Master M2

Examen de Cosmologie C1 - Jeudi 13 mars 2008

2 heures

Document autorisé: cours

I. Univers statique

On suppose un univers homogène, isotrope dont les propriétés sont décrites par les équations de Friedmann.

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho + \dfrac{3P}{c^2}\right) R + \dfrac{\Lambda c^2}{3} R & (a) \\ \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dfrac{\Lambda c^2}{3} R^2 & (b) \end{cases} \tag{1}$$

I.1 Préliminaires

- Rappeler le sens des termes des équations 1.
- On suppose que la pression peut s'écrire sous la forme $P = \omega\rho\, c^2$. Quels arguments pourraient justifier cette forme pour l'équation d'état?
- Ecrivez alors les équations 1 pour un univers statique.

I.2 L'univers statique d'Einstein

- Calculez Λ en fonction de ρ et montrez que dans le cas $\omega > -1/3$ on a nécessairement $k = +1$ et $\Lambda > 0$,
- L'univers étant statique, il peut être caractérisé par son facteur d'échelle constant R_c. Montrez que dans ce cas Λ peut s'écrire uniquement en fonction de R_c et ω et que

$$\rho = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{1}{1+\omega}\frac{1}{R_c^2} \tag{2}$$

I.3 La critique d'Eddington

On s'intéresse maintenant à la stabilité de cet univers statique. Pour cela, on analyse les effets de perturbations en ρ et en R autour de la position statique R_c.

- Ecrivez la première équation de Friedmann perturbée en fonction de Λ, ω, $R + \delta R$ et $\rho + \delta\rho$.
- Compte tenu des relations entre la densité perturbée ρ et R_c, et la constante fixe Λ et R_c, montrez que la perturbation sur l'accélération ne dépend que de ω, R_c et δR.
- Que se passe t-il alors si $\delta R > 0$ ou $\delta R < 0$? Que peut on en conclure sur la stabilité de cet univers statique?

I.4 L'univers statique faces aux observations

- L'univers statique d'Eintein est incomptablible avec les observations. Rappelez l'ensemble des faits observationnels qui l'attestent.
- Rappelez les observations qui montrent que l'univers est accéléré.
- Si l'on décrivait la source de cette accélération par une équation d'état $P = \omega\rho c^2$ quelle serait alors la valeur de ω la plus vraisemblable aujourd'hui? Pourquoi?

II. Masse des neutrinos fossiles.

A la suite du Big Bang, une très grande quantité de neutrinos a été produite pendant l'ère leptonique. Si au moins une des espèces i de neutrinos a une masse $m_{\nu i}$, alors ces espèces sont aujourd'hui non relativistes. En supposant qu'il existe trois espèces de neutrinos on a alors

$$\rho_\nu = \frac{3}{11} n_\gamma \sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \tag{3}$$

où n_γ est la densité numérique de photons du rayonnement cosmologique fossile aujourd'hui.

II.1 Densité de neutrinos fossiles

- Compte tenu de la densité de photons fossiles aujourd'hui, donnez la densité numérique de neutrinos fossiles.

II.2 Masse limite supérieure des familles de neutrinos

- En supposant que la courbure de l'univers est nulle et que la contribution en matière $\Omega_m = 0.233$ (hors baryons, avec $h = 0.71$), montrez que

$$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu i} \leq 12 \text{ eV} . \tag{4}$$

  On prendra $\rho_{critic} = 2 \times 10^{-29}\ h^2$ g.cm^{-3} et $h = 0.71$. On rappelle que 1eV $= 1.602 \times 10^{-12}$ ergs et $c = 10^{10}$ cm.s^{-1}.

II.3 Neutrinos et matière noire chaude

- Les neutrinos sont des candidats à la matière chaude dans l'univers, mais on pense qu'elle ne peut pas être une contribution dominante. Rappelez les arguments qui conduisent à cette conclusion.