites de façon simultanée que si l'expansion est adiabatique

Caractérisation et propriétés des univers de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}}\rho\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

Vrai pour $t=t_0$

$$\left(\frac{\dot{R}_0}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}}\rho_0\left(\frac{R_0}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

$$H_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}\right] = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2(1 - \Omega_0)$$

Paramètre de densité

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}$$

Caractérisation et propriétés des universs de Friedmann

Evolution de la densité en fonction de z

Supposons que :

$$P = \omega \rho c^2 \quad \text{avec} \quad 0 < \omega < 1 \quad \text{et indépendant du temps}$$

Comme:

$$d(\rho R^3) = -\frac{3P}{c^2} R^2 dR$$

$$R^3 d\rho + 3R^2 \rho dR = -3\rho\omega R^2 dR$$



$$d[\rho R^{3(1+\omega)}] = 0 \quad \implies \quad \rho R^{3(1+\omega)} = Cte = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$$

Caractérisation et propriétés des universs de Friedmann

Evolution de la densité en fonction de z

$$d[\rho R^{3(1+\omega)}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho R^{3(1+\omega)} = Cte = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$$

- Pour un univers poussière: $\omega = 0$

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3 \quad \longrightarrow \quad \rho(z) = \rho_0 (1+z)^3$$

- Pour un univers rayonnement: $\omega = 1/3$

$$\rho R^4 = \rho_0 R_0^4 \quad \longrightarrow \quad \rho(z) = \rho_0 (1+z)^4$$

Pour un univers en expansion, la transition d'une phase « rayonnement » à une phase « matière » est donc inéluctable

$$\rho = \rho_0 (1+z)^4 \quad (315)$$

Par ailleurs, les observations du spectre du fond cosmologique démontrent qu'il s'agit un rayonnement de corps noir.

Il est possible de démontrer que l'expansion de l'univers conserve le corps noir, mais en modifie sa température. En effet, soit $n_\nu d\nu$ la densité de photons dans le domaine de fréquence ν et $\nu + d\nu$. On a, pour un corps noir:

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (316)$$

Le nombre total de photons est donc

$$n = \int_0^\infty n_\nu d\nu = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \quad (317)$$

où $\zeta(3) = 2.404$.

La densité d'énergie de rayonnement est

$$u_r = \rho c^2 = \int_0^\infty h\nu n_\nu d\nu = aT^4 \quad (318)$$

À cause de l'expansion, la fréquence d'un photon est décalée et devient $\nu' = \nu(1+z)$. Le nombre de photons dans ce domaine de fréquence contenus dans un volume V est par ailleurs $N_\nu d\nu = n_\nu V d\nu$. Or, l'expansion affecte le volume qui devient $V' = V/(1+z)^3$. Si les photons sont sans interaction, alors leur nombre doit être conservé

$$n_\nu V d\nu = n'_\nu V' d\nu' \quad (319)$$

Donc

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right] V d\nu = \frac{8\pi\nu'^2 (1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu'(1+z)}{kT}} - 1} \right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z) d\nu \quad (320)$$

soit

$$\frac{8\pi\nu^2 (1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z) d\nu = \frac{8\pi\nu'^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu'(1+z)}{kT}} - 1} \right] V d\nu \quad (321)$$

Ainsi, le spectre est toujours celui d'un corps noir mais de température

$$T' = \frac{T}{1+z} \quad (322)$$

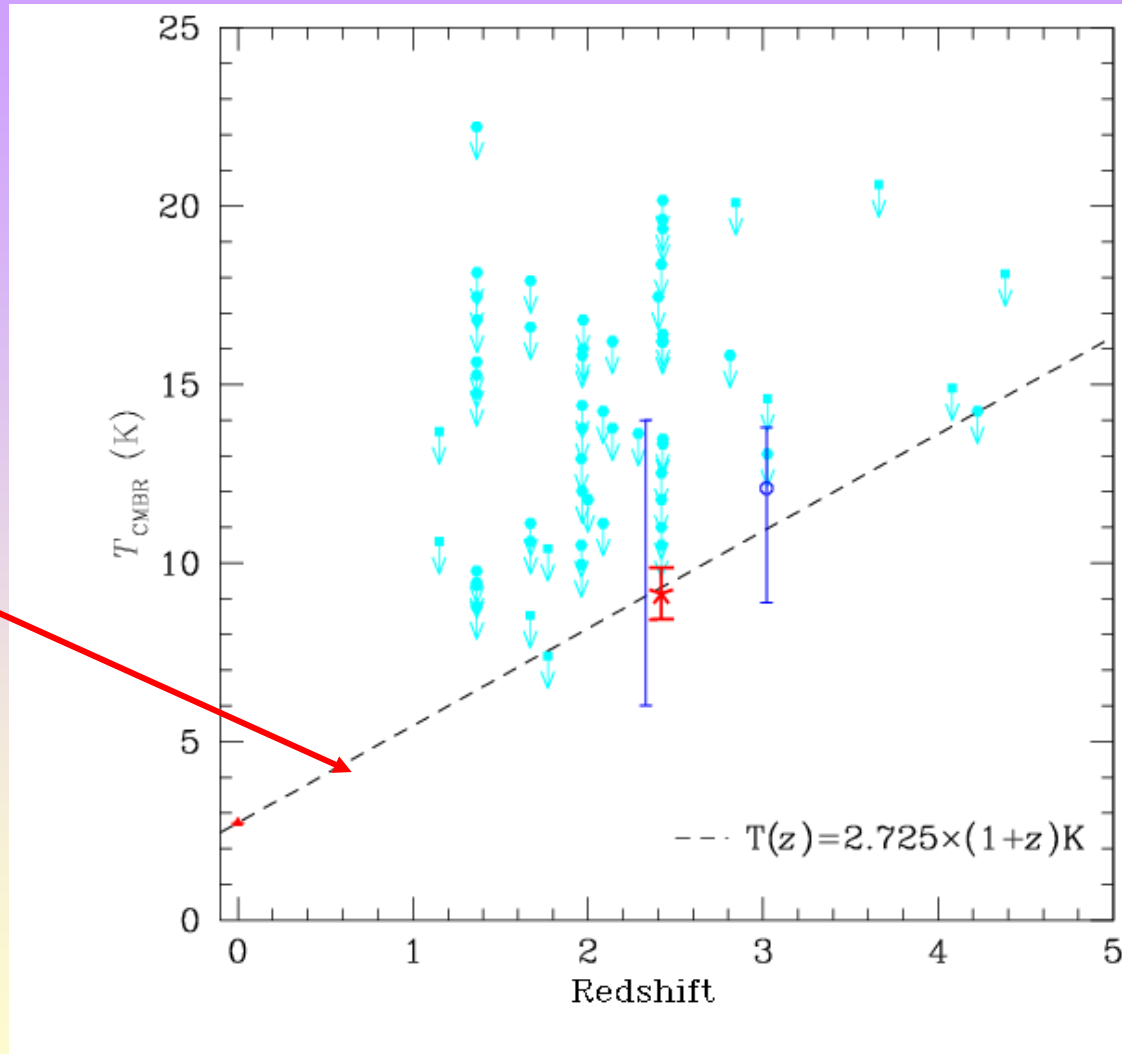
On peut donc en permanence prédire la température de l'univers T à partir de la mesure de la température actuelle T_0 : $T = T_0(1+z)$. L'univers était donc plus chaud dans le passé et il a donc une histoire liée à cette évolution en température.

Evolution du corps noir cosmologique:

Le corps noir reste corps noir, mais sa température décroît

Un univers en expansion

Prédiction si
expansion



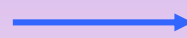
Température du CMB en fonction de z (2008)

Caractérisation et propriétés des universs de Friedmann

Existence d'une singularité

Cas des modèles $P = \omega \rho c^2$ avec $-1/3 < \omega < 1$

$$\rho R^{3(1+\omega)} = Cte = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$$



$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega}$$



$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0)$$



$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0)$$

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1 - \Omega_0)$$

Caractérisation et propriétés des universs de Friedmann

Existence d'une singularité

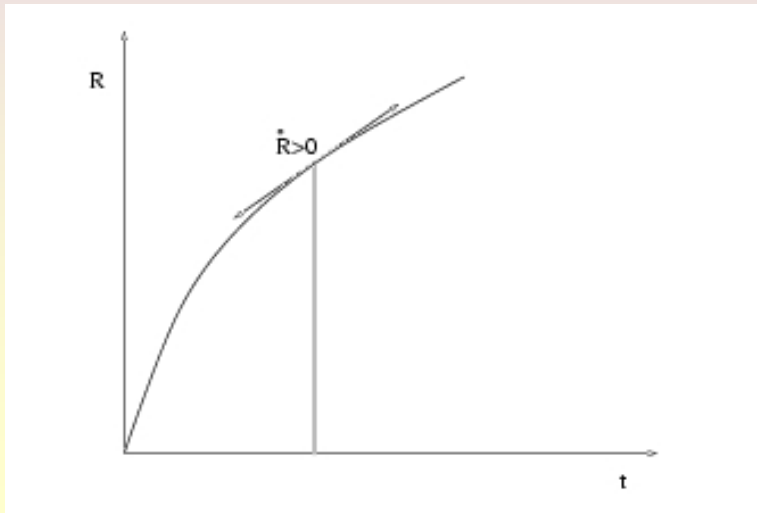
$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1 - \Omega_0)$$



$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_0) \right]$$

Supposons qu'à $t=0$ l'univers soit en expansion : $dR/dt > 0$

Or:
$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R < 0$$
 pour $-1/3 < \omega < 1$



**$R(t)$ concave:
singularité inévitable**

Modèles Einstein-de Sitter (EdS)

$$\text{EdS} \Leftrightarrow \Omega = 1$$

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_0) \right] \longrightarrow \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1+z)^{1+3\omega}$$

$$R^{\frac{1+3\omega}{2}} \dot{R} = H_0 R_0 R_0^{\frac{1+3\omega}{2}}$$

$$R^{\frac{3}{2}(1+\omega)-1} \dot{R} = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{d}{dt} \left[R^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \right] = H_0 R_0^{\frac{3}{2}(1+\omega)}$$

$$R(t) = \left[\frac{3H_0(1+\omega)}{2} \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} R_0 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

où:

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0}$$


Modèles Einstein-de Sitter (EdS)

$$\text{EdS} : \Omega = 1$$

$$R(t) = \left[\frac{3H_0(1+\omega)}{2} \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} R_0 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

$$\text{où: } t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0}$$

Comme: $\rho R^{3(1+\omega)} = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$


$$\left\{ \begin{array}{l} H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)t} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \\ q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{1+3\omega}{2} = q_0 \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^2 = \frac{1}{6\pi G (1+\omega)^2 t^2} \\ \rho_0 c t_0^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} t_0^2 = \frac{1}{6\pi G (1+\omega)^2} \end{array} \right.$$

Modèles Einstein-de Sitter (EdS)

EdS : $\Omega = 1$

Univers dominé par le rayonnement

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \\ t = t_0 (1+z)^{-2} \\ H = \frac{1}{2t} = H_0 (1+z)^2 \\ q_0 = 1 \\ t_{0c} = t_0 = \frac{1}{2H_0} \end{array} \right.$$

Univers dominé par la matière

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \\ t = t_0 (1+z)^{-3/2} \\ H = \frac{2}{3t} = H_0 (1+z)^{3/2} \\ q_0 = \frac{1}{2} \\ t_{0c} = t_0 = \frac{2}{3H_0} \end{array} \right.$$

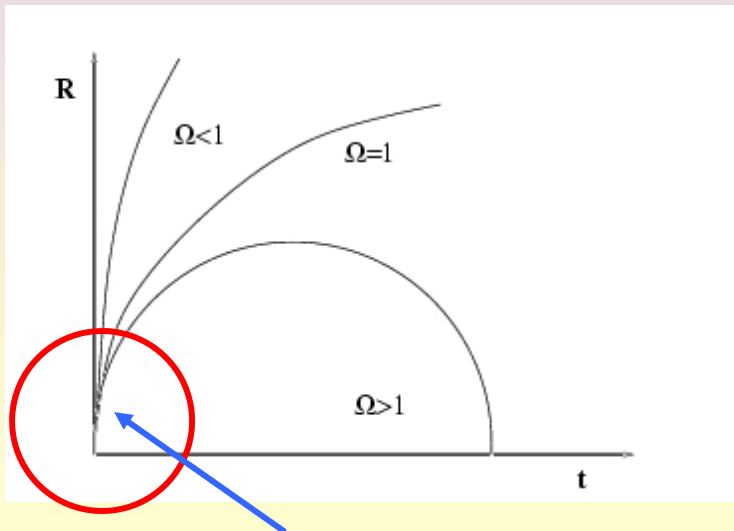
Comportement asymptotique quasi-EdS des modèles $\Omega \neq 1$, $-1/3 < \omega < 1$, sans constante cosmologique

$$H(t)^2 = H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_0 (1+z)^{(1+3\omega)} + (1-\Omega_0) \right]$$

Il existe donc un $z > z^*$ pour lequel
($1 - \Omega_0$) est négligeable

$$\frac{R_0}{R} = 1+z \gg \left| \frac{1}{\Omega_0} - 1 \right|^{\frac{1}{1+3\omega}} = \frac{R_0}{R^*} = 1+z^*$$

$$H^2 \approx H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\omega)} = H_0^2 \Omega_0 (1+z)^{3(1+\omega)}$$



Comportement identique

A grand redshift les modèles $\Omega \neq 1$ se
comportent comme des univers EdS où
 H_0 est transformé en $H_0 \Omega_0$

Relation courbure- Ω

$$H_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \right] = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

+ courbure constante
(principe cosmologique)

Les univers seront donc caractérisés identiquement soit par la courbure k , soit par le paramètre de densité (totale) Ω_{tot}

| | | | | | | |
|-----------------------------|-------------------|--------------|-------------------|----------|-------------------|--------|
| $\rho < \rho_{\text{crit}}$ | \Leftrightarrow | $\Omega < 1$ | \Leftrightarrow | $k = -1$ | \Leftrightarrow | Ouvert |
| $\rho = \rho_{\text{crit}}$ | \Leftrightarrow | $\Omega = 1$ | \Leftrightarrow | $k = 0$ | \Leftrightarrow | Plat |
| $\rho > \rho_{\text{crit}}$ | \Leftrightarrow | $\Omega > 1$ | \Leftrightarrow | $k = +1$ | \Leftrightarrow | Fermé |

Les 3 modèles standards

Modèle poussière:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right) + 1 - \Omega_0 \right]$$

Posons $x = R/R_0$

$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}$$

En prenant comme conditions initiales $t = 0$, $R(t = 0) = 0$ on a donc

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 - \frac{\Omega_0}{x}}}$$

L'âge de l'Univers est donc

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}}$$

Ce qui signifie que pour $\Omega > 0$, $t < 1/H_0$.

Les 3 modèles standards

Modèle poussière euclidien:

Modèle euclidien: $k = 0$

On a $\Omega = 1$, $\rho = \rho_c$ (densité critique) et donc

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \sqrt{x} \, dx$$

Age de l'univers: $t_0 = [2/3H_0]$

Les 3 modèles standards

Modèle poussière elliptique

Modèle elliptique (fermé) $k = 1, \Omega > 1$

On a $\rho_0 > \rho_c$.

Posons

$$1 - \cos\theta = 2 \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} x \quad ; \quad \sin\theta d\theta = 2 \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} dx$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\Omega_0 - 1) \left[-1 + \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)x} \right]}}$$

et donc

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \left[-1 + \frac{2}{1 - \cos\theta} \right]^{-1/2} \sin\theta d\theta$$

Avec $u = -\cos\theta$, on obtient

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du$$

soit

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\text{Arcsin} \left[u - \sqrt{1-u^2} \right] \right]$$

D'où l'expression de t et du facteur d'expansion x :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [\theta - \sin\theta]$$

$$x = \frac{R}{R_0} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} [1 - \cos\theta]$$

qui est la courbe paramétrique d'une cycloïde.

Les points caractéristiques sont

$$\theta = 0 \rightarrow R = 0$$

$$\theta = \pi \rightarrow R = R_{max} = R_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad \text{pour} \quad t_{max} = \frac{\pi \Omega_0}{2H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

$$\theta = 2\pi \rightarrow R = 0 \quad \text{pour} \quad t = 2t_{max}$$

L'âge de l'univers est alors

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\text{Arcos} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_0} (\Omega_0 - 1)^{1/2} \right] < \frac{2}{3H_0}$$

À titre d'exemple, pour $\Omega = 2$ et $H_0 = 100$ $t_0 \approx 6 \times 10^9$ ans, le maximum d'expansion se produit à

$$t_{max} \approx 3.2 \times 10^{10} \text{ ans} .$$

Les 3 modèles standards

Modèle poussière hyperbolique

Modèle hyperbolique (ouvert) $k = -1$, $\Omega < 1$

On a donc $\rho_0 < \rho_c$. On établit les mêmes équations que précédemment en substituant $i\varphi = \theta$ à θ .
On trouve alors

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} [\text{sh}\varphi - \varphi]$$

et

$$R = \frac{R_0}{2} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)} [\text{ch}\varphi - 1]$$

et l'âge de l'univers s'écrit donc

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{(1 - \Omega_0)} \left[1 - \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{1/2}} \text{Argch} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) \right] > \frac{2}{3H_0}$$

Les 3 modèles standards

Modèle radiatif

Cas des modèles radiatifs $\omega = 1/3$

On a dans ce cas

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_r \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + (1 - \Omega_r) \right]$$

où $\Omega_r = \Omega$ pendant la période radiative.

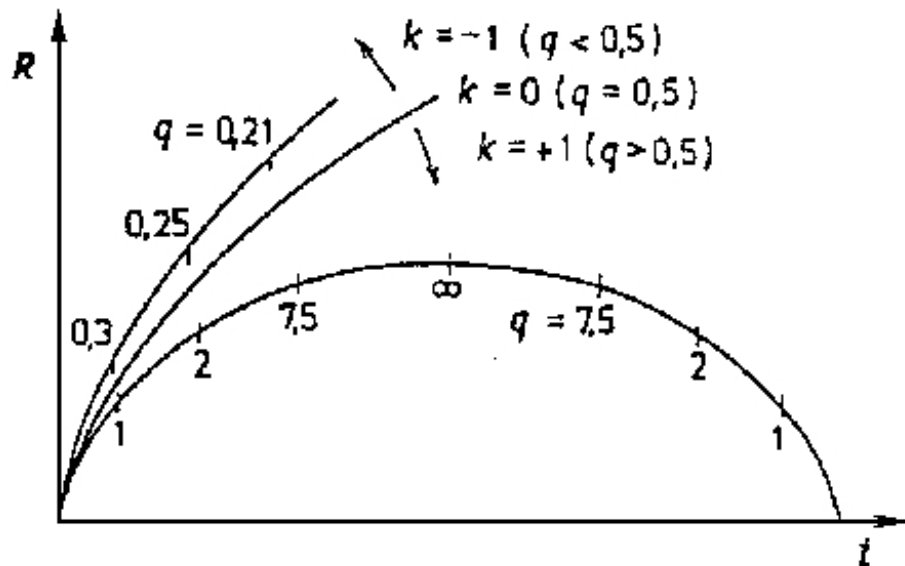
Il faut noter que le terme (R_0/R) est maintenant au carré. Dans ce cas, on a

$$R = R_0 \left(2H_0 \Omega_r^{1/2} t \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1 - \Omega_r}{2\Omega_r^{1/2}} H_0 t \right]^{1/2}$$

Les 3 modèles standards

Résumé

| Modèle | Géométrie | k | Ω | q_0 | Age | Destin |
|--------|--------------|-----|----------|-------|-----------------------|-------------------|
| Fermé | Sphérique | +1 | >1 | >1/2 | $t_0 < 2/3 t_H$ | recollapse |
| EdS | Plat | 0 | =1 | =1/2 | $t_0 = 2/3 t_H$ | expansion infinie |
| Ouvert | Hyperbolique | -1 | <1 | <1/2 | $2/3 t_H < t_0 < t_H$ | expansion infinie |



| | |
|----------|---|
| $k = +1$ | $R = R_0(1 - \cos \eta)$ $t = t_0(\eta - \sin \eta)$ |
| $k = 0$ | $R = R_0(t/t_0)^{2/3}$ |
| $k = -1$ | $R = R_0(\cosh \eta - 1)$ $t = t_0(\sinh \eta - \eta)$ |

Modèles généraux à courbure nulle

Pour un fluide composé de plusieurs composantes de densité ρ_i , on peut écrire en toute généralité:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{R^2} .$$

Dans le cas d'un univers plat, $k = 0$,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \sum_i \rho_i ,$$

où ρ_{0c} est la densité critique $t = 0 = t_0$. Or, d'après l'équation d'état d'un fluide parfait, on sait que pour chaque composante i du gaz on a:

$$\rho_i = \rho_{0i} (1 + z)^{3(1+\omega_i)} ;$$

soit

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \sum_i \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}} (1 + z)^{3(1+\omega_i)}$$

Modèles généraux à courbure nulle

donc

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)} .$$

La dynamique de l'univers peut être exprimée en fonction de $H(z)$ et des contributions à la densité de matière (m), des photons (γ), éventuellement des neutrinos (ν) et d'une composante homogène sans fluctuations (X)

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_{0\gamma} (1+z)^4 + \Omega_{0X} (1+z)^{3(1+\omega_X)} .$$

Modèles généraux à courbure nulle

De même, on peut donner l'expression générale du paramètre de décélération. D'après les équations d'Einstein on a:

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m + \sum_i \frac{3P_i}{c^2}\right)$$

De la même façon que pour $H(z)$ on peut exprimer la dérivée seconde de R en fonction du redshift et des diverses contributions à la densité:

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{H_0^2}{2\rho_{0c}} \left(\rho_m + \sum_i 3\omega_i \rho_i\right)$$

soit

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{H_0^2}{2} \left(\Omega_{0m} (1+z)^3 + 3 \sum_i \omega_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}\right).$$

Le paramètre de décélération actuel est donc

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} = \left[\frac{\Omega_{0m}}{2} + \frac{3}{2} \sum_i \omega_i \Omega_{0i}\right]$$

et à un redshift quelconque il vaut:

$$q(z) = -\frac{\ddot{R}}{RH(z)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{0m} (1+z)^3 + 3 \sum_i \omega_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}{\Omega_{0m} (1+z)^3 + \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}.$$

L'accélération de l'univers est donc contrôlé par le signe des ω_i du numérateur.

Le temps écoulé est déduit immédiatement sachant que $R = R_0/(1+z)$, avec $\dot{R} = dR/dt$:

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')H(z')}$$

Modèles à constante cosmologique

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda}{3} R^2 & (b) \end{cases}$$

Constante cosmologique = pression négative

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda}{3} R^2 & (b) \end{cases}$$

$P < 0$



$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\rho + \frac{3}{c^2} \left(P - \frac{\Lambda c^2}{12\pi G} \right) \right] R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) R^2 & (b) \end{cases}$$

Modèles à constante cosmologique

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda}{3} R^2 & (b) \end{cases}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} .$$

$$\Omega_\Lambda \approx 1 \implies L \approx \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{c}{H_0} \approx 1.7 h^{-1} \text{Gpc} .$$

Modèles à constante cosmologique

Courbure:

$$\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 R^2} \quad \Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

Paramètre de décélération:

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$$

Modèles généraux à constante cosmologique

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right],$$

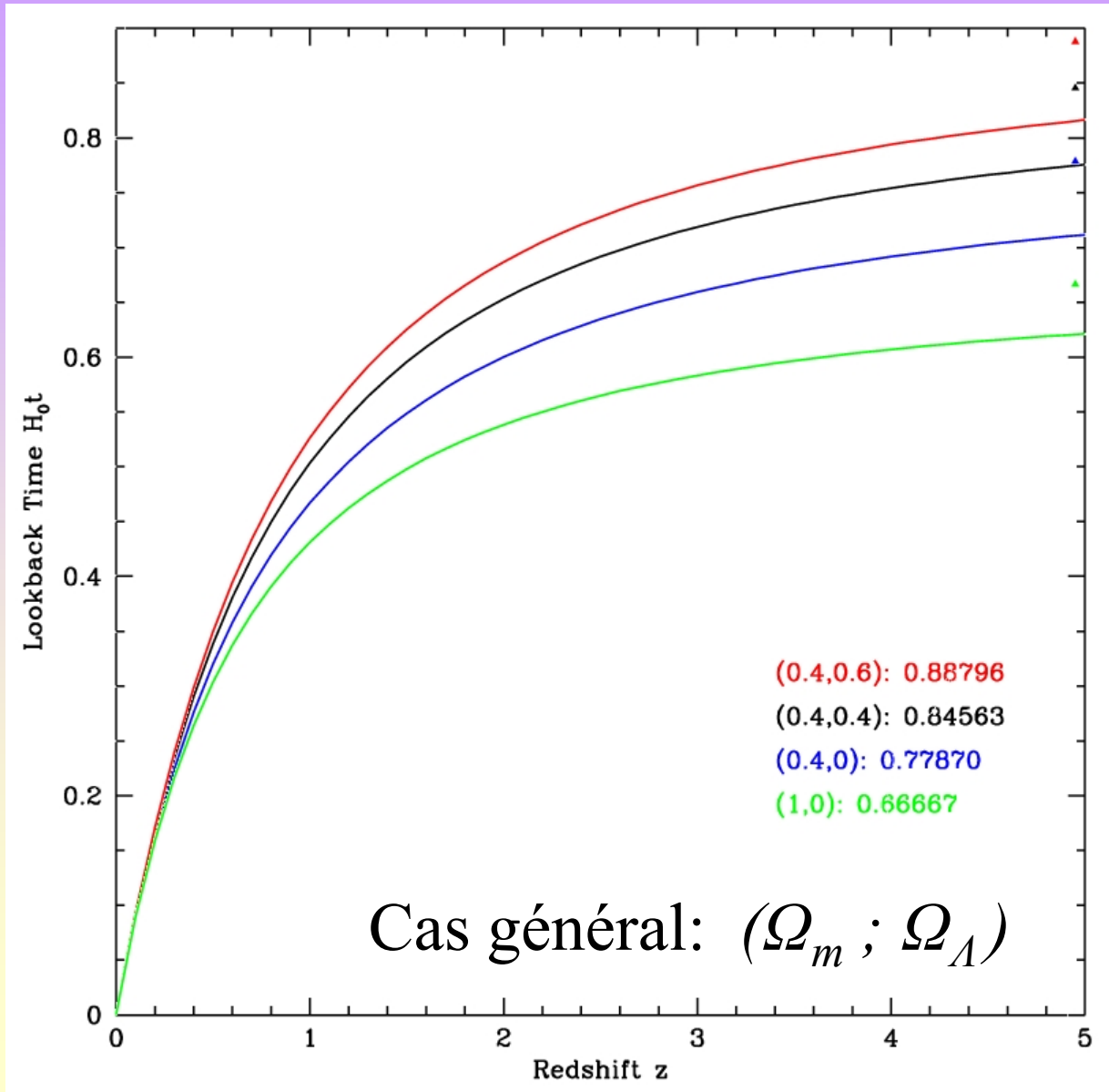


$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}.$$

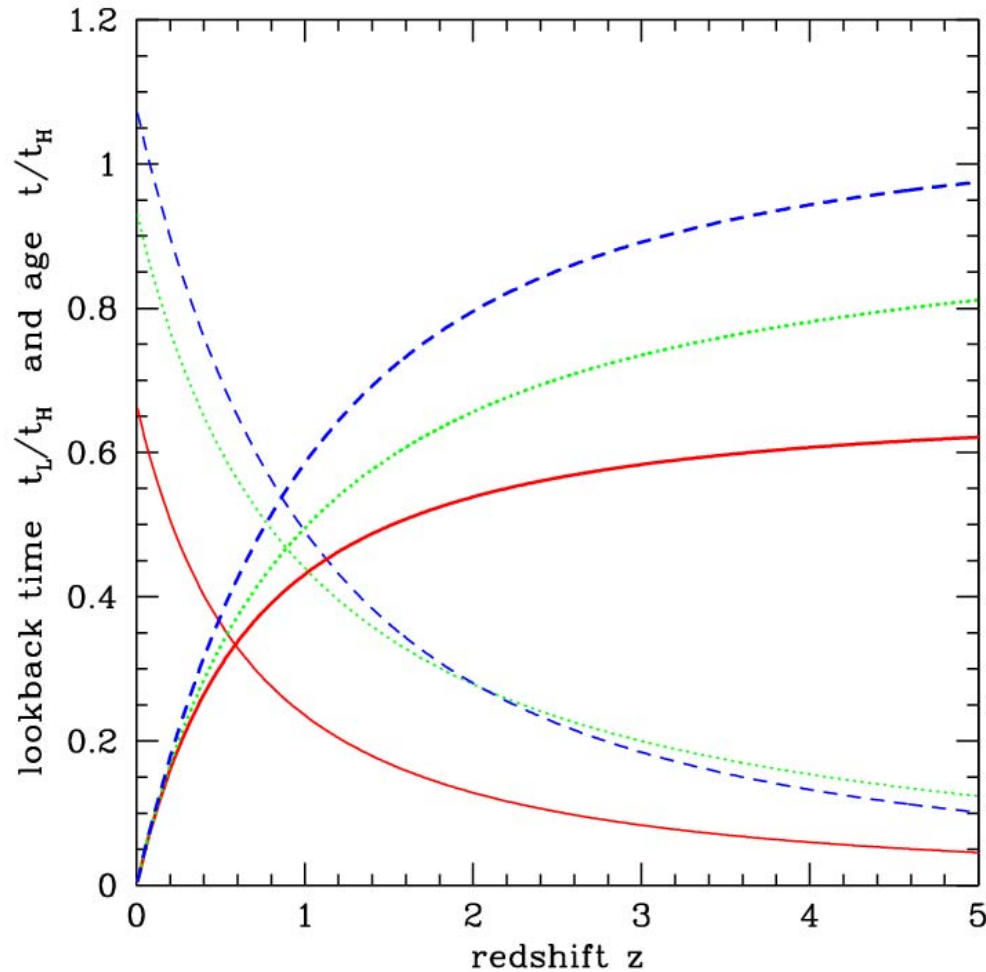


$$t(0) - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{1+z} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}}$$

Mesure du temps écoulé



Age de l'univers



$t_H = 9.8 \cdot 10^9$ ans

Cas général: $(\Omega_m ; \Omega_\Lambda)$

Modèles généraux à constante cosmologique

$$r(z) = \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right]$$

$$r(z) = \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \chi(z) \right] ,$$

$$\begin{cases} \text{Sinn}(x) = \text{sh}(x) & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda > 0 \\ \text{Sinn}(x) = x & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda = 0 \\ \text{Sinn}(x) = \sin(x) & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda < 0 \end{cases}$$

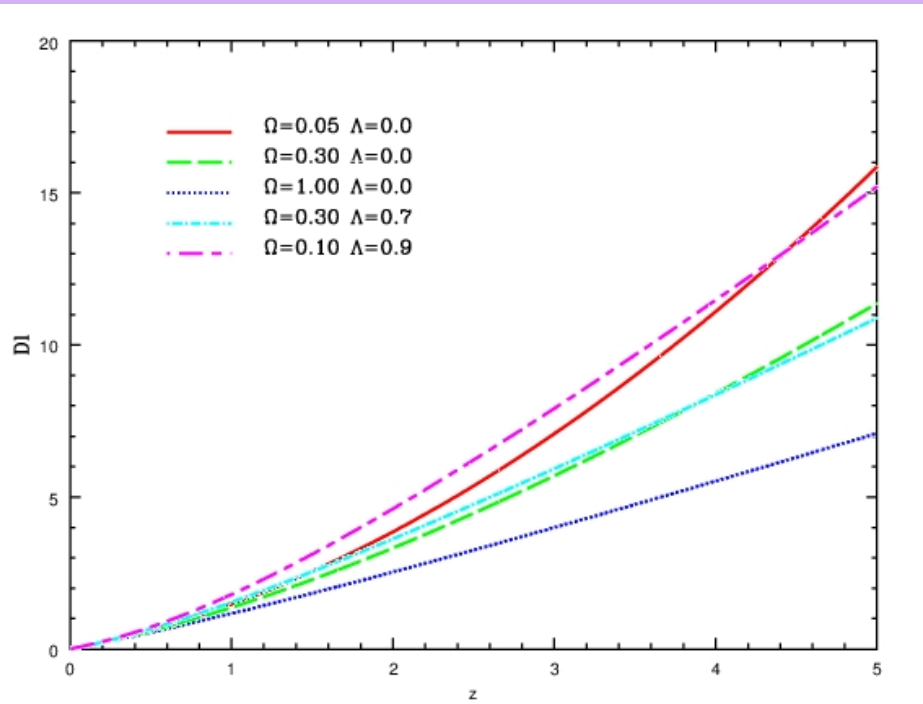
Distance diamètre-angulaire

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right]$$

Volume:

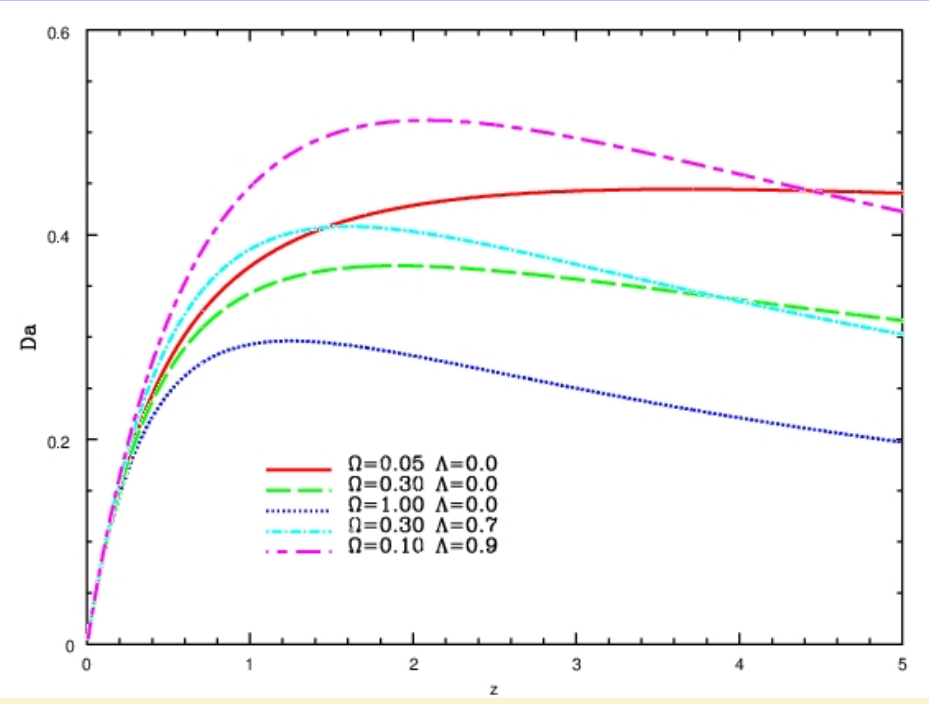
$$V(z) = \frac{1}{2H_0^3} \left[\frac{\text{Sinn} \left[2 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \right] \chi(z)}{|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} - \chi(z) \right]$$

Distances dans les modèles généraux d'univers de Friedman



Distance luminosité

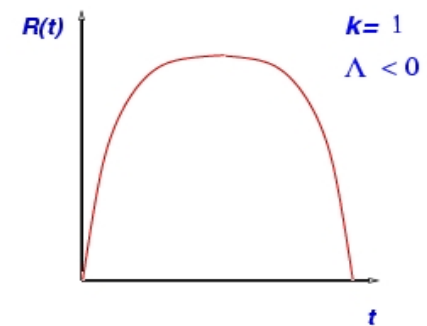
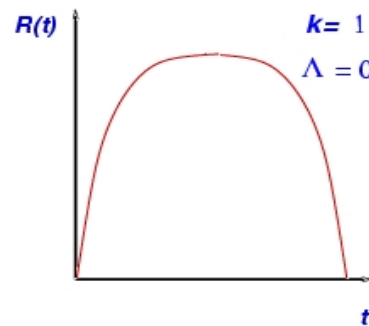
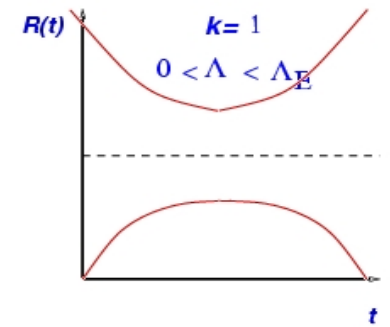
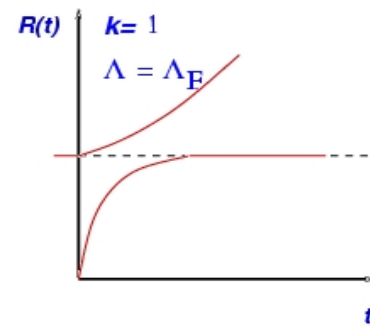
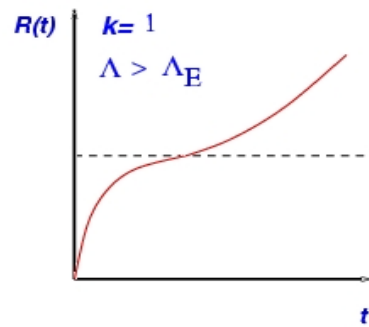
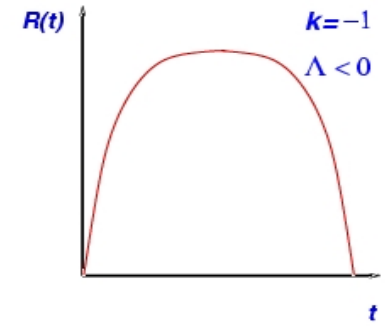
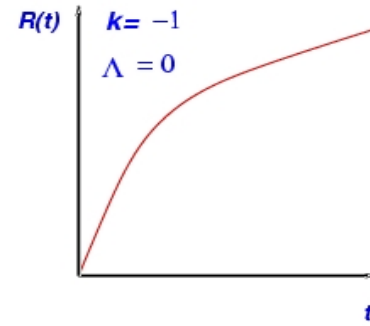
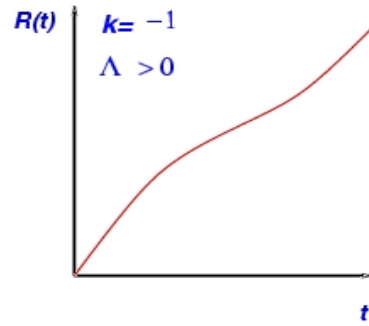
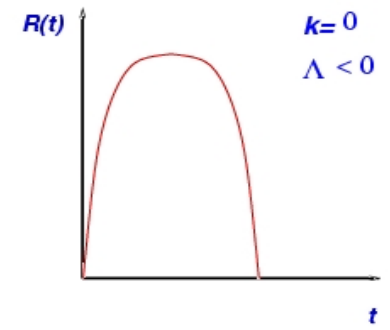
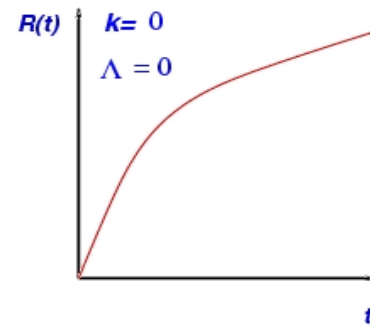
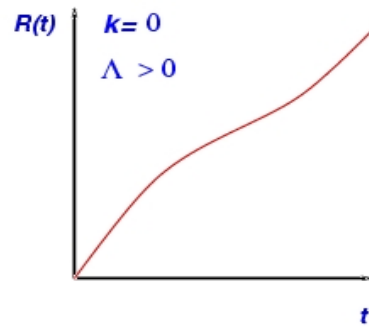
$$D_L = r(z) \cdot (1+z)$$

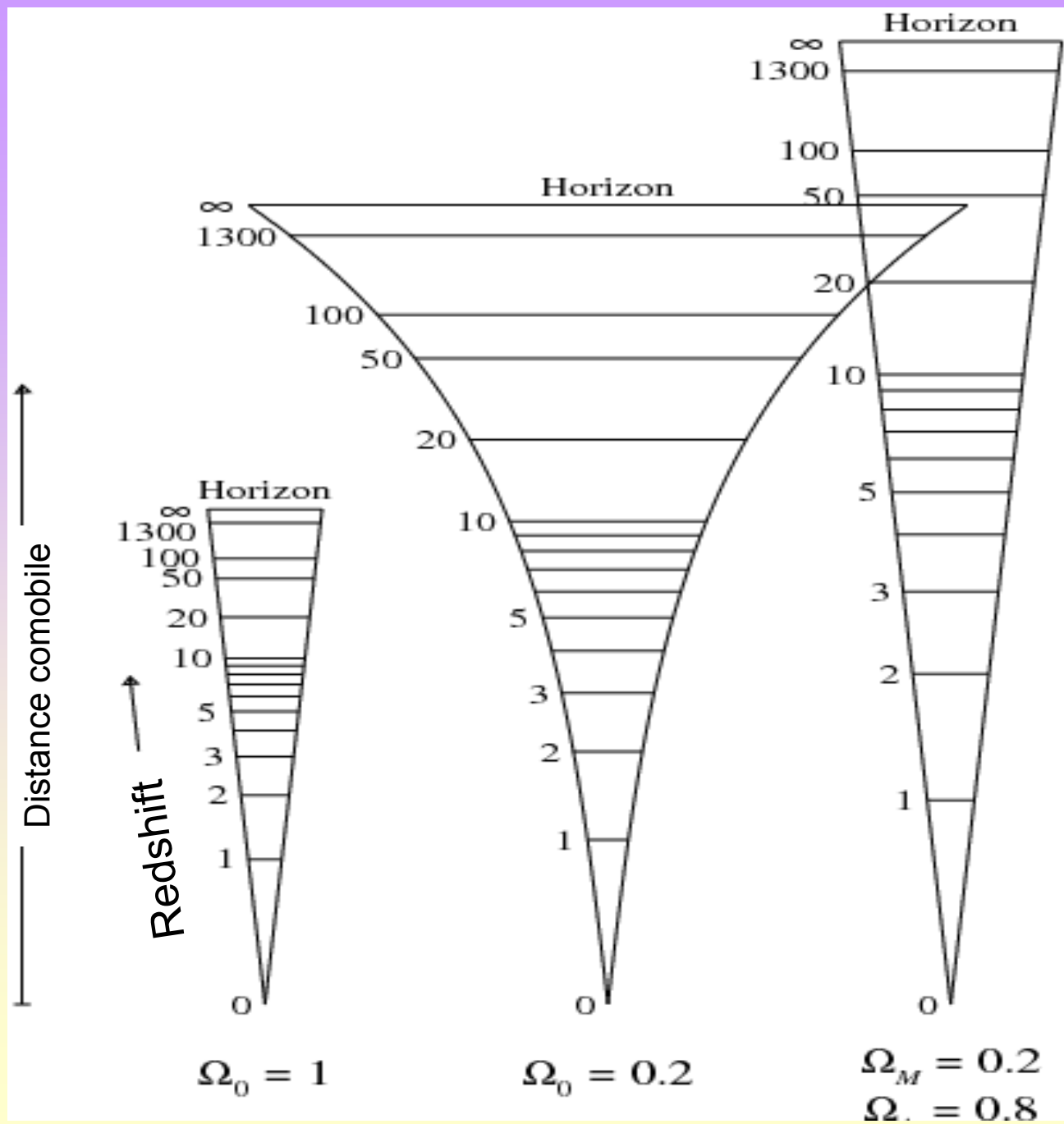


Distance angulaire

$$D_A = r(z) / (1+z)$$

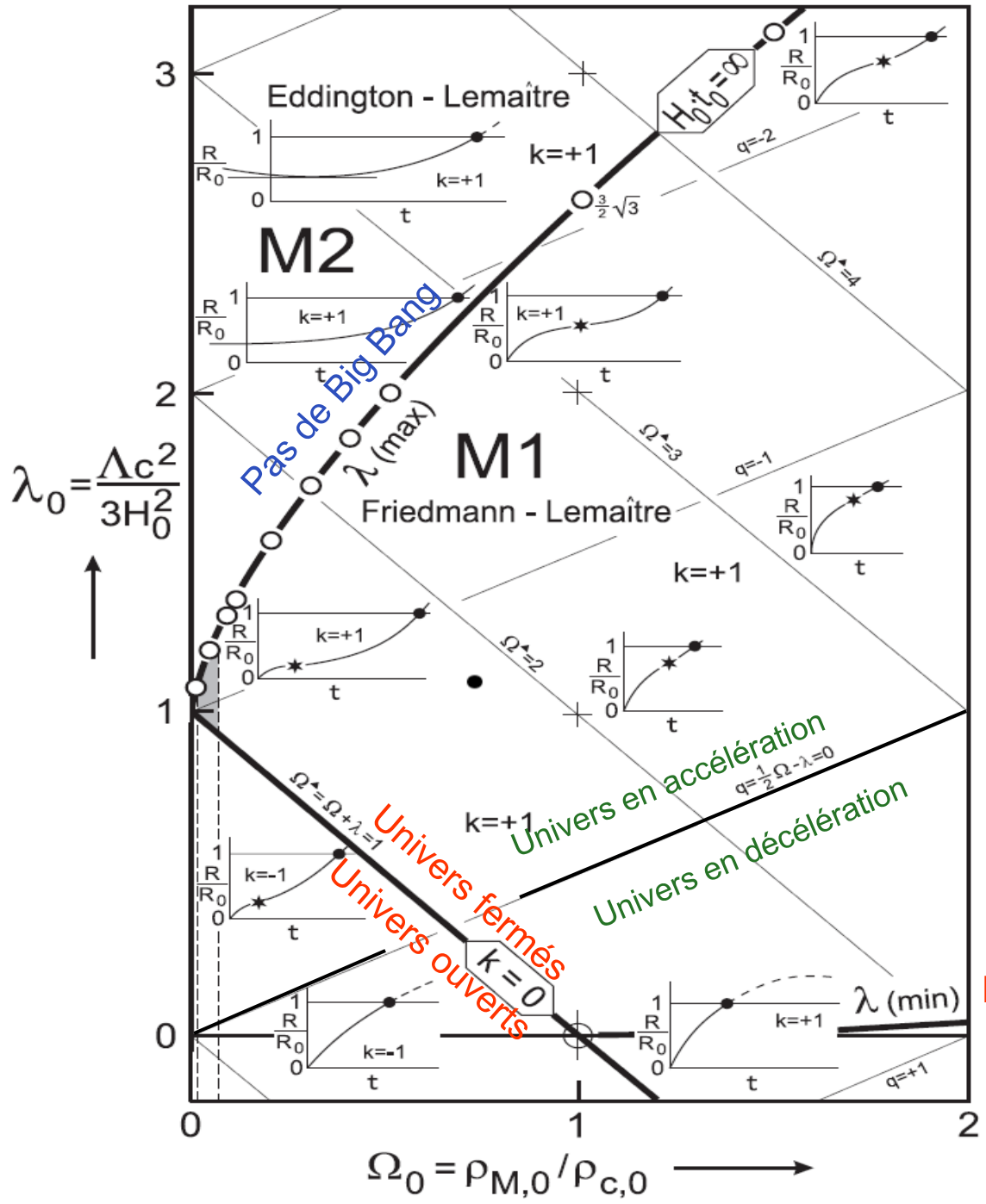
Modèles généraux d'univers de Friedmann





- Redshift,
- Distance,
- Facteur d'échelle

Modèles d'univers généraux



Expansion jusqu'à l'infini

Cosmologie avec constante cosmologique: comptage

$$dN = n(z)dV$$

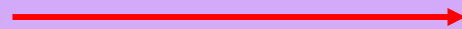


$$\frac{dN}{dz} = n(z)d_A^2 \frac{dl\delta\Omega}{dz}$$

$$\frac{dl}{dz} = c \frac{dt}{dz} = c \frac{1}{\dot{R}} \frac{dR}{dz} = \frac{c}{H(z)(1+z)} .$$

Cosmologie avec constante cosmologique: comptage

$$dN = n(z)dV$$



$$\frac{dN}{dz} = n(z)d_A^2 \frac{dl\delta\Omega}{dz}$$

$$\frac{dl}{dz} = c \frac{dt}{dz} = c \frac{1}{\dot{R}} \frac{dR}{dz} = \frac{c}{H(z)(1+z)} .$$

avec

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}$$

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} \text{Sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right] \quad (276)$$

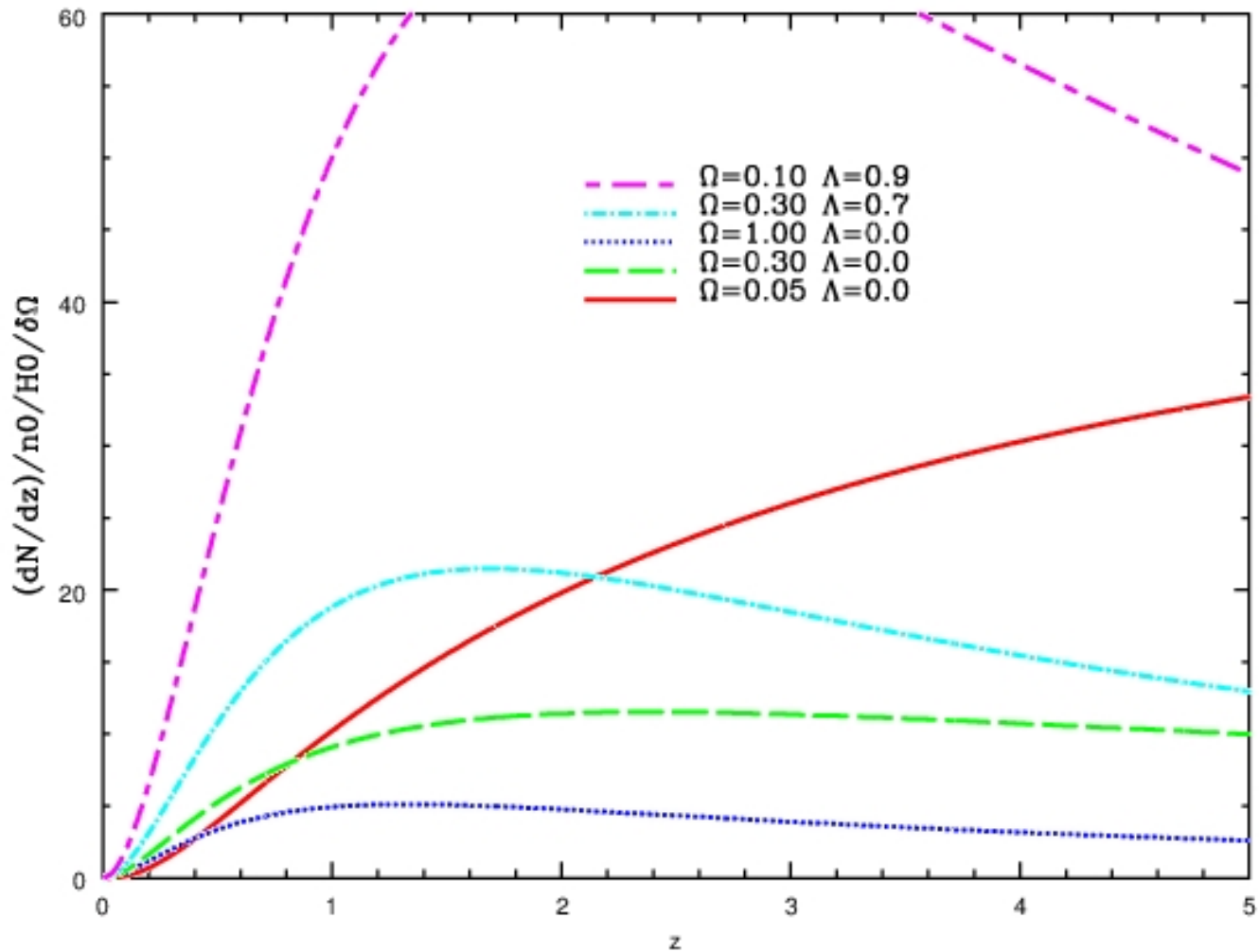
- $k=0; \Lambda=0$

$$\frac{dN}{dz} = \frac{4c^3 n_0 \delta\Omega}{H_0^3} \frac{(\sqrt{1+z} - 1)^3}{(1+z)^{5/2}}$$

- $\Omega=0.1; \Lambda=0$

$$\frac{dN}{dz} = \frac{4c^3 n_0 \delta\Omega_m}{H_0^3} \frac{[\Omega_m z + (\Omega_m - 2)(\sqrt{1 + \Omega_m z} - 1)]^2}{\Omega_m^4 (1+z)^3 \sqrt{1 + \Omega_m z}} .$$

Cosmologie avec constante cosmologique: comptage



Cosmologie avec constante cosmologique: profondeur optique

$$\tau = \int n(z)\sigma(z) dl ,$$

$$\tau(z) = \int n(z)\sigma(z) \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} \frac{dz}{1+z} .$$

- *Exemple 1*: diffusion Thomson d'un milieu ionisé

$$n_e(z) = n_{e,0} (1+z)^3 .$$

$$n_{e,0} = \frac{\rho_0}{m_p} = \frac{\rho_{0,c}\Omega_0}{m_p} ,$$

$$\tau(z) = \frac{\rho_{0,c}\Omega_0\sigma_T c}{m_p H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} (1+z)^2 dz .$$

$$\Omega_0=1; \Lambda=0 :$$

$$\tau(z) = 0.045 h f_{b,i} \left[(1+z)^{3/2} - 1 \right] ,$$

Cosmologie avec constante cosmologique: profondeur optique

- *Exemple 2*: effet de lentille gravitationnelle intégré

$$n_g(z) = n_{g,0} (1+z)^3 .$$

$$\sigma(z) = \pi R_g^2 .$$

$$\tau(z) = \frac{n_{g,0} \pi R_g^2 c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda}} (1+z)^2 dz .$$

$$\tau(z) = \frac{2}{3} \frac{n_{g,0} \pi R_g^2 c}{H_0} (1+z)^{3/2} .$$

$n_{g,0}$ donnée par la fonction de luminosité des galaxies:

$$0.01 h^{-3} \text{ gal.Mpc}^{-3}$$

$$\Omega_0 = 1; \Lambda = 0$$



$$- \tau(z = 0.3) = 0.008 ;$$

$$- \tau(z = 1) = 0.02 ;$$

$$- \tau(z = 30) = 1 .$$

Le rayon de Hubble

Par définition, le rayon de Hubble d_H est

$$d_H = c/H(t)$$

Pour $t=t_0$,

$$1/H_0 = 3.25 h \ 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Donc: } d_{H0} = 3000 h^{-1} \text{ Mpc}$$

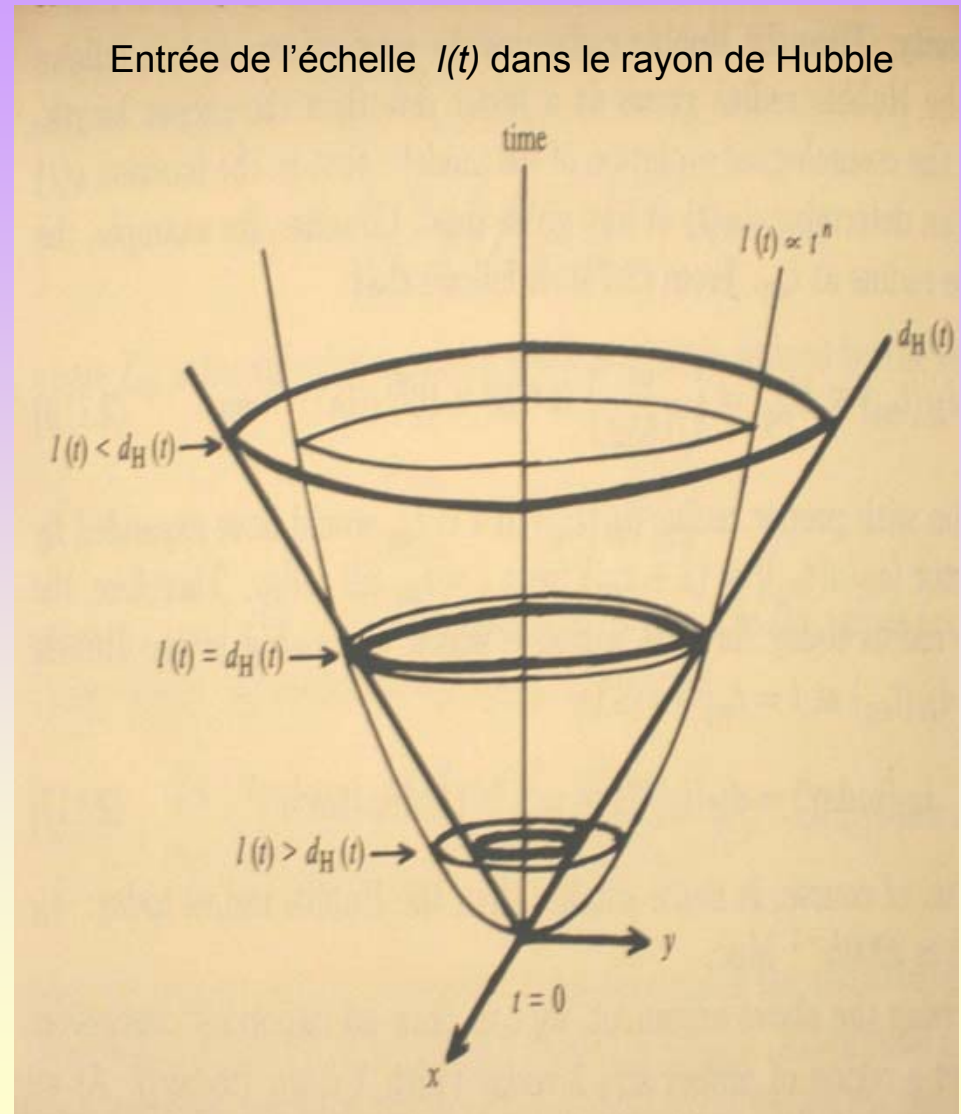
- d_H est l'échelle caractéristique de cohérence des processus cosmologiques.
- c'est l'échelle caractéristique à partir de laquelle les effets relativistes deviennent importants

Le rayon de Hubble

1. On a vu que $H(t) = \dot{R}/R$
2. Par ailleurs, on a vu que $R(t) = t^n$ avec $n < 1$

Donc $d_H(t) = c \cdot t$

- Ainsi, $R(t)$ = rayon propre croît moins vite que le rayon de Hubble



L'horizon

L'horizon particule

Dimension de l'univers observable aujourd'hui ($t=t_0$)
i.e. pour $z \rightarrow \infty$

$$R_H = R_0 \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Exemple: univers sans constante cosmologique

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_H = \frac{c}{H_0} \times 2. & k = 0 \quad (\Omega_0 = 1) \\ R_H = \frac{c}{H_0} \times \frac{2.}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \text{Arcsin} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} & k = 1 \quad (\Omega_0 > 1) \\ R_H = \frac{c}{H_0} \times \frac{2.}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \text{Argsh} \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^{1/2} & k = -1 \quad (\Omega_0 < 1) \end{array} \right.$$

- Si R_H est fini alors tout événement de $R > R_H$ est inobservable à $t=t_0$. C'est l'horizon particule.

L'horizon

L'horizon événement

Un événement émis en $r=r_1$ à $t=t_0$ sera t-il détecté par un observateur en $r=0$ un jour?

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Que se passe t-il si $t_1 \rightarrow \infty$?

- Si le terme de gauche converge vers une valeur finie alors cela signifie qu'il existe une borne r_H limite correspondant à t infini.

→ tout événement émis en $r_1 > r_H$ ne sera jamais accessible à l'observateur.

- r_H est l'horizon événement

L'horizon

Le problème de l'horizon

Soit le diamètre angulaire d'une structure à un temps t :

$$\theta_H = c t / d_A$$

- A $z = 1000$, la taille de l'horizon peut être calculée. Pour z grand, on peut démontrer que

$$d_A \sim 2c / H_0 \Omega_0$$

et donc:

$$\theta_H \sim 1.8 \Omega_0^{1/2} \text{ deg.}$$

- Des événements séparés de cette limite angulaire n'ont pas eu de liens causaux avant $z=1000$
- L'univers ne devrait pas être isotrope au-delà de cette limite.

Le problème de la platitude

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho$$

On a :

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda} .$$

Donc, pour $k=0$ et $\Omega_\Lambda > 0$, on a l'évolution suivante:

$$\Omega = \frac{\Omega_0 (1+z)^3}{\Omega_0 (1+z)^3 + 1 - \Omega_0} .$$

- Donc, si: $\Omega_0 = 0.3$ alors $\Omega = 0.999999999$ à $z = 1000$
- Ou bien, si $\Omega > 1$ à $z = 1500$ alors $\Omega_0 < 0$!

Le problème de la platitude

