Master M2

Correction de l'examen de Cosmologie C1 - Jeudi 19 mars 2009

2 heures | Document autorisé: cours

Des Univers à courbure nulle et constante cosmologique non-nulle

On suppose un univers homogène, isotrope dont les propriétés sont décrites par les équations de Friedmann. On considère des univers à courbure nulle composés uniquement d'une composante de matière non relativiste et d'une constante cosmologique.

On pose $c = 1$ et la constante cosmologique est Λ.

I. Montrez que dans ce cas $H(z)$ peut s'écrire:

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \left[\Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} \left(\frac{R}{R_0}\right)^3\right] \ . \tag{1}$$

On décrira le sens des termes de cette expression.

II. Montrez alors que l'expansion est décrite par l'équation différentielle suivante

$$\dot{R}^2 \frac{R}{P(R)} = H_0^2 \tag{2}$$

où $P(R)$ est un polynome simple et $\dot{R} = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$.

Donner alors l'expression de $R(t)$ pour un univers à constante cosmologique nulle.

III. Cas des univers à constante cosmologique non nulle

III.a. Montrez que l'expansion est décrite par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{u\,(1-u)}} = (-3\ \Lambda)^{1/2} \tag{3}$$

où on aura posé

$$\Omega_{0m} R_0^3 u = -\Omega_{0\Lambda} R^3 \ , \tag{4}$$

avec $\Lambda = 3\ \Omega_{0\Lambda} H_0^2$ $(c = 1)$.

III.b. En posant $\frac{1}{2}\mathrm{cos}\omega = u - \frac{1}{2}$ montrez alors qu'il suffit de résoudre:

$$-\dot{w} = (-3\Lambda)^{1/2} \tag{5}$$

III.c Discutez $R(t)$ pour le cas $\Lambda < 0$ et montrez que ces univers finissent toujours par se recontracter. Donnez le temps où le collapse s'achève.

III.d Discutez $R(t)$ pour le cas $\Lambda > 0$ et montrez que ces univers sont toujours en expansion

III.e Montrez que ces modèles $\Lambda > 0$ passent par deux phases d'accélération différentes. Ensuite, en considérant les deux cas limites $t \to 0$ et $t \to \infty$ montrez que ces univers décélèrent d'abord, puis accélèrent

IV. Ce dernier type d'univers semble correpondre à notre univers actuel. Rappeler les arguments observationels qui justifient que sa courbure doit être (quasi)-nulle et qu'il est en expansion accélérée